$$a_n - a_{n-1} = d$$

$$a_n = a_{n-1} + d$$

$$a_n = (a_{n-2} + d) + d$$

$$a_n = a_{n-2} + 2d$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Esto no quiere decir que el término a_n sea la suma desde 1 hasta n, sino, dice que es el elemento a_n.

Ahora, si sumamos todos los elementos:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad = \sum_{i=1}^{n} (a_1 + (i-1)d)$$

$$S_n = na_1 + d\frac{n(n+1)}{2} - dn$$

$$S_n = na_1 + d\frac{n^2}{2} + d\frac{n}{2} - dn$$

$$S_n = na_1 + d\frac{n^2}{2} - d\frac{n}{2}$$

$$S_n = na_1 + d\frac{n(n-1)}{2}$$

$$S_n = n\left[a_1 + d\frac{(n-1)}{2}\right]$$

$$S_n = n\left[\frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\right]$$

Es decir si consideran el problema de la prueba, $n = 5$ y $S_{50} = 360.000$

$$360.000 = S_{50} = 50\left[\frac{2a_1 + d(50-1)}{2}\right] \quad (1)$$

Pero también sabemos que los últimos 10 son 120.000, lo que significa que la suma de los primeros términos de la PA es 240.000.

$$240.000 = S_{40} = 40\left[\frac{2a_1 + d(40-1)}{2}\right] \quad (2)$$

Basta resolver el sistema con la ecuación (1) y (2) y sale a_1

Lo que esta marcado en amarillo son las ecuaciones generales.