Ejercicios Resueltos Derivadas

1. Pruebe que la función $f(x) = x^{1/3}$ es continua en $x = 0$ y no diferenciable en $x = 0$

2. Calcular la derivada de la función $f(x) = 3x(x^2 - \frac{2}{x})$ en $x = 2$

3. Encuentre la derivada de las siguientes funciones

   (a) $$f(x) = \sin(x) + \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x^2}$$

   (b) $$f(x) = \frac{x^2}{x - \sin(x)}$$

   (c) $$f(x) = \frac{1/x - 2/x^2}{2/x^3 - 3/x^4}$$

   (d) $$f(x) = \frac{2x^5 + 4x}{\cos(x)}$$

   (e) $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} + \tan(x) + \frac{1}{\tan(x)}$$

4. Encuentre las dos intersecciones con el eje X de la gráfica de $f(x) = x^2 - 3x + 2$ y probar que $f'(x) = 0$ en algún punto entre ellas.

5. Encuentre la ecuación de la tangente a la gráfica de f en el punto especificado

   (a) $$f(x) = x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{en} \quad (5, f(5))$$

   (b) $$f(x) = \sqrt{x^2 + 7} \quad \text{en} \quad (2, f(2))$$

6. Encuentre la primera y segunda derivada de las siguientes funciones

   (a) $f(x) = \sqrt[3]{3x^3 + 4x}$
   (b) $f(x) = \cos(28x)$
   (c) $f(x) = x^2\sqrt{9 - x^2}$
   (d) $f(x) = 2\sin(x) + \frac{1}{\sqrt{x}}$
   (e) $f(x) = 2(x^2 - 1)^5$
   (f) $f(x) = \frac{1}{(x^3 - 3x)^2}$

7. Dada f encuentre f' para

   (a) $f(x) = \tan(10x) + \sin^3(x)$
   (b) $f(x) = \arcsin(x) + \frac{1}{\sec^2(x)} + \sqrt[4]{x^3 + 5x}$
   (c) $f(x) = \arccos(5x) + \tan^2(4x) + \frac{cos^5(8x)}{x^2}$

Solución:

1. Probar que $f(x) = x^{1/3}$ es continua en $x = 0$ y no diferenciable en ese punto.

   Para ver si una función es continua en un punto x_0 se deben verificar tres condiciones

   (a) $f(x_0)$ está definido

   (b) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe

   (c) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

   Veamos esto para $f(x) = x^{1/3}$

   Primero $f(x_0) = f(0)$ por lo tanto está definido.

   Veamos si existe el límite

   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^{1/3}$$

   Por lo tanto el límite existe

   Calculemos este límite y veamos si es igual a $f(x_0)$

   $$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to 0} x^{1/3} \\ &= 0^{1/3} \\ &= 0 = f(0) \end{aligned}$$

   Por lo tanto $f(x)$ es continua en $x_0 = 0$

   Ahora probemos que $f(x)$ es no diferenciable en $x = 0$. Para ello usaremos la siguiente definición de derivada.

   $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{4.322}$$

Por lo tanto para nuestra función $f(x) = x^{1/3}$ y el punto $x_0 = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^{1/3}-0}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}} \\ &= \infty \end{aligned} \tag{4.323}$$

Por lo tanto la tangente en x_0 es vertical, por lo que f no es derivable en $x_0 = 0$

2. Calcular $f'(x)$ par $f(x) = 3x(x^2 - \frac{2}{x})$ en $x = 2$ Hay dos maneras de calcular esta derivada, una es a través del cálculo directo y otra por medio de la definición de límite.

   Para ello primero calculemos $f(2)$

$$f(2) = 3 \cdot 2(2^2 - \frac{2}{2}) = 6 \cdot (4-1) = 18 \tag{4.324}$$

   Ahora calculemos $f'(2)$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{3x(x^2-\frac{2}{x})-18}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{3x^3-6-18}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{3x^3-24}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{3(x^3-8)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{3(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} 3(x^2+2x+4) \\ &= 3(2^2+2\cdot 2+4) \\ &= 3(4+4+4) \\ &= 36 \end{aligned} \tag{4.325}$$

Otra forma de calcular esto es calculando la derivada de $f(x)$ y luego evaluarla en $x = 2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x(x^2 - \frac{2}{x}))' \\ &= 3(x^2 - \frac{2}{x}) + 3x(2x + \frac{2}{x^2}) \end{aligned}$$

Ahora evaluando en $x = 2$

$$\begin{aligned} f'(2) &= 3(2^2 - \frac{2}{2}) + 3 \cdot 2(2 \cdot 2 + \frac{2}{2^2}) \\ &= 3(4-1) + 6(4 + \frac{1}{2}) \\ &= 9 + 6 \cdot \frac{9}{2} \\ &= 9 + 27 \\ &= 36 \end{aligned} \tag{4.326}$$

3. Calcular la derivada de $f(x)$

(a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sin(x) + \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x^2}\right)' \\ &= \cos(x) - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{x^3}\right) \\ &= \cos(x) - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3x^3} \end{aligned} \tag{4.327}$$

(b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2}{x - \sin(x)}\right)' \\ &= \frac{2x(x - \sin(x)) - x^2(1 - \cos(x))}{(x - \sin(x))^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2x\sin(x) - x^2 + x^2\cos(x)}{(x - \sin(x))^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x\sin(x) + x^2\cos(x)}{(x - \sin(x))^2} \end{aligned} \tag{4.328}$$

(c) Primero simplifiquemos $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1/x - 2/x^2}{2/x^3 - 3/x^4} \\ &= \frac{\frac{x-2}{x^2}}{\frac{2x-3}{x^4}} \\ &= \frac{x^3 - 2x^2}{2x-3} \end{aligned} \tag{4.329}$$

Ahora calculemos $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 - 2x)(2x-3) - (x^3 - 2x^2)(2)}{(2x-3)^2} \\ &= \frac{6x^3 - 9x^2 - 4x^2 + 6x - 2x^3 + 4x^2}{(2x-3)^2} \\ &= \frac{4x^3 - 9x^2 + 6x}{(2x-3)^2} \end{aligned} \tag{4.330}$$

(d)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x^5 + 4x}{\cos(x)}\right)' \\ &= \frac{(3x^5 + 4x)'(\cos(x)) - (3x^5 + 4x)(\cos(x))'}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{(15x^4 + 4)\cos(x) + (3x^5 + 4x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \end{aligned} \tag{4.331}$$

(e)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} + \tan(x) + \frac{1}{\tan(x)}\right)' \\ &= x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + \tan(x) + \tan^{-1}(x) \\ &= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{1}{\sin^2(x)} \\ &= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \sec^2(x) - \csc^2(x) \end{aligned} \tag{4.332}$$

4. Encontrar las intersecciones de $f(x)$ con el eje X. Para ello igualamos a cero $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 - 3x + 2 &= 0 \\ (x-1)(x-2) &= 0 \\ x = 1 \quad \wedge & \quad x = 2 \end{aligned}$$

Como $f(1) = f(2) = 0$, por el *Teorema de Rolle* se sabe que en el intervalo $(1,2)$ existe $f'(x) = 0$. Encontremos ese punto

$$\begin{aligned} f'(x) = 2x - 3 & \\ f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 3 &= 0 \\ 2x &= 3 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned} \tag{4.333}$$

5. Encontrar la ecuación de la tangente a la gráfica de f en el punto dado

Para resolver este problema primero debemos saber como es la ecuación de una recta tangente, esto es

$$y - y_0 = m(x - x_0) \tag{4.334}$$

Debemos encontrar la pendiente m, que es la derivada de la función f en el punto dado

$$m = f'(x_0) \tag{4.335}$$

(a) $$f(x) = x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{4.336}$$

Calculemos $f(5)$

$$f(5) = 5^3 + \frac{1}{\sqrt{5}} = 125 + \frac{1}{\sqrt{5}} = 125.447 \tag{4.337}$$

Ahora calculemos $f'(5)$

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{2x^{3/2}} \tag{4.338}$$

$$f'(5) = 3 \cdot 5^2 - \frac{1}{2 \cdot 5^{3/2}}$$

$$f'(5) = 75 - \frac{1}{2 \cdot 5^{3/2}}$$

$$f'(5) = 69.4 \tag{4.339}$$

Por lo tanto la ecuación de la recta tangente en $(5, f(5))$ es

$$y = m(x - x_0) - f(x_0)$$

$$y = f'(5)(x-5) - f(5)$$

$$y = 69.4(x-5) - 125.447 \tag{4.340}$$

(b) $$f(x) = \sqrt{x^2+7} \tag{4.341}$$

Calculemos $f(2)$

$$f(2) = \sqrt{2^2+7} = \sqrt{4+7} = \sqrt{11} \tag{4.342}$$

Ahora calculemos $f'(2)$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+7}} \tag{4.343}$$

$$f'(2) = \frac{2}{\sqrt{2^2+7}}$$

$$f'(2) = \frac{2}{\sqrt{11}}$$

$$f'(2) = 0.603 \tag{4.344}$$

Entonces la ecuación de la recta tangente será en el punto $(2, f(2))$

$$y = \frac{2}{\sqrt{11}}(x-2) - \sqrt{11}$$

$$y = 0.603(x-2) - 3.31$$

$$y = 0.602x - 4.522 \tag{4.345}$$

6. Encontrar f' y f''

(a) Primero calculemos $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((3x^3+4x)^{1/3}\right)' \\ &= \frac{1}{3}(3x^3+4x)^{-2/3}(9x^2+4) \\ &= \frac{9x^2+4}{3(3x^3+4x)^{2/3}} \end{aligned} \tag{4.346}$$

Calculemos ahora $f''(x)$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{18x(3x^3+4x)^{2/3}-(9x^2+4)^2\frac{2}{3}(3x^3+4x)^{-1/3}}{3((3x^3+4x)^{2/3})^2} \\ &= \frac{18x(3x^3+4x)^{2/3}-\frac{2}{3}(9x^2+4)^2(3x^3+4x)^{-1/3}}{3(3x^3+4x)^{4/3}} \\ &= \frac{18x}{3(3x^3+4x)^{2/3}}-\frac{2(9x^2+4)^2}{9(3x^3+4x)^{5/3}} \\ &= \frac{6x}{(3x^3+4x)^{2/3}}-\frac{2(9x^2+4)^2}{9(3x^3+4x)^{5/3}} \end{aligned} \tag{4.347}$$

(b) Calculemos $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(28x)\cdot 28 \\ &= -28\sin(28x) \end{aligned} \tag{4.348}$$

Calculemos $f''(x)$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -28\cos(28x)\cdot 28 \\ &= -28^2\cos(28x) \end{aligned} \tag{4.349}$$

(c) Calculemos $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\sqrt{9-x^2}-x^2\frac{2x}{2\sqrt{9-x^2}} \\ &= 2x\sqrt{9-x^2}-\frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}} \end{aligned} \tag{4.350}$$

Calculemos $f''(x)$

$$f''(x) = 2\sqrt{9-x^2}+\frac{-(2x)^2}{2\sqrt{9-x^2}}-\frac{3x^2\sqrt{9-x^2}+x^3\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\sqrt{9-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{3x^2\sqrt{9-x^2} + \frac{x^4}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} \\
&= 2\sqrt{9-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{\frac{3x^2(9-x^2)+x^4}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} \\
&= 2\sqrt{9-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{27x^2 - 3x^4 + x^4}{(9-x^2)^{3/2}} \\
&= 2\sqrt{9-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{27x^2 - 2x^4}{(9-x^2)^{3/2}} \qquad (4.351)
\end{aligned}$$

(d) Calculemos $f'(x)$

$$f'(x) = 2\cos(x) - \frac{1}{2x^{3/2}} \qquad (4.352)$$

Calculemos $f''(x)$

$$f''(x) = -2\sin(x) + \frac{3}{4x^{5/2}} \qquad (4.353)$$

(e) Calculemos $f'(x)$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 10(x^2-1)^4 \cdot (2x) \\
f'(x) &= 20x(x^2-1)^4 \qquad (4.354)
\end{aligned}$$

Calculemos $f''(x)$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 80x(x^2-1)^3 \cdot (2x) \\
f''(x) &= 160x^2(x^2-1)^3 \qquad (4.355)
\end{aligned}$$

(f) Calculemos $f'(x)$

$$f(x) = (x^3-3x)^{-2}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \quad 2(x^3 \quad 3x)^{-3}(3x^2 \quad 3) \\
f'(x) &= -\frac{6x^2-6}{(x^3-3x)^3} \qquad (4.356)
\end{aligned}$$

Calculemos $f''(x)$

$$f''(x) = -\frac{12x(x^3-3x)^3 - 3(x^3-3x)^2 2(3x^2-3)^2}{(x^3-3x)^6}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{12x(x^3-3x)^3 - 6(3x^2-3)^2(x^3-3x)}{(x^3-3x)^6} \\ f''(x) &= -\frac{12x(x^3-3x)^2 - 6(3x^2-3)}{(x^3-3x)^5} \end{aligned} \tag{4.357}$$

7. Calcular $f'(x)$

(a)
$$f'(x) = 10\sec^2(10x) + 3\sin^2(x)\cos(x) \tag{4.358}$$

(b)
$$f(x) = \arcsin(x) + \frac{1}{\sec^2(x)} + \sqrt[4]{x^3+5x} \tag{4.359}$$

Sea $h(x) = \arcsin(x)$, $g(x) = \frac{1}{\sec^2(x)}$, $i(x) = \sqrt[4]{x^3+5x}$, calculemos $h'(x), g'(x), i'(x)$

Calculemos $g'(x)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(1)'\sec^2(x) - 1(\sec^2(x))'}{\sec^4(x)} \\ &= \frac{-2\sec(x)\sec(x)\tan(x)}{\sec^4(x)} \\ &= -\frac{2\tan(x)}{\sec^2(x)} \end{aligned} \tag{4.360}$$

Calculemos $h'(x)$

Sea $j(x) = \sin(x)$ y $h(x) = \arcsin(x)$ entonces

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{j'\big(h(x)\big)} \\ h'(x) &= \frac{1}{\cos(arcsin(x))} \\ h'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned} \tag{4.361}$$

Calculemos $i'(x)$

$$\begin{aligned} i'(x) &= \frac{1}{4}(x^3-5x)^{-3/4}(3x^2-5) \\ &= \frac{3x^2-5}{4(x^3-5x)^{3/4}} \end{aligned} \tag{4.362}$$

Ahora calculemos $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{2\tan(x)}{\sec(x)} + \frac{3x^2-5}{4(x^3-5x)^{3/4}} \tag{4.363}$$

(c)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-5}{\sqrt{1-25x^2}} + 8\tan(4x)\sec^2(4x) + \\
&\quad + \frac{5\cos^4(8x)(-\sin(8x)8)x^2 - \cos^5(8x)\cdot 2x}{x^4} \\
&= \frac{-5}{\sqrt{1-25x^2}} + 8\tan(4x)\sec^2(4x) + \\
&\quad + \frac{-40x^2\cos^4(8x)\sin(8x) - 2x\cos^5(8x)}{x^4} \\
&= \frac{-5}{\sqrt{1-25x^2}} + 8\tan(4x)\sec^2(4x) + \\
&\quad + \frac{-40x\cos^4(8x)\sin(8x) - 2\cos^5(8x)}{x^3} \qquad (4.364)
\end{aligned}$$

<u>Propuestos:</u>

1.- Determine para cada una de las siguientes funciones, mediante la definición de derivada, $f'(x)$. Compruebe su resultado usando técnicas de derivación.

a) $f(x)=\sqrt{2x+1}$ b) $f(x)=x^2+3x+5$ c) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

2.- Obtenga $f'(x)$ para las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt[3]{x}}$

b) $f(x)=3\cos x+2\operatorname{sen}x$ Resp.: $-3\operatorname{sen}x+2\cos x$

c) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\operatorname{sen}x-\cos x}$

d) $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{16}{x}$ Resp: $-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{16}{x^2}$

e) $f(x)=\dfrac{(1-\sqrt{x})^2}{x}$ Resp.: $\frac{2\sqrt{x}+x\sqrt{x}-2x-1}{x^2}$

f) $f(x)=\dfrac{e^x\cdot\cos x}{1-\operatorname{sen}x}$

g) $f(x)=2e^x+\ln x$ Resp.: $2e^x+\frac{1}{x}$

h) $f(x)=e^x(\cos x+\operatorname{sen}x)$

i) $f(x)=\dfrac{e^x+\operatorname{sen}x}{xe^x}$

j) $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ Resp.: $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$

k) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ Resp.: $-\frac{2}{(x-1)^2}$

l) $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^2+1}$ Resp.: $\frac{3x^2+1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^2+1}}$

m) $f(x)=(t^2-1)\cdot(\sqrt{x^3+5})^{\frac{5}{2}}$

n) $f(x)=x^2\cdot(x-1)^{12}\cdot(x+2)^3$

o) $f(x)=\dfrac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/2}x-\dfrac{2}{7}\operatorname{sen}^{7/2}x$ Resp.: $(\operatorname{sen}x)^{\frac{1}{2}}\cdot\cos x$

p) $f(x)=2\cos ec^2(\sqrt{x})$

3.- a) Sean f, h funciones diferenciables en IR.

Si $f(x) = h(x^2) - (h(x))^2 - 3x$, $h'(1) = 2$, $h(1) = 3$. Calcule $f'(1)$.

Resp: **-11**

b) Sean f, h funciones diferenciables en IR.

Si $f(x) = h(h(2x)) + (h(x^3))^3$ $h'(0) = h(0) = 1$, $h'(1) = 2$. Calcule $f'(0)$.

Resp: **4**

4.

Encuentre los puntos críticos de f si los hay. Encuentre los intervalos abiertos donde f es creciente o decreciente.

(a) $f(x) = (x-1)^{2/3}$

(b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$

(c) $f(x) = x^4 - 2x^3$

(d) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

5.

La concentración C de cierto producto químico en la sangre, t horas después de ser inyectado en el tejido muscular viene dado por

$$C(t) = \frac{3t}{27 + t^3}$$

¿Cuándo es máxima la concentración?

6.

Al nacer un bebé perderá peso normalmente durante unos pocos días y después comenzará a ganarlo. Un modelo para el peso medio W de los bebés durante las 2 primeras semanas de vida es $P(t) = 0.015t^2 - 0.18t + 3.3$. Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de P

7.

Calcular las dimensiones del mayor rectángulo inscrito en un círculo de radio r

8.

Una página rectangular ha de contener $96[cm^2]$ de texto. Los márgenes superior e inferior tienen $3[cm]$ de ancho y los laterales $2[cm]$ ¿Qué dimensiones de la página minimizarán la cantidad de papel requerida?

9.

Dada $f(x) = 2x^{5/3} - 5x^{4/3}$. Calcule $f'(x)$ y $f''(x)$. Encuentre si los hay puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos. Intersecciones de $f(x)$ con los ejes coordenados. Dibuje.

10.

Solucione el problema anterior para

(a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ $\quad f'(x) = \dfrac{2}{(x^2+2)^{3/2}}$

$f''(x) = \dfrac{-6x}{(x^2+2)^{5/2}}$

(b) $f(x) = \dfrac{2(x^2+9)}{\sqrt{x^2-4}}$ $\quad f'(x) = \dfrac{20x}{(x^2-4)^2}$

$f''(x) = \dfrac{-20(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$

11.

Haga una análisis de la gráfica de

(a) $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$

(b) $f(x) = x^4 - 4x^3$