Universidad de Chile 1 de junio de 2009
Facultad de Ciencias Veterinarias y Pecuarias
<u>Métodos de Cuantificación</u>

Guía de Ejercicios resueltos

Ignacio Trujillo Silva

<u>Nota importante</u>: Las trigonométricas al parecer no entran.

<u>Limites que tienen al infinito</u>: Normalmente estos límites dan como resultado infinito en el numerador e infinito en el denominador, es decir, infinito partido infinito.

Cuando tengo una constante partido por infinito, se considera cero:

Ejemplo:

$\lim_{x\to\infty} \frac{5}{x} = 0$ ó $\lim_{x\to\infty} \frac{20}{x^2} = 0$

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{2x^2+3} = \frac{\infty}{\infty}$$

Una técnica bastante simple y práctica para resolver este tipo de límites, es multiplicar por uno, es decir, multiplicar en el numerador y el denominador por uno dividido por el elemento de mayor grado.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{2x^2+3} \cdot \frac{1/_{x^2}}{1/_{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{2x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{3}{x^2}}$$

Como vimos en un comienzo los límites de la forma constante partido por infinito son iguales a cero.

Luego,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{2x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 + 2x^2 + 1}{x^3 + 3} = \frac{\infty}{\infty}$$

Multiplicando por uno partido por el polinomio de mayor grado.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 + 2x^2 + 1}{x^3 + 3} \cdot \frac{1/_{x^3}}{1/_{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^3}{x^3} + \frac{2x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{3}{x^3}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 + 2x^2 + 1}{x^3 + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{5 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{3}{x^3}}$$

Como vimos en un comienzo los límites de la forma constante partido por infinito son iguales a cero.

Luego,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 + 2x^2 + 1}{x^3 + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{5 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{3}{x^3}} = \frac{5}{1} = 5$$

Limites Varios:

1. Calcular los siguientes límites

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{3}{x+2} &= \frac{3}{-1+2}\\ &= \frac{3}{1}\\ &= 3 \end{aligned} \tag{4.270}$$

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-(x+1)}{x+1}}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(x+1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{x+1}\\ &= \frac{-1}{0+1}\\ &= -1 \end{aligned} \tag{4.271}$$

(c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}|x-2| &= |2-2|\\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.272}$$

(d)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} &= \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{3+1}+2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4}+2} \\
&= \frac{1}{2+2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
\tag{4.273}
$$

(e)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2+5x+3} &= \sqrt{2^2+5\cdot 2+3} \\
&= \sqrt{4+10+3} \\
&= \sqrt{17}
\end{aligned}
\tag{4.274}
$$

(f)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}\cdot\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2+x-2}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}
\tag{4.275}
$$

(g)

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(1+3h+3h^2+h^3)-1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(3+h+h^2)}{h}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} 3+h+h^2 \\
&= 3 \qquad (4.276)
\end{aligned}
$$

(h)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 4^-}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} &= \lim_{x\to 4^-}\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
&= \lim_{x\to 4^-}\frac{1}{\sqrt{x}+2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4}+2} \\
&= \frac{1}{4} \qquad (4.277)
\end{aligned}
$$

(i)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+2}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1} \\
&= \frac{1+2}{1+1} \\
&= \frac{3}{2} \qquad (4.278)
\end{aligned}
$$

(j)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+4}-\frac{1}{4}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{4-(x+4)}{4(x+4)}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-x}{4x(x+4)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{4(x+4)} \\
&= \frac{-1}{4(0+4)} \\
&= -\frac{1}{16} \qquad (4.279)
\end{aligned}
$$

(k) $$\lim_{x\to a}\frac{1}{x}=\frac{1}{a} \quad \text{si } a\neq 0 \qquad (4.280)$$

2. Calcular los siguientes límites (si existen)

   (a) $$\lim_{x \to 2} f(x)$$

   para

   $$f(x) = \begin{cases} 3 & x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

   (b) $$\lim_{x \to 3} g(x)$$

   para

   $$g(x) = \begin{cases} x - 2 & x \leq 3 \\ -x^2 + 8x - 14 & x > 3 \end{cases}$$

Solución:

2. (a) Para este ejercicio debemos ver los límites por la izquierda y derecha de $f(x)$. Primero calculemos el límite por la derecha

   $$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3 \qquad (4.281)$$

   Ahora, calculemos el límite por la izquierda, esto es

   $$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0 \qquad (4.282)$$

   Como los límites no son iguales por la derecha como por la izquierda, concluímos que el límite de$f(x)$ **no existe**

   (b) Debemos seguir los mismos pasos que en el ejercicio anterior.

   $$\lim_{x \to 3^+} g(x) = 3 - 2 = 1 \qquad (4.283)$$

   $$\lim_{x \to 3^-} g(x) = -(3^2) + 8 \cdot 3 - 14 = 1 \qquad (4.284)$$

   Como ambos límites son iguales entonces el límite existe y es igual a

   $$\lim_{x \to 3} g(x) = 1 \qquad (4.285)$$

5. Calcule

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(a) $f(x)=x^2+5x+3$

(b) $f(x)=\sqrt{x}$

Calcular

(a)

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+5(x+h)+3-(x^2+5x+3)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2+5x+5h+3-x^2-5x-3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2+5h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} 2x+5+h\\
&= 2x+5
\end{aligned} \tag{4.288}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned} \tag{4.289}$$

7. Ud. sabe que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

Pruebe que

(a) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$$ (b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{x}=3$$

Probar

(a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x(1+\cos(x))}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x(1+\cos(x))}\\
&= \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\\
&= \frac{0}{1+1}\\
&= 0
\end{aligned}\tag{4.291}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin(3x)}{3}}_{\to 1}\cdot\frac{3}{\cos(3x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{3}{\cos(3x)}\\
&= \frac{3}{1}\\
&= 3
\end{aligned}\tag{4.292}$$

8. Calcular los siguientes límites

(a)	$\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\frac{2x^2+1}{2x}}$	(e)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2}$
(b)	$\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{x^2-9}$	(f)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\left(\frac{x}{3}\right)$
(c)	$\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{5x+1}{x^2-8}\right)$	(g)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$
(d)	$\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x}{\sin(\sqrt{x})}$	(h)	$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$

(i)	$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	(k)	$\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2-x}{\sqrt{4-4x+x^2}}$
(j)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x\cos(3x)}$	(l)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$

Calcular

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{2x^2+1}{2x}} &= \sqrt{\frac{2\cdot 2^2+1}{2\cdot 2}}\\ &= \sqrt{\frac{8+1}{4}}\\ &= \sqrt{\frac{9}{4}}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned} \tag{4.293}$$

(b) $$\lim_{x\to 3^-}\sqrt{x^2-9} \tag{4.294}$$

Como x^2 si $x\to 3^-$ tiende a un número menor que 9, entonces x^2-9 será menor que 0 cuando $x\to 3^-$. Por lo tanto el límite no existe, al no existir las raíces de un número negativo.

(c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{5x+1}{x^2-8} &= \frac{5\cdot 3+1}{3^2-8}\\ &= \frac{15+1}{9-8}\\ &= 16\end{aligned} \tag{4.295}$$

(d)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin(\sqrt{x})} &= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1}{\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}}_{\to 1} \sqrt{x} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.296}$$

(e)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1} \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{4.297}$$

(f)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{x}{3}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\frac{x}{3})}{3\frac{x}{3}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{3} \underbrace{\frac{\sin(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}}}_{\to 1} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{4.298}$$

(g)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} \\ &= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin^2(x)}{x^2}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{1+\cos(x)} \\ &= \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{4.299}$$

(h)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}} \\ &= 1 \qquad (4.300)\end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) &= \underbrace{\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}}_{\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{0}} \\ &= \infty \qquad (4.301)\end{aligned}$$

(j)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x\cos(3x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{2}{\cos(3x)} \\ &= \frac{2}{\cos(0)} \\ &= 2 \qquad (4.302)\end{aligned}$$

(k)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+} \frac{2-x}{\sqrt{4-4x+x^2}} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2}} \\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{2-x}{2-x} \\ &= \lim_{x\to 2^+} 1 \\ &= 1 \qquad (4.303)\end{aligned}$$

(l)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} &= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin(3x)}{3x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{2x}{\sin(2x)}}_{\to 1} \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2} \qquad (4.304)\end{aligned}$$

9. Discuta la continuidad de la función compuesta $h(x) = f(g(x))$ para

   (a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad g(x) = x - 1$

   (b) $f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \frac{1}{x-1}$

   (c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad g(x) = \frac{1}{x}$

Ver discontinuidad de $h(x) = f(g(x))$

(a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad g(x) = x - 1$

Entonces

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \tag{4.305}$$

La función $h(x)$ es discontinua cuando el denominador es cero, o sea, cuando $x = 1$. Además no se puede calcular una raíz de un número negativo. Por lo tanto esta función es **continua** para todos los $\boxed{x > 1}$

(b) $f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \frac{1}{x-1}$

Entonces

$$h(x) = \frac{1}{\frac{1}{x-1}} = x - 1 \tag{4.306}$$

Esta función es **continua** para todos los $\boxed{x \in \mathbf{R}}$

(c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad g(x) = \frac{1}{x}$

Entonces

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}}} = \sqrt{x} \tag{4.307}$$

Esta función es **continua** para todos los $\boxed{x \geq 0}$

10. Encuentre las discontinuidades de las funciones dadas. Si son evitables, encuentre una función $\bar{f}$ tal que $dom(f) = dom(\bar{f})$ y $\bar{f}$ sea continua en esos puntos.

(a) $$f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-2}$$

(b) $$f(x) = \frac{|x+2|}{x+2}$$

(c) $$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

(d) $$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}+1 & x \leq 2 \\ 3-x & x > 2 \end{cases}$$

(a) $$f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-2} = \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} \tag{4.308}$$

Esta función es discontinua en $x = -2$ y en $x = 1$.

Para ver si las discontinuidades son reparables debemos ver si el límite por la derecha y por la izquierda de cada discontinuidad es igual. Si lo son, entonces la discontinuidad es reparable.

Primero veamos para $x = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{1}{1+2} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{4.309}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{1}{1+2} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{4.310}$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{3} \tag{4.311}$$

Ahora veamos para $x = -2$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2^+} \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} &= \lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x+2} \\
&= \frac{1}{-2^+ + 2} \\
&= \infty
\end{aligned} \tag{4.312}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x+2} \\
&= \frac{1}{-2^- + 2} \\
&= -\infty
\end{aligned} \tag{4.313}$$

Por lo tanto como los dos límites son diferentes, no existe el límite, y no podemos reparar la discontinuidad.
Definamos la nueva función $\bar{f}$ como

$$\bar{f} = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2+x-2} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si} \quad x = 1 \end{cases} \tag{4.314}$$

(b) $$f(x) = \frac{|x+2|}{x+2} \tag{4.315}$$

Esta función tiene una discontinuidad no evitable en $x = -2$

(c) $$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \tag{4.316}$$

Esta función es continua para todos los $x \in \mathbf{R}$

(d) $$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}+1 & x \leq 2 \\ 3-x & x > 2 \end{cases} \tag{4.317}$$

Calculemos el límite cuando $x \to 2$ de f
Para ello calculemos primero el límite por la izquierda

$$\lim_{x\to 2^-} f = \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{2} + 1 = 2 \tag{4.318}$$

Ahora calculemos el límite por la derecha

$$\lim_{x\to 2^+} f = \lim_{x\to 2^+} (3-x) = 1 \tag{4.319}$$

Como ambos límites son distintos, entonces se trata de una discontinuidad no evitable.

11. Dar un ejemplo de una función f que no sea continua en ningún punto pero tal que $|f|$ sea continua en todos los puntos.

Una función que sea discontinua en todos los puntos y que su módulo sea continuo, podría ser

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases} \tag{4.320}$$

Si a esta función le calculamos el módulo obtenemos la siguiente función

$$|f(x)| = 1 \tag{4.321}$$

Que al ser una función constante es continua en todos los puntos

2.4.2. Ejercicios resueltos sobre continuidad de funciones.

1. Considérese la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

Analícese la continuidad de f en el punto $x = 2$. Si es discontínua, clasifique la discontinuidad.

Solución:

Se debe analizar si f satisface las condiciones para ser contínua en $x = 2$.

i. $f(2) = 4$ (Existe)

ii. $$\underset{x \to 2^+}{Lim} f(x) = \underset{x \to 2^-}{Lim} f(x) = \underset{x \to 2}{Lim} f(x) = \underset{x \to 2}{Lim} \frac{x-2}{x^2-4}$$

$$= \underset{x \to 2}{Lim} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \underset{x \to 2}{Lim} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$ (Existe).

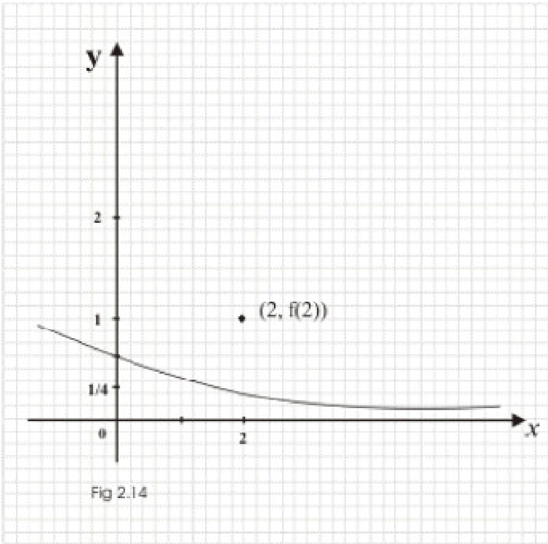
iii. $$\underset{x \to 2}{Lim} f(x) = \frac{1}{4} \neq f(2) = 4$$

Como falla esta última condición, f no es contínua en $x = 2$.

Ahora, puesto que $\underset{x \to 2}{Lim} f(x) = \frac{1}{4}$ (existe), la **discontinuidad es removible o evitable** en $x = 2$.
Para remover o evitar la discontinuidad, se redefine la función, de forma que coinciden $\underset{x \to 2}{Lim}\, g(x)$ con $g(2)$.

Asi, $$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4}, & x \neq 2 \\ \dfrac{1}{4}, & x = 2 \end{cases}$$

En la fig. 2.14. aparecen las gráficas de f y g cerca de $x = 2$.



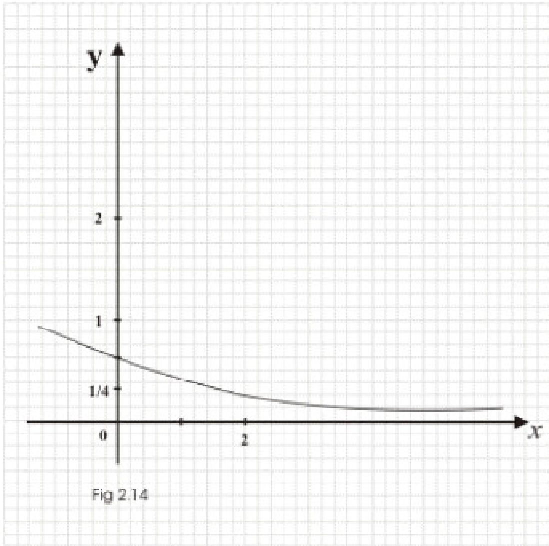


fig. 2.14.

2. Considérese la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & si \quad x \leq 1 \\ x^2 + 3 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Analícese la continuidad de f en el punto $x = 1$. Si f es discontínua, clasifique su discontinuidad.

Solución:

Como en el caso anterior, se analizan primero las condiciones de continuidad.

i. $f(1) = 2\,.1{+}1 = 3$ (Existe)

ii. $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + 3) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x + 1) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) \quad \text{NO EXISTE}$$

De i. y ii. se concluye que f no es continua en el punto $x = 2$.

Además, como $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ NO EXISTE, la discontinuidad es ESENCIAL y no puede removerse. En la figura 2.15. aparece dibujada la función f.

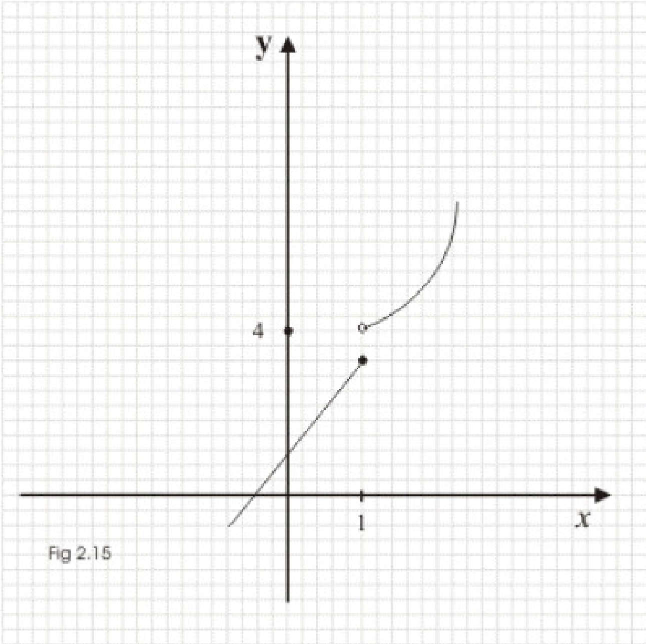


fig. 2.15.

3. Considérese la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 6a & si \quad x < -3 \\ 3ax - 7b & si \quad -3 \le x \le 3 \\ x - 12b & si \quad x > 3 \end{cases}$$

Determínense los valores de las constantes a y b para que f sea contínua en todo su dominio.

Solución:

Como f ha de ser continua en todo su dominio, debe serlo en particular en los puntos $x = -3$ y $x = 3$.

De la continuidad de f en el punto $x = -3$, se deduce que:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^+} f(x) = f(-3) \qquad (1).$$

Pero, $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^-} (3x + 6a) = -9 + 6a \qquad (2).$

También, $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^+} (3ax - 7b) = -9a - 7b = f(-3) \qquad (3).$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) se obtiene:

$$15a + 7b = 9 \qquad (4).$$

De la continuidad de f en el punto $x = 3$, se deduce que:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \qquad (5).$$

Pero, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (3ax - 7b) = 9a - 7b = f(3) \qquad (6).$

También, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x - 12b) = 3 - 12b \qquad (7).$

Sustituyendo (6) y (7) en (5) se obtiene:

$$9a + 5b = 3 \qquad (8).$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (4) y (7) se obtiene finalmente los valores: $a = 2$ y $b = -3$.

Con estos valores, ¿cómo queda definida la función f? Dibújesele.

Halla los valores de a y b para que la siguiente función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} 3x-a & \text{si} \quad x<1 \\ 2x^2+bx+a & \text{si} \quad 1\le x<2 \\ 3x+1 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$$

Solución:

- Dominio f(x) = R
- Si x ≠ 1 y x ≠ 2 f es continua, pues está formada por funciones que son continuas en los intervalos correspondientes.
- En x = 1:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(3x-a)=3-a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(2x^2+bx+a)=2+b+a \\ f(1)=2+b+a \end{array}\right\}$$

Para que f sea continua en x = 1, ha de ser: 3 − a = 2 + b + a → 2 a + b = 1

- En x = 2:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(2x^2+bx+a)=8+2b+a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(3x+1)=7 \\ f(2)=7 \end{array}\right\}$$

Para que f sea continua en x = 2, ha de ser: 8 + 2 b + a = 7 → a + 2 b = − 1

Uniendo las dos condiciones anteriores, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} 2a+b=1 \\ a+2b=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b=1-2a \\ a+2(1-2a)=-1 \;\rightarrow\; a+2-4a=-1 \;\rightarrow -3a=-3 \;\rightarrow\; a=1\,; \quad b=-1 \end{array}$$