Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Veterinarias y Pecuarias
DU10-1 Métodos de Cuantificación 2009, Semestre Otoño
Ayudante Ignacio Trujillo Silva

Exponenciales y logaritmos:

La **función exponencial** (propiamente dicha) es una función matemática, que aparece además en muchas ecuaciones de la física.

Toda función exponencial tiene por dominio de definición el conjunto de los números reales. Además la función exponencial es la función inversa del logaritmo natural. Esta función se denota equivalentemente como:

$$x \to e^{x} \quad \text{o} \quad x \to \exp(x)$$

Donde "*e*" es la base de los logaritmos naturales, es decir;

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

En términos generales, una función real *F*(*x*) es de **tipo exponencial** si tiene la forma

$$f(x) = A\exp(kx) \quad \text{o} \quad f(x) = Ae^{kx}$$

Siendo A, k números reales y $e^1 = 2{,}71828...$

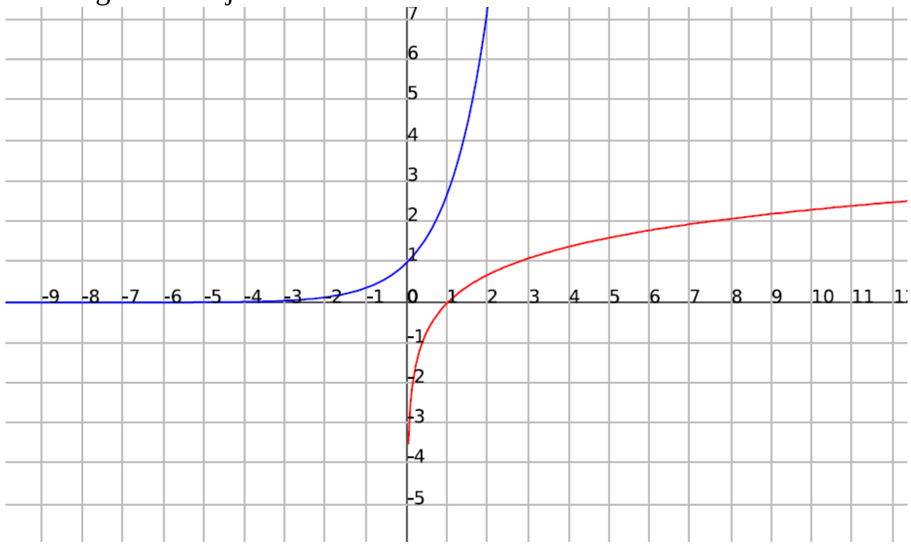
En la grafica siguiente la curva azul representa la función $\exp(x)$ y la roja representa a $\ln(x)$. Siendo la función exponencial la inversa del logaritmo natural, luego si,

$$f(x) = e^{x}$$
$$f^{-1}(x) = \ln(x)$$

$$f^{-1}(f(x)) = \ln(e^{x})$$
$$f^{-1}(f(x)) = x\ln(e^{1})$$
$$f^{-1}(f(x)) = x\underbrace{\ln(2{,}71828...)}_{=1}$$

Al ver la curva roja que representa al logaritmo natural, el $\ln(2{,}71828...) = 1$
Es relativamente claro, pues el logaritmo natural se define como $\ln(x) = \log_e(x)$, luego si quiero calcular $\ln(e) = \log_e(e) = 1$.

Entonces, $f^{-1}(f(x)) = x$



Los logaritmos mantienen ciertas identidades aritméticas muy útiles a la hora de realizar cálculos:

- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

- El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$$

- El logaritmo de una potencia es igual al producto entre el exponente y el logaritmo de la base de la potencia.

$$\ln(a^x) = x\ln(a)$$

- El logaritmo de una raíz es igual al producto entre la inversa del índice y el logaritmo del radicando.

$$\ln(\sqrt[x]{y}) = \frac{\ln(y)}{x}$$

Problemas:

1. Encuentre el valor de x para $1+2+4+8+\ldots+2^x=1025$.

Solución:

Reescribamos el problema,

$$2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^x=1023$$
$$\sum_{i=0}^{x}2^i=1023$$
$$\frac{1-2^{x+1}}{1-2}=1023$$
$$\frac{1-2^{x+1}}{-1}=1023$$
$$2^{x+1}-1=1023$$
$$2^{x+1}=1024$$

Apliquemos logaritmo natural a la ecuación.

$$2^{x+1}=1024$$
$$\ln(2^{x+1})=\ln(1024)$$
$$(x+1)\cdot\ln(2)=\ln(2^{10})$$
$$(x+1)\cdot\ln(2)=10\cdot\ln(2)$$
$$(x+1)=10$$
$$x=9$$

2. Encuentre el valor de x para la siguiente ecuación $e^x-5e^{-x}+4e^{-3x}=0$

Solución:

Multipliquemos por e^{3x}, para obtener solo elementos con denominador igual a 1.

$$e^x-5e^{-x}+4e^{-3x}=0$$
$$e^{4x}-5e^{2x}+4=0$$

Ahora, realicemos el siguiente cambio de variable.

$$e^{2x} = u$$

$$u^2 - 5u + 4 = 0$$
$$(u-1)(u-4) = 0$$
$$u_1 = 1$$
$$u_2 = 4$$

Devolvámonos, pues hicimos un cambio de variable

$$u_1 = 1 = e^{2x_1}$$
$$u_2 = 4 = e^{2x_2}$$

Primero,

$$1 = e^{2x_1}$$
$$\ln(1) = \ln(e^{2x_1})$$
$$0 = 2x_1 \ln(e)$$
$$0 = 2x_1$$
$$x_1 = 0$$

Segundo,

$$4 = e^{2x_2}$$
$$\ln(4) = \ln(e^{2x_2})$$
$$\ln(2^2) = 2x_2 \ln(e)$$
$$2\ln(2) = 2x_2$$
$$x_2 = \ln(2)$$

Finalmente tenemos dos soluciones $x_1 = 0$ ó $x_2 = \ln(2)$.

3. Es posible medir la concentración de alcohol en la sangre de una persona. Investigaciones médicas recientes sugieren que el riesgo R (dado como porcentaje) de tener un accidente automovilístico puede ser modelado mediante la ecuación:

$$R = 6e^{kx} \qquad (1)$$

donde x: es la concentración de alcohol en la sangre y k una constante.

a) Al suponer una concentración de 0.04 de alcohol en la sangre produce un riesgo del 10% ($R = 10$) de sufrir un accidente, ¿cuál es el valor de la constante?.

b) Utilice el valor de k e indique cuál es el riesgo para diferentes concentraciones de alcohol (0.17, 0.19, ...).

c) Con el mismo valor de k indique la concentración de alcohol correspondiente a un riesgo del 100%.

d) Si la ley establece que las personas con un riesgo del 20% o mayor de sufrir un accidente no deben conducir vehículos ¿con cuál concentración de alcohol en la sangre debe un conductor ser arrestado y multado?.

Solución.

a) Una concentración de4 0.04 y un riesgo del 10%, indica que $x = 0.04$ y $R = 10$. Al sustituir estos valores en la ecuación (1) se obtiene:

$$10 = 6e^{0.04k}$$

$$\frac{10}{6} = e^{0.04k}$$

$$\log_e \frac{10}{6} = 0.04k \qquad \text{(Definición del logaritmo)}$$

$$k = \frac{1}{0.04} \ln \frac{10}{6} = 12.77$$

Con el valor de k encontrado, la ecuación (1) se puede escribir en la forma:

$$R = 6e^{12.77x} \qquad (2)$$

b) Al sustituir $x = 0.17$ en la ecuación (2), se obtiene: $R = 6e^{12.77\times 0.17} = 52.6$

Este resultado indica que para una concentración de alcohol de 0.17, el riesgo de sufrir un accidente es del 52.6%.

c) Al sustituir $R = 100$ en la ecuación (2) y solucionando para x se obtiene:

$$
\begin{aligned}
100 &= 6e^{12.77x} \\
\frac{100}{6} &= e^{12.77x} \\
\log_e \frac{100}{6} &= 12.77x \quad \text{(Definición del logaritmo)} \\
x &= \frac{1}{12.77}\ln\frac{100}{6} = 0.22
\end{aligned}
$$

Lo que indica que para una concentración de alcohol de 0.22, el riesgo de sufrir un accidente es del 100%.

d) Con $R = 20$ en la ecuación (2), se determina la concentración x de alcohol en la sangre:

$$
\begin{aligned}
20 &= 6e^{12.77x} \\
\frac{20}{6} &= e^{12.77x} \\
x &= \frac{1}{12.77}\ln\frac{20}{6} = 0.094
\end{aligned}
$$

Este resultado indica que un conductor que presente una concentración de alcohol mayor o igual a 0.094 debe ser arrestado y multado.

4. Una colonia de bacterias crece de acuerdo con la ley de crecimiento no inhibido. Si la cantidad de bacterias se duplica en tres horas; cuánto tiempo tardará la colonia en triplicar su número?

Solución.

Recuerde inicialmente que el número N de células en un instante t es:

$$N(t) = N_0 e^{kt} \qquad (1)$$

donde N_0: es la cantidad inicial de bacterias presentes y k es una constante positiva.

La afirmación: la cantidad de bacterias se duplica en 3 horas, significa que: $N(3) = 2N_0$.

Pero de acuerdo a (1), $N(3) = N_0 e^{3k}$

Así que: $N(3) = 2N_0 = N_0 e^{3k}$

Luego, $e^{3k} = 2 \Leftrightarrow 3k = \ln 2$

De donde $k = \dfrac{1}{3}\ln 2 \approx 0.231$

Con dicho valor de k, la fórmula (1) se transforma en:

$$N(t) = N_0 e^{0.231t} \qquad (2)$$

Ahora, el tiempo t necesario para que el tamaño de la colonia se triplique necesita que $N = 3N_0$. Sustituyendo en (2) y resolviendo para t se obtiene:

$$3N_0 = N_0 e^{0.231t}$$

De donde, $t = \dfrac{1}{0.231}\ln 3 \approx 4.756$ horas. Se necesitan 4.756 horas para que el tamaño se triplique.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Veterinarias y Pecuarias
DU10-1 Métodos de Cuantificación 2009, Semestre Otoño
Ayudante Ignacio Trujillo Silva

1. Una crisis económica hace que los ingresos anuales de una compañía hayan descendido de \$742.000 en 1988 a \$632.000 en 1990. Si los ingresos siguen un comportamiento exponencial de decrecimiento, ¿Cuál sea su valor en 1991?

Solución:

Consideraremos t igual a cero, en el año 1988.
Luego, usaremos el modelo exponencial $y = ce^{kt}$, donde medimos a t en años. Por condición inicial C, sabemos que $c = 742.000$.
Luego, el año 1990 representa el año $(t = 1990 - 1988 = 2)$, pues hemos considerado a 1988 como $(t = 0)$. Siguiendo $y = 632.000$ cuando $(t = 2)$, luego tenemos

$$y = 632.000 = 742.000e^{2k}$$
$$0,85 = e^{2k} \, / \ln()$$
$$\ln(0,85) = 2k$$
$$k = \frac{\ln(0,85)}{2} = -0,08$$

Finalmente, en el año 1991 $(t = 1991 - 1988 = 3)$, podemos esperar que los ingresos de la compañía sean iguales a

$$y = 742.000e^{\cdot 3k} = 742.000e^{3 \cdot -0,08} \approx 583.678$$

Se debe tener claro que lo que se resuelve en este tipo de problemas son las ecuaciones diferenciales de la forma $y' = ky$.

2. Las ventas S (en miles de unidades) de un producto nuevo, después de estar en el mercado durante t años, vienen dadas por una función exponencial $S = ce^{\frac{k}{t}}$

a) Hallar S en función de t, si se han vendido 5000 unidades después de 1 año, y el punto de saturación el mercado es de 30000.
b) ¿Cuántas unidades se han vendido en 5 años?
c) Dibujar una grafica de esta función de ventas.

Solución:

a) Usaremos el modelo exponencial $s = ce^{k/t}$, donde medimos a t en años, por condición inicial se define C.

La saturación se puede interpretar como el $\lim_{t\to\infty} S = \lim_{t\to\infty} ce^{k/t}$, un análisis conveniente y bastante aceptado es buscar el máximo de la función ventas (S), el resultado de ese análisis es el limite descrito anteriormente.

$\lim_{t\to\infty} ce^{k/t} = c$, luego como la saturación es un dato $c = 30.000$.

También sabemos por enunciado que en el año 1 se han vendido 5000 unidades, que se traduce

$$\frac{1}{6} = e^{k/1}$$
$$-\ln(6) = k$$

Finalmente S, es igual a la función $S = 30000e^{-\ln(6)/t}$

b) En b) solo basta reemplazar $(t = 5)$, en la función ventas (s).

$$S(5) = 30000e^{-\ln(6)/5} \approx 20965$$

Se debe tener claro que este problema específico es resolver la ecuación diferencial de la forma $y' = -\frac{k}{t^2}y$.

3.

El estroncio -90 es un isótopo radiactivo peligroso. Debido a su semejanza con el calcio, es facilmente absorvido por los huesos del cuerpo humano. La vida media del estroncio-90 es de 28 años. Si los huesos absorven cierta cantidad, debido a la exposición a una explosión nuclear, ¿qué porcentaje permanecerá en ellos después de 50 años? [1]

Solución y Puntaje:

La función que describe la cantidad de materia en función del tiempo es

$$f(t) = K\exp(-kt), \qquad (1 \text{ punto})$$

medidos en alguna unidad de masa y t en años, K es la masa inicial.

Luego

$$f(50) = K\exp\left(\left(\frac{-ln(2)}{28}\right)50\right). \quad (1 \text{ punto})$$

Luego el porcentaje de Estroncio-90 que queda después de 50 años es:

$$\frac{K}{2} = f(28) = K\exp(-28k) \quad (1 \text{ punto})$$

$$\frac{1}{2} = \exp(-28k)$$

$$-ln(2) = -28k$$

$$k = \frac{ln(2)}{28}. \qquad (1,5 \text{ puntos})$$

Luego

$$f(50) = K\exp\left(\left(\frac{-ln(2)}{28}\right)50\right). \quad (1 \text{ punto})$$

Luego el porcentaje de Estroncio-90 que queda después de 50 años es:

$$100\exp\left(\left(\frac{-ln(2)}{28}\right)50\right)\% \approx 29\% \quad \square$$

$$(1,5 \text{ puntos})$$

4. Inicialmente se contaba con 600 gramos de carbono 14, cuanto tendrá en 20 años, si su vida media es igual a 5.730 años ? (Considere un comportamiento exponencial)

Propuesto!