Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Veterinarias y Pecuarias
DU10-1 Métodos de Cuantificación 2009, Semestre Otoño
Ayudante Ignacio Trujillo Silva

Guía de ejercicios resueltos y propuestos

Funciones y polinomios:

1. Decida si la siguiente función es biyectiva, realice su grafica.

$f : R - \{2\} \to R$

$$f(x) = \frac{5x-2}{x-2}$$

Solución:

Partamos por definir el dominio e imagen de la función.

$Dom[f(x)] = R - \{2\}$

Para definir la imagen debemos despejar x de la función.

$$y = \frac{5x-2}{x-2}$$
$$y(x-2) = 5x-2$$
$$yx - 2y = 5x - 2$$
$$x(y-5) = 2y-2$$
$$x = \frac{2y-2}{y-5}$$

Ahora, debemos realizar la siguiente pregunta. ¿Que valores puede tomar "y" en la ultima función?

Puede tomar cualquier valor salvo el 5, pues en ese valor la función se indefine.

Entonces, $\mathrm{Im}[f(x)] = R - \{5\}$

Biyectividad: Para que una función sea biyectiva debe ser inyectiva y sobreyectiva a la vez.

- Para demostrar ***sobreyectividad*** el $\mathrm{Re}c[f(x)]$ debe ser igual a $\mathrm{Im}[f(x)]$.

Como nuestra $\mathrm{Im}[f(x)] = R - \{5\}$ y nuestro $\mathrm{Re}c[f(x)] = R$ (es el conjunto de llegada donde se define la función).

Como $\mathrm{Im}[f(x)] = R - \{5\} \neq \mathrm{Re}c[f(x)] = R \Rightarrow$ que no es sobreyectiva.

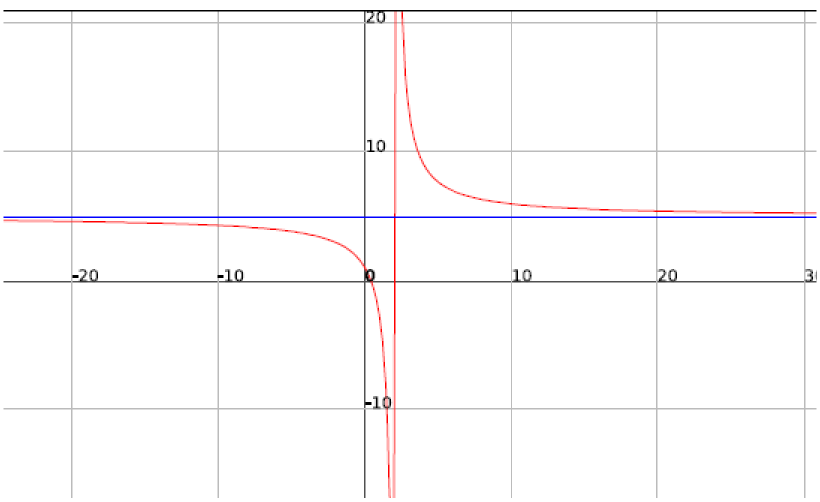
- Para demostrar **inyectividad** dado $f(x_1) = f(x_2)$ debe implicar $x_1 = x_2$.

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$\frac{5x_1 - 2}{x_1 - 2} = \frac{5x_2 - 2}{x_2 - 2}$$
$$(5x_1 - 2)(x_2 - 2) = (5x_2 - 2)(x_1 - 2)$$
$$5x_1x_2 - 2x_2 - 10x_1 + 4 = 5x_1x_2 - 2x_1 - 10x_2 + 4$$
$$-2x_2 - 10x_1 = -2x_1 - 10x_2$$
$$8x_2 = 8x_1$$
$$x_2 = x_1$$

Luego, la función es inyectiva.

Pero para ser biyectiva, debería ser inyectiva y sobreyectiva, esta función es solo inyectiva.

La grafica es la siguiente, la línea azul representa la asintota horizontal igual a 5 (es el valor que no puede tomar la imagen $\mathrm{Im}[f(x)] = R - \{5\}$), y la linea roja vertical es la asintota producto de los valores que no puede tomar el dominio $Dom[f(x)] = R - \{2\}$.



Ayudante Ignacio Trujillo Silva

2. Decida si la siguiente función es biyectiva y realice su grafica.

$f : dom(f) \rightarrow [3,\infty)$

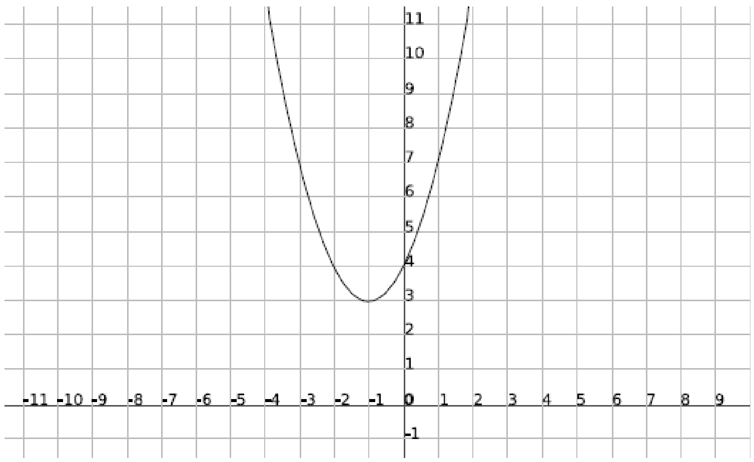
$f(x) = x^2 + 2x + 4$

<u>Solución:</u>

Partamos por definir el dominio e imagen de la función.

$Dom[f(x)] = R$, debido a que la función puede tomar cualquier valor de x.

Para definir la imagen debemos despejar x de la función, pero en este caso es algo complicado.
Usaremos el siguiente argumento, si encontramos la imagen del vértice de la parábola, la imagen de la función será todos los valores mayores que el.



La formula para el vértice es la siguiente $V = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

Luego, considerando un polinomio general de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ y nuestra función $f(x) = x^2 + 2x + 4$.

$a = 1$
$b = 2$
$c = 4$

$\Rightarrow \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1$

entonces el vértice es igual a,

$$V=\left(-1,\, f(-1)\right)=\left(-1,(-1)^2+2(-1)+4\right)$$
$$V=\left(\frac{-1}{4},1-2+4\right)$$
$$V=(-1,3)$$

Luego, la imagen es igual a $\mathrm{Im}[f(x)]=[3,\infty)$, pues el vértice es el menor valor que toma la función (mirar grafica anterior).

- Para demostrar ***sobreyectividad*** el $\mathrm{Re}c[f(x)]$ debe ser igual a $\mathrm{Im}[f(x)]$.

Como nuestra $\mathrm{Im}[f(x)]=[3,\infty)$ y nuestro $\mathrm{Re}c[f(x)]=[3,\infty)$ (es el conjunto de llegada donde se define la función).

Luego, $\mathrm{Im}[f(x)]=[3,\infty)=\mathrm{Re}c[f(x)]$ esto implica que es sobreyectiva.

- Para demostrar **inyectividad** dado $f(x_1)=f(x_2)$ debe implicar $x_1=x_2$.

$$f(x_1)=f(x_2)$$
$$x_1^2+2x_1+4=x_2^2+2x_2+4$$
$$x_1^2+2x_1-x_2^2-2x_2=0$$
$$x_1^2-x_2^2+2(x_1-x_2)=0$$
$$(x_1-x_2)(x_1+x_2)+2(x_1-x_2)=0$$
$$(x_1-x_2)[(x_1+x_2)+2]=0$$

Luego, tenemos que $x_1-x_2=0\Rightarrow x_1=x_2$ o que $[(x_1+x_2)+2]=0\Rightarrow x_1=-2-x_2$

Dos soluciones, esto implica que la función no es inyectiva.

Habría bastado darse un contra ejemplo, es decir

$$f(1)=7$$
$$f(-3)=7$$

Dos elementos del dominio para una misma imagen.

Pero para ser biyectiva, debería ser inyectiva y sobreyectiva, esta función es solo sobreyectiva.

2) Determine el dominio e imagen de las siguientes funciones, luego establezca si son inyectivas, epiyectivas y obtenga su inversa si es que existe.

Inyectividad: Si es inyectiva se cumple que $f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$.

Todos los co-dominios en esta sección se consideran igual a los reales.

a) $f(x) = \left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|$

$Dom(f) = \Re$ el denominador no se indefine nunca.

Para encontrar el conjunto imagen debemos realizar los siguientes procedimientos:

$$f(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right) = b$$
$$0 = bx^2 - x + b$$
$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4b^2}}{2b}$$

Luego, para que x no pertenezca a los imaginarios

$$1 - 4b^2 \geq 0$$
$$1 \geq 4b^2$$
$$\frac{1}{4} \geq b^2$$
$$\frac{1}{2} \geq b \geq -\frac{1}{2}$$

Pero como $0 \leq b$ por el valor absoluto, la intercepción de los intervalos obtenidos es:

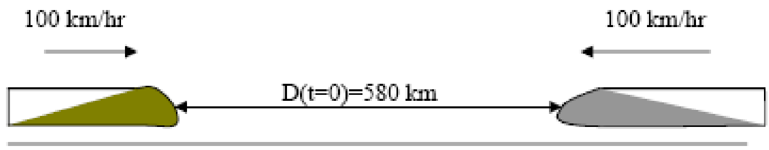
$$\operatorname{Im}(f) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Inyectividad: No inyectiva, basta con darnos un contra ejemplo $f(1) = f(-1)$ con $1 \neq -1$.

Epiyectividad: No epiyectiva, pues la imagen solo puede tomar $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Inversa: No podemos encontrar la inversa, ya que la función no es biyectiva.

8. Dos trenes en direcciones opuestas en la misma línea férrea a velocidad constante de 100 km/hr. En el instante que empezamos a medir el tiempo a los trenes los separa 580 km/hr. Escriba la distancia $D(t)$ que separa a los trenes en el instante t. ¿Cuánto se demoran en chocar?



Coma las velocidades son constante podemos usar:

$D(t) - D(0) = -(v_1 + v_2)(t_f - t_i)$

Las velocidades se suman, pues se debe restar la velocidad del tren 2, por que tiene dirección negativa y se debe restar mi propio avanza, es decir mi propia veocidad.

con, t_f = Tiempo final
t_i = Tiempo inicial = 0
D(0) = Distancia inicial entre los trenes = 580 km
D(t) = Distancia entre los trenes en función del tiempo.
V_1 = Velocidad del tren 1 = 100 km/hr.
V_2 = Velocidad del tren 2 = 100 km/hr.

$D(t) - D(0) = -(v_1 + v_2)t_f$

$D(t) = 580 - 200t_f$

Luego, $D : \left[0, \frac{29}{10}\right] \to [0{,}580]$

¿Cuánto se demoran en chocar?

Interprete

11. Si $f : \Re \to \Re$ es una función ¿Es cierto que $f(x + y) = f(x) + f(y) \forall x, y \in \Re$.

Démonos $\begin{array}{l} f : \Re \to \Re \\ f(x) \to 1 \end{array}$

$\Rightarrow f(x + y) = 1$, luego $f(x) = 1 \wedge f(y) = 1$

$\Rightarrow f(x + y) = 1 = 2 = f(x) + f(y) \Rightarrow\Leftarrow$
$\therefore f(x + y) \neq f(x) + f(y)$

12. Si $f : \Re \to \Re$ es una función y x < y ¿Es cierto que $f(x) < f(y)$?

$$f : \Re \to \Re$$
$$x \to \frac{2x+1}{x}$$

Si escogemos $x = 5$ e $y = 10$ se cumple la desigualdad, veamos si $f(5) < f(10)$

$$\frac{2 \cdot 5+1}{5} < \frac{2 \cdot 10+1}{10}$$
$$2+\frac{1}{5} < 2+\frac{1}{10}$$
$$\frac{1}{5} < \frac{1}{10}$$
$$10 < 5 \Rightarrow\Leftarrow$$

Esta preposición, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ se cumple solo para las funciones estrictamente crecientes. (Definiciones que veremos más adelante)

17. ¿Cuál es la función inversa de la función $f : \Re \to \Re$ definida por $f(t) = 4t-2$?

$$f(t) = 4t-2$$
$$y = 4t-2$$
$$y+2 = 4t \qquad \Rightarrow f(t)^{-1} = \frac{t+2}{4}$$
$$t = \frac{y+2}{4}$$

Una función inversa debe conectar los elementos del conjunto de llegada con su preimagenes. La función debe ser biyectiva.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Veterinarias y Pecuarias
DU10-1 Métodos de Cuantificación 2009, Semestre Otoño
Ayudante Ignacio Trujillo Silva

Ejercicios (soluciones abajo)

1. Demuestre que para todo $x \in \mathbf{R}$, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $n > x$

2. Encuentre el dominio de las siguientes funciones reales

   (a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

   (b) $f(x) = \sqrt{x+8}$

   (c) $y = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ 5 & x = 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$

   (d) $f(x) = \pi x^2$

   (e) $f(x) = \frac{5x+6}{(x+2)(x+3)}$

   (f) $f(x) = \frac{x}{x^2+5x+11}$

   (g) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

   (h) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

   (i) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{2-x}$

   (j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-5}} + \frac{\sqrt{x+3}}{5}$

   (k) $f(x) = \begin{cases} 2x+8 & x > 3 \\ -3x & x \leq 3 \end{cases}$

   (l) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-x-20}}$

3. Dadas las funciones $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = 2x^2 + 3x + 5$ y $f_3(x) = \frac{1}{x}$, evalue

   (a) $f_i(5) \quad i = 1, 2, 3$

   (b) $f_i(x+h) - f_i(x) \quad h > 0$

   (c) $\frac{f_i(x+h) - f_i(x)}{h}$

   (d) $f_i(b^2)$ con $b \in \mathbf{R}$

4. Dada la función $f(x) = x^2$. Note que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ no es inyectiva. Encuentre 3 subconjuntos de $\mathbf{R}$, $D_i \quad i = 1, 2, 3$ tal que $f : D_i \to \mathbf{R}$ es inyectiva. ¿Existe un dominio D formado por números positivos y negativos tal que $f : D \to \mathbf{R}$ es inyectiva?

5. Pruebe que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es inyectiva en su dominio natural.

1. Demostremos que $\forall x \in \mathbf{R} \exists n \in \mathbf{N} | n > x$. Esto significa que no es acotado superiormente. Para la demostración supondremos que fuera acotado superiormente $\Rightarrow \exists x \in \mathbf{R}^+$ tal que $\forall n \in \mathbf{N} n \leq x$

   Además $n + 1 \leq x$ Por lo tanto tenemos

$$n \leq x \quad (4.163)$$
$$n+1 \leq x \quad (4.164)$$

   Restando (4.163) de (4.164) obtenemos

$$(n+1) - n \leq 0$$
$$-1 \leq 0 \quad \rightarrow\leftarrow \quad (4.165)$$

   Por lo tanto existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $n > x$

2. Encontrar el dominio de las siguientes funciones

   (a) $Dom(f) = \{x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}\}$
   (b) $Dom(f) = \{x \in \mathbf{R} | x \geq -8\}$
   (c) $Dom(y) = \{x \in \mathbf{R}\}$
   (d) $Dom(f) = \{x \in \mathbf{R}\}$
   (e) $Dom(f) = \{x \in \mathbf{R} | x \neq -2 \wedge x \neq -3\}$
   (f) $Dom(f) = \{x \in \mathbf{R}\}$
   (g) $Dom(f) = \{x \in \mathbf{R} | x \neq 0\}$
   (h) $Dom(f) = \{x \in \mathbf{R} | x \geq 0\}$
   (i) $Dom(f) = \{x \in \mathbf{R} | x \geq 1 \wedge x \neq 2\}$
   (j) $Dom(f) = \{x \in \mathbf{R} falta$
   (k) $Dom(f) = \{x \in \mathbf{R}\}$
   (l) $Dom(f) = \{x \in \mathbf{R} | x \neq -4 \wedge x \neq 5\} Revisar$

3. Dadas las funciones $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = 2x^2 + 3x + 5$ y $f_3(x) = \frac{1}{x}$ evaluar

(a) $f_i(5) \quad i = 1, 2, 3$ Calculemos

$$f_1(5) = \sqrt{5} = 2.2360679775 \tag{4.166}$$
$$f_2(5) = 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 4 = 50 + 15 + 4 = 69 \tag{4.167}$$
$$f_3(5) = \frac{1}{5} = 0.2 \tag{4.168}$$

(b) $f_i(x+h) - f_i(x) \quad h > 0$

$$f_1(x+h) - f_1(x) = \sqrt{x+h} - \sqrt{x} \tag{4.169}$$

$$\begin{aligned} f_2(x+h) - f_2(x) &= 2(x+h)^2 + 3(x+h) + 5 \\ &\quad -\left(2x^2 + 3x + 5\right) \\ &= 2x^2 + 4xh + 2h^2 + 3x \\ &\quad +3h + 5 - 2x^2 - 3x - 5 \\ &= 4xh + 2h^2 + 3h \\ &= h(4x + 3 + 2h) \end{aligned} \tag{4.170}$$

$$\begin{aligned} f_3(x+h) - f_3(x) &= \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x - (x+h)}{x(x+h)} \\ &= \frac{-h}{x(x+h)} \end{aligned} \tag{4.171}$$

(c) $\frac{f_i(x+h) - f_i(x)}{h}$ Para los númeradores usaremos (4.169), (4.170), (4.171).

Por lo tanto obtenemos

$$\frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \tag{4.172}$$

$$\begin{aligned} \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} &= \frac{h(4x + 3 + 2h)}{h} \\ &= 4x + 3 + 2h \end{aligned} \tag{4.173}$$

$$\begin{aligned}\frac{f_3(x+h)-f_3(x)}{h} &= \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} \\ &= \frac{-1}{x(x+h)}\end{aligned} \tag{4.174}$$

(d) $f_i(b^2)$ con $b \in \mathbf{R}$

$$f_1(b^2) = \sqrt{b^2} = b \tag{4.175}$$

$$f_2(b^2) = 2b^2 + 3b + 5 \tag{4.176}$$

$$f_3(b^2) = \frac{1}{b^2} \tag{4.177}$$

4. Para encontrar los 3 subconjuntos donde $f(x)$ sea inyectiva, primero debemos ver si f es inyectiva a no.

Si $f(x) = f(y)$ entonces $\Rightarrow x = y$

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 \\ x &= \pm\sqrt{y}\end{aligned} \tag{4.178}$$

Por lo tanto no es inyectiva

Si hacemos un gráfico de $f(x)$ podremos encontrar los 3 subconjuntos en donde f sea inyectiva.

$$D_1 = \mathbf{R}^- \tag{4.179}$$

$$D_2 = \mathbf{R}^+ \tag{4.180}$$

$$D_3 = (1, \infty) \tag{4.181}$$

¿Existe un dominio D formado por números positivos y negativos tal que $f : D \to \mathbf{R}$ inyectiva?

No, porque no existe un intervalo formado por números positivos y negativos tal que f sea inyectiva.

5. Para este ejercicio debemos saber cual es el dominio natural de $f(x) = \sqrt{x}$.

   $Dom_{\mathbf{N}}(f) = \{x \in \mathbf{R} | x \geq 0\}$.

   Probemos ahora que f es inyectiva. Supongamos que $f(x) = f(y)$ para algún x e y. Y veamos que $x = y$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= \sqrt{y} \quad /()^2 \\ \Rightarrow \quad x &= y \end{aligned} \tag{4.182}$$

   Por lo tanto la función f es inyectiva en su dominio natural.

(Resultados Abajo)

1. Un rectángulo tiene 200 [cm] de perímetro. Expresar su área como función de x.

2. Vamos a construir una caja abierta con una pieza cuadrada de metal de 16 [cm] de lado, cortando cuadrados iguales de sus esquinas y doblando por las líneas de puntos (ver figura). Exprese el volumen V en función de x.

3. Un rectángulo está acotado por el eje X y el semicirculo $y = \sqrt{16 - x^2}$ (ver figura). Escriba el área A del rectángulo como función de x.

4. Una caja cerrada de sección cuadrada de lado x tiene un área de $200[\mathrm{cm}^2]$ (ver figura). Exprese el volumen V como función de x.

5. Dadas las funciones $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$. Encuentre

   (a) $\mathrm{Dom}(f)$, $\mathrm{Dom}(g)$
   (b) $f + g$
   (c) $f \cdot g$
   (d) $f \circ g$
   (e) $g \circ f$
   y los respectivos dominios.

6. Determine si las siguientes funciones son inversas una de la otra:

   (a) $f(x) = 2x + 3 \qquad g(x) = \frac{x+3}{2}$
   (b) $f(x) = \sqrt{x-4} \qquad g(x) = x^2 + 4 \quad x \geq 0$
   (c) $f(x) = 1 - x^3 \qquad g(x) = \sqrt[3]{1-x}$
   (d) $f(x) = x^{-2} \quad , x > 0 \qquad g(x) = x^{-\frac{1}{2}} \quad , x > 0$
   (e) $f(x) = \frac{1}{x^2+1} \qquad g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \qquad$ en $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$

7. Encuentre la función inversa (si existe). Represente aproximadamente un gráfico de f y de f^{-1}

   (a) $f(x) = x^2 \quad x \geq 0$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \quad x \geq 2$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

8. Dadas $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ y $g(x) = x^3$. Encuentre

   (a) $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

   (b) $(f^{-1} \circ f^{-1})(t)$

   (c) $(g^{-1} \circ f^{-1})(a)$

9. Encuentre las raices de

   (a) $p(x) = x^4 + x$

   (b) $h(x) = x(4 - x^2)$

   (c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ sabiendo que 2 es raíz ¿Cuáles son reales?

10. Divida los polinomios $h(x)$ y $p(x)$ encontrando $q(x)$ y $r(x)$

   (a) $h(x) = x^4 + 3x^3 + 2$ y $p(x) = x^2 + 3x - 2$

   (b) $h(x) = x^5 + 5x - 1$ y $p(x) = x^3 + 2x - 3$

   (c) $h(x) = x^4 + 1$ y $p(x) = x - 2$

   (d) $h(x) = x^4 + 1$ y $p(x) = x^2 + 2x + 2$

1. Debemos encontrar el Area como funciń de x. Para ello tenemos como dato el perímetro de un rectángulo que es

$$P = 2x + 2y = 200 \tag{4.183}$$

$$x + y = 100$$
$$y = 100 - x \tag{4.184}$$

Además el área de una rectángulo es $A = x \cdot y$, reemplazando (4.184) obtenemos

$$A(x) = x \cdot y = x(100 - x) \tag{4.185}$$

$$A(x) = 100x - x^2 \tag{4.186}$$

2. Como el lado de la pieza cuadrada es $16[\mathrm{cm}^2]$ si recortamos cuadrados iguales de lado x de cada esquina podemos expresar el volumen en función de x.

$$V(x) = (16 - 2x)^2 x \tag{4.187}$$
$$= (256 - 64x + 4x^2)x$$

$$V(x) = 4x^3 - 64x^2 + 256x \tag{4.188}$$

3. La ecuación del círculo es:

$$y = \sqrt{16 - x^2} \tag{4.189}$$

Si tomamos como x la distancia entre el eje Y y la circunferencia. Además tomamos como y la distancia entre el eje X y la circunferencia obtenemos que el área será

$$\frac{A}{2} = x \cdot y = x\sqrt{16 - x^2} \tag{4.190}$$

Por lo tanto el área total de en función de x será

$$A(x) = 2x\sqrt{16 - x^2} \tag{4.191}$$

4. Sabemos que el área $A = 100[\mathrm{cm}^2]$

   Además sabemos que

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4xy &= 200 \\ x^2 + 2xy &= 100 \\ 2xy &= 100 - x^2 \\ y &= \frac{100 - x^2}{2x} \end{aligned} \tag{4.192}$$

   Por otro lado sabemos que el volumen lo podemos expreasar como

$$V(x) = x^2 \cdot y \tag{4.193}$$

$$V(x) = x^2 \frac{100 - x^2}{2x} \tag{4.194}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x}{2}(100 - x^2) \\ &= 50x - \frac{x^3}{2} \end{aligned} \tag{4.195}$$

5. Dadas $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = \sqrt{x + 1}$. Encontrar

   (a) $Dom(f), Dom(g)$

$$Dom(f) = \{x \in \mathbf{R}\} \tag{4.196}$$

$$Dom(g) = \{x \in \mathbf{R} | x \geq -1\} \tag{4.197}$$

   (b) $f + g$

$$f(x) + g(x) = 2x - 3 + \sqrt{x + 1} \tag{4.198}$$

   El dominio será $Dom(f + g) = \{x \in \mathbf{R} | x \geq -1\}$

   (c) $f \cdot g$

$$f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x + 1}(2x - 3) \tag{4.199}$$

   El dominio será $Dom(f \cdot g) = \{x \in \mathbf{R} | x \geq -1\}$

(d) $f \circ g$

$$f(x) \circ g(x) = 2(\sqrt{x+1}) - 3 \tag{4.200}$$

El dominio será $Dom(f \circ g) = \{x \in \mathbf{R} | x \geq -1\}$

(e) $g \circ f$

$$g(x) \circ f(x) = \sqrt{(2x-3)+1} = \sqrt{2x-2} \tag{4.201}$$

El dominio será $Dom(g \circ f) = \{x \in \mathbf{R} | x \geq -1\}$

6. Determinar si las funciones son inversas una de la otra.

(a) $f(x) = 2x + 3$

$$g(x) = \frac{x+3}{2} \tag{4.202}$$

$$\begin{aligned} f(x) = y &= 2x + 3 \\ 2x &= y - 3 \\ x &= \frac{y-3}{2} \end{aligned} \tag{4.203}$$

Comparando (4.202) con (4.203) vemos que no son iguales. Por lo tanto f no es inversa de g y viceversa.

(b) $f(x) = \sqrt{x-4} \qquad g(x) = x^2 + 4 \quad x \geq 0$

$$\begin{aligned} f(x) = y &= \sqrt{x-4} \\ y^2 &= x - 4 \\ y^2 + 4 &= x = g(y) \end{aligned} \tag{4.204}$$

Por lo tanto hemos encontrado la inversa y es igual a $g(x)$

(c) $f(x) = 1 - x^3 \qquad g(x) = \sqrt[3]{1-x}$

$$\begin{aligned} f(x) = y &= 1 - x^3 \\ y - 1 &= -x^3 \\ 1 - y &= x^3 \\ \sqrt[3]{1-y} &= x = g(y) \end{aligned} \tag{4.205}$$

(d) $f(x) = x^{-2} \quad , x > 0 \qquad g(x) = x^{-\frac{1}{2}} \quad x > 0$

$$\begin{aligned} f(x) = y &= x^{-2} \\ y &= \frac{1}{x^2} \\ yx^2 &= 1 \\ x^2 &= \frac{1}{y} \\ x &= \frac{1}{\sqrt{y}} \\ x &= y^{-\frac{1}{2}} = g(y) \end{aligned} \tag{4.206}$$

Por lo tanto $g(y) = g(x)$, entonces las funciones son inversas una de la otra.

(e) $f(x) = \frac{1}{x^2+1} \qquad g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ en $]\frac{1}{2}, 1[$

$$\begin{aligned} f(x) = y &= \frac{1}{x^2+1} \\ (x^2+1) &= \frac{1}{y} \\ x^2 &= \frac{1}{y} - 1 \\ x^2 &= \frac{1-y}{y} \\ x &= \sqrt{\frac{1-y}{y}} = g(y) \end{aligned} \tag{4.207}$$

Por lo tanto hemos encontrado la inversa que además es igual a la entregada.

7. Encontrar la inversa y graficar f y f^{-1}

(a) $f(x) = x^2 \quad x \geq 0$

$$\begin{aligned} f(x) = y &= x^2 \\ \sqrt{2} &= x = f^{-1}(y) \end{aligned} \tag{4.208}$$

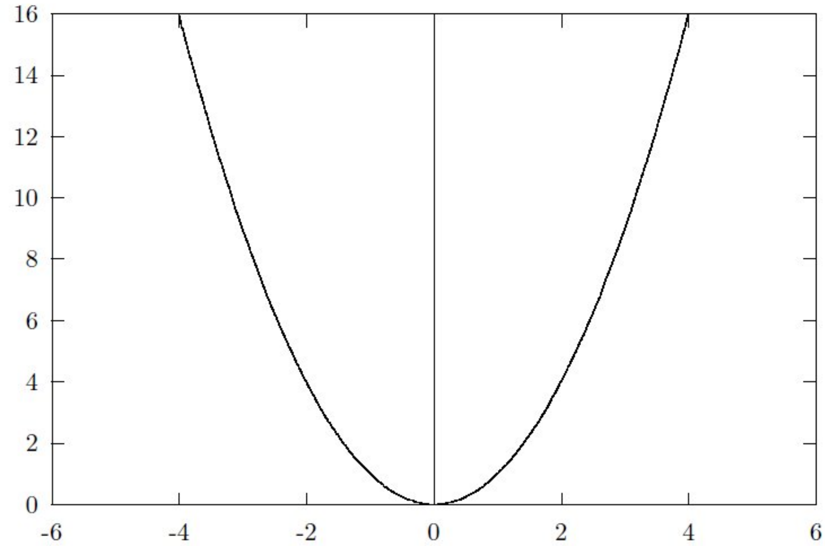


Figura 4.1: Gráfico de $f(x) = x^2$

Por lo tanto $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Los gráficos son las figuras (4.1) y (4.2)

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \quad x \geq 2$

$$\begin{aligned} f(x) = y &= \sqrt{x^2 - 4} \\ y^2 &= x^2 - 4 \\ y^2 + 4 &= x^2 \\ \sqrt{y^2 + 4} &= x \end{aligned} \tag{4.209}$$

Por lo tanto $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

Los gráficos son las figuras (4.3) y (4.4)

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

$$\begin{aligned} f(x) = y &= \sqrt[3]{x - 1} \\ y^3 &= x - 1 \end{aligned}$$

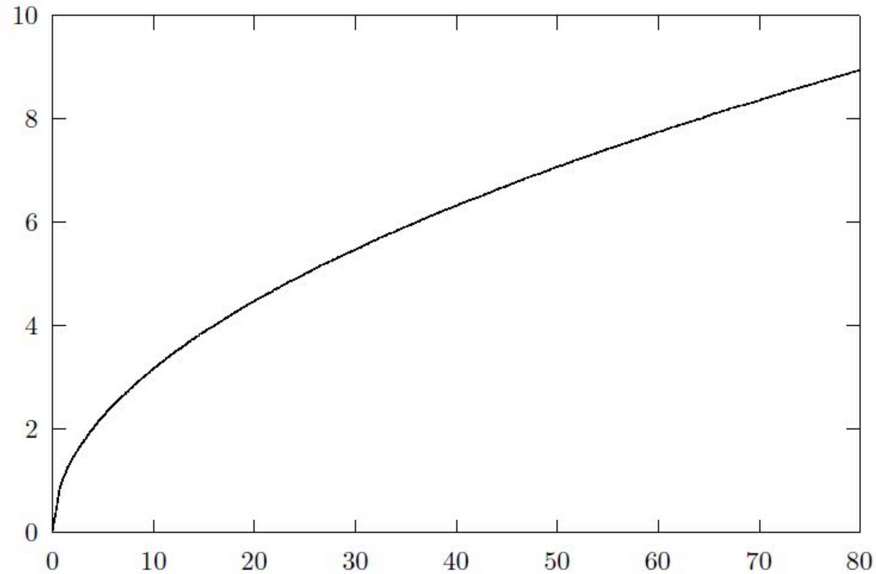


Figura 4.2: Gráfico de $f(x) = \sqrt{x} \quad x \geq 0$

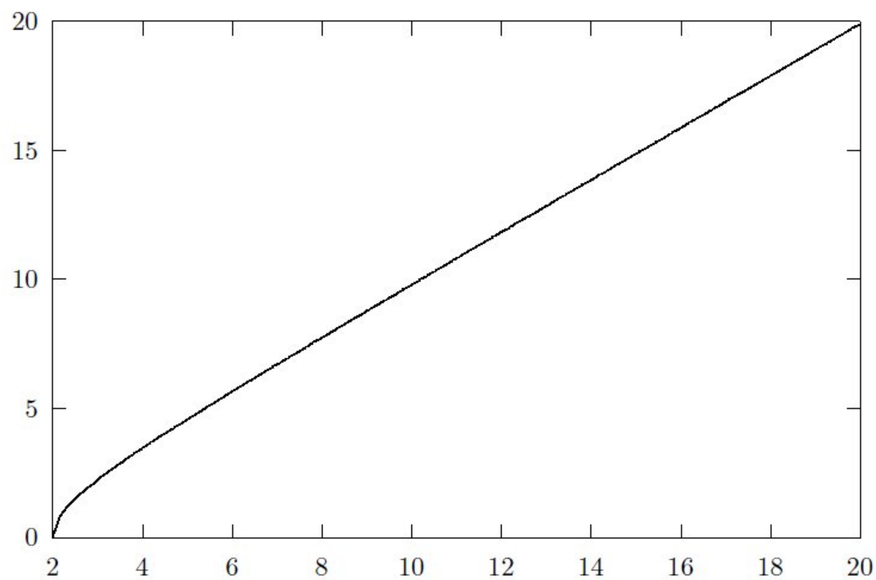


Figura 4.3: Gráfico de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \quad x \geq 2$

$$y^3 + 1 \quad = \quad x = f^{-1}(y) \tag{4.210}$$

El gráfico lo vemos en la figura (4.5).

8. $f(x) = \frac{1}{8}x - 3 \quad g(x) = x^3$ Debemos primero determinar $f^{-1}(x)$ y $g^{-1}(x)$.

   Calculemos $f^{-1}(x)$

$$\begin{aligned} f(x) = y &= \frac{1}{8}x - 3 \\ y + 3 &= \frac{1}{8}x \\ 8(y+3) &= x = f^{-1}(y) \end{aligned} \tag{4.211}$$

   Ahora calculemos $g^{-1}(x)$

$$\begin{aligned} g(x) = y &= x^3 \\ \sqrt[3]{y} &= y = g^{-1}(y) \end{aligned} \tag{4.212}$$

   (a) $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

$$f^{-1}(g^{-1})(x) = 8(\sqrt[3]{x} + 3) \tag{4.213}$$

   (b) $(f^{-1} \circ f^{-1})(t)$

$$f^{-1}(f^{-1})(t) = 8(8(x+3)+3) = 8(8x+27) \tag{4.214}$$

   (c) $(g^{-1} \circ f^{-1})(a)$

$$g^{-1}(f^{-1})(a) = \sqrt[3]{8(x+3)} = 2\sqrt[3]{x+3} \tag{4.215}$$

9. Econtrar las raíces de los siguientes polinomios

   (a) $p(x) = x^4 + x$ Como el polinomio es de grado 4 debemos encontrar 4 raíces. La primera raíz la obtenemos factorizando por x

$$x^4 + x = x(x^3+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \tag{4.216}$$

$$x_2 = -1 \tag{4.217}$$

   Ahora que tenemos dos raíces, dividiremos $x^3 + 1$ por $x + 1$ para obtener las demás raíces.

$$\begin{array}{rl} x^3+1 & : \quad x+1 \;=\; x^2-x+1 \\ -\underline{(x^3+x^2)} & \\ -x^2+1 & \\ -\underline{(-x^2-x)} & \\ x+1 & \\ -\underline{(x+1)} & \\ 0 & \end{array}$$

Por lo tanto debemos encontrar las raíces de x^2-x+1 Para esto usaremos la fórmula para resolver ecuaciones de segundo orden.

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{4.218}$$

Para nuestra ecuación $a = 1 \quad b = -1 \quad c = 1$. Por lo tanto obtenemos que

$$x_{3/4} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{4.219}$$

Por lo que las raíces son

$$x_1 = 0 \tag{4.220}$$
$$x_2 = -1 \tag{4.221}$$
$$x_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{4.222}$$
$$x_4 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{4.223}$$

(b) Usando el mismo procedimiento esta vez para $h(x) = x(4-x^2)$ obtenemos

$$x(4-x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \tag{4.224}$$
$$x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2 \quad x_3 = -2 \tag{4.225}$$

Por lo que obtuvimos las tres raíces.

(c) Como sabemos que $x_1 = 2$ es una raíz, para obtener las demás debemos dividir $f(x)$ por $x - 2$.

$$
\begin{array}{rcl}
x^3 - 6x^2 + 3x + 10 & : & x - 2 = x^2 - 4x - 5 \\
-\underline{(x^3 - 2x^2)} & & \\
-4x^2 + 3x + 10 & & \\
-\underline{(-4x^2 + 8x)} & & \\
-5x + 10 & & \\
-\underline{(-5x + 10)} & & \\
0 & &
\end{array}
$$

Para obtener las raíces usamos (4.218) y nos da

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = 2 \pm 3 \tag{4.226}$$

Por lo que las raíces serán

$$x_1 = 2 \tag{4.227}$$
$$x_2 = 2 + 3 = 5 \tag{4.228}$$
$$x_3 = 2 - 3 = -1 \tag{4.229}$$

10. Dividir $h(x)$ y $p(x)$ encontrando $q(x)$ y $r(x)$

(a) $h(x) = x^4 + 3x^3 + 3 \qquad p(x) = x^2 + 3x - 2$

$$
\begin{array}{rcl}
x^4 + 3x^3 + 3 & : & x^2 + 3x - 2 = x^2 + 2 = q(x) \\
-\underline{(x^4 + 3x^3 - 2x^2)} & & \\
2x^2 + 2 & & \\
-\underline{(2x^2 + 6x - 4)} & & \\
-6x + 6 = r(x) & &
\end{array}
$$

Por lo tanto hemos encontrado $q(x) = x^2 + 2$ y $r(x) = 6 - 6x$

(b) $h(x) = x^5 + 5x - 1 \qquad p(x) = x^3 + 2x - 3$

$$
\begin{array}{rcl}
x^5 + 5x - 1 & : & x^3 + 2x - 3 = x^2 - 2 = q(x) \\
-\underline{(x^5 + 2x^3 - 3x^2)} & & \\
-2x^3 + 3x^2 + 5x - 1 & &
\end{array}
$$

$$\begin{array}{r} -\underline{(-2x^3 - 2x + 6)} \\ 3x^2 + 7x - 7 = r(x) \end{array}$$

Por lo tanto hemos encontrado $q(x) = x^2 - 2$ y $r(x) = 3x^2 + 7x - 7$

(c) $h(x) = x^4 + 1 \qquad p(x) = x - 2$

$$\begin{array}{l} x^4 + 1 \quad : \quad x - 2 \quad = \quad x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = q(x) \\ -\underline{(x^4 - 2x^3)} \\ \quad 2x^3 + 1 \\ \quad -\underline{(2x^3 - 4x^2)} \\ \qquad 4x^2 + 1 \\ \qquad -\underline{(4x^2 - 8x)} \\ \qquad\quad 8x + 1 \\ \qquad\quad -\underline{(8x - 16)} \\ \qquad\qquad 17 = r(x) \end{array}$$

Por lo tanto hemos encontrado $q(x) = x^2 - 2$ y $r(x) = 3x^2 + 7x - 7$

(d) $h(x) = x^4 + 1 \qquad p(x) = x^2 + 2x + 2$

$$\begin{array}{l} x^4 + 1 \quad : \quad x^2 + 2x + 2 \quad = \quad x^2 - 2x + 4 = q(x) \\ -\underline{(x^4 + 2x^3 + 2x)} \\ \quad -2x^3 + 2x + 1 \\ \quad -\underline{(-2x^3 - 4x^2 - 2x)} \\ \qquad 4x^2 + 4x + 1 \\ \qquad -\underline{(4x^2 + 8x + 8)} \\ \qquad\quad -4x - 7 = r(x) \end{array}$$

Por lo tanto hemos encontrado $q(x) = x^2 - 2x + 4$ y $r(x) = -4x - 7$