Pauta

UNIVERSIDAD DE CHILE
Fac. de Ciencias Veterinarias y Pecuarias
7 de Mayo de 2009.

PRUEBA 1 - MAT I

Profesor: *Orlando Campos.* Ayudante: *Ignacio Trujillo.*

NOMBRE:..

1. Resolver para x:

$$2\binom{x}{5} = \binom{x}{4} + \binom{x}{6}$$

Solución:

$$2\binom{x}{5} = \binom{x}{4} + \binom{x}{6}$$

$$2\frac{x!}{5!(x-5)!} = \frac{x!}{4!(x-4)!} + \frac{x!}{6!(x-6)!}$$ **(5 puntos)**

$$2\frac{x!}{5!(x-5)!} = \frac{5\cdot 6\cdot x! + (x-4)(x-5)x!}{6!(x-4)!}$$

$$2\frac{x!}{5!(x-5)!} = \left(\frac{5\cdot 6 + (x-4)(x-5)}{6!(x-4)!}\right)x!$$

$$2\frac{1}{5!(x-5)!} = \left(\frac{5\cdot 6 + (x-4)(x-5)}{6!(x-4)!}\right)$$

$$2 = \left(\frac{5\cdot 6 + (x-4)(x-5)}{6!(x-4)!}\right)[5!(x-5)!]$$

$$2 = \left(\frac{5\cdot 6 + (x-4)(x-5)}{6(x-4)}\right)$$

$$12(x-4) = 30 + (x-4)(x-5) \qquad 1$$

$$12x - 48 = 30 + x^2 - 9x + 20$$

$$0 = x^2 - 21x + 98$$

$$0 = (x-7)(x-14)$$

Luego, las soluciones son dos $x_1 = 7 \vee x_2 = 14$ **(10 puntos)**

2. a) Calcular, para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, el valor de:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots\ldots + \binom{n}{n}$$

(INDICACION: Usar Binomio de Newton eligiendo convenientemente a^{n-k} y b^k)

b)Especule con lo que ocurre con el resultado de,

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots\ldots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

<u>Solución</u>:

Parte a)

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1)^k(1)^{n-k}$$

(7.5 puntos)

Por binomio de newton,

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=(1+1)^n = 2^n$$

Parte b)

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(1)^{n-k}$$

(7.5 puntos)

Por binomio de newton,

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=(-1+1)^n = 0$$

3. Considerar,

$$a_n = \begin{cases} 5(n+6) & , 1 \leq n \leq 27 \\ \sqrt{2n+2} - \sqrt{2n} & , 28 \leq n \leq 56 \\ 7(n+n^2) & , 57 \leq n \end{cases}$$

Calcular

$$\sum_{K=15}^{54} a_k$$

<u>Solución:</u>

$$\sum_{k=15}^{54} a_k \equiv \sum_{k=15}^{27} 5(k+6) + \sum_{k=28}^{54} \sqrt{2k+2} - \sqrt{2k}$$
$$\sum_{k=15}^{54} a_k \equiv \left[\sum_{k=1}^{27} 5(k+6) - \sum_{k=1}^{15} 5(k+6)\right] + \left[\sum_{k=28}^{54} \sqrt{2k+2} - \sqrt{2k}\right]$$
$$\sum_{k=15}^{54} a_k \equiv \left[5\sum_{k=1}^{27} k + 5\sum_{k=1}^{27} 6 - 5\sum_{k=1}^{15} k - 5\sum_{k=1}^{15} 6\right] + \left[\sum_{k=28}^{54} \sqrt{2k+2} - \sqrt{2k}\right]$$
$$\sum_{k=15}^{54} a_k \equiv \left[5\left(\frac{27 \cdot 28}{2}\right) + 5 \cdot 6 \cdot 27 - 5\left(\frac{15 \cdot 16}{2}\right) - 5 \cdot 6 \cdot 15\right] + \left[\sum_{k=28}^{54} \sqrt{2(k+1)} - \sqrt{2k}\right] \text{ (7.5 puntos)}$$
$$\sum_{k=15}^{54} a_k \equiv 1650 + \left[\left(\sqrt{2 \cdot (29)} - \sqrt{2 \cdot 28}\right) + \left(\sqrt{2 \cdot (30)} - \sqrt{2 \cdot 29}\right) + \ldots + \left(\sqrt{2 \cdot (55)} - \sqrt{2 \cdot 54}\right) + \right]$$

Como la anterior es una suma telescópica, se salvan solo un elemento del primer término y del último término.

$$\sum_{k=15}^{54} a_k \equiv 1650 + \left[\sqrt{2 \cdot (55)} - \sqrt{2 \cdot 28}\right]$$

(7.5 puntos)

$$\sum_{k=15}^{54} a_k \approx 1653$$

4. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Usando Gauss, resolver el sistema,

$$3AX - I_3X = B^tAX + C$$

Solución:

$$3AX - I_3X = B^tAX + C$$
$$(3A - I_3 - B^tA)X = C$$

$$3A = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B^tA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
$$3A - I_3 - B^tA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
$$3A - I_3 - B^tA = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(3A - I_3 - B^tA)X = C$$
$$X = (3A - I_3 - B^tA)^{-1}C$$ **(5 puntos)**

Entonces el objetivo es encontrar la inversa de la matriz anterior.

$$\left(\begin{matrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

Cambiar la F1 por la F2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A la F3 sumarle 2*F1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La F2 dividirla por -2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A la F1 restarle la F2 y a la F3 restale 2*F2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A la F2 sumarle 2*F3 y a la F1 restarle 2*F3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & -3 & -2 \\ \frac{3}{2} & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & -3 & -2 \\ \frac{3}{2} & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(3A - I_3 - B^t A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & -3 & -2 \\ \frac{3}{2} & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \left(3A - I_3 - B^t A\right)^{-1} C$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & -3 & -2 \\ \frac{3}{2} & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - 15 + 12 \\ \frac{3}{2} + 20 - 12 \\ 1 + 10 - 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ \frac{19}{2} \\ 5 \end{pmatrix}$$

(10 puntos)