Área de Matemáticas
Guía 5M1: Porcentajes, razones y proporciones

Preuniversitario
José Carrasco Tapia
... desde 1989 creando oportunidades

Razones, proporciones y porcentajes

En esta guía trataremos tres conceptos matemáticos que nos permiten comparar diferentes cantidades, así como determinar la forma en que estas cantidades se relacionan. Si bien en un principio esta idea, así como los términos que utilicemos, pueden parecer lejanos a nuestra vida cotidiana, la verdad es que se encuentran presentes en diferentes aspectos de esta. En este sentido, cocinar aparece como un excelente ejemplo de una situación práctica, en la que debemos unir diferentes ingredientes según cantidades ya establecidas en la receta. Así, cuando preparamos arroz, dependiendo de cuántas tazas de arroz queramos cocinar, sabremos también cuántas tazas de agua echarle. En otras palabras, lo que estamos haciendo aquí es comparar dos cantidades, la de arroz y la de agua.

El objetivo es unir el conocimiento que tod@s tenemos a partir de nuestra vida diaria, con los conceptos matemáticos detrás de ellos. Más allá de que muchas veces la matemática suene lejana (y para algun@s horrible), la aplicamos a diario, aunque sin ser conscientes de ello. Por lo mismo, la idea es conectar la teoría matemática con las situaciones cotidianas, lo que nos permitirá, por una parte aprenderla de mejor manera, y por otra, aplicarla de manera consciente en nuestro día a día.

En este sentido, a lo largo de la presente guía aprenderemos a utilizar herramientas como fracciones, porcentajes, razones y proporciones para realizar cálculos que nos permitan descubrir la relación entre dos cantidades para, finalmente, poder responder preguntas como ¿Qué tanto mayor o menor es cierta cantidad con respecto a otra? o ¿Cómo se comparan dos cantidades medidas en un contexto distinto (cuánta agua echarle a 5 tazas de arroz si sé cuanto se le echa a 1 taza de arroz)?

Razón

El primer concepto a estudiar corresponde al de razón, el que se refiere a la comparación entre dos cantidades, es decir, a la relación en magnitud entre dos cantidades. Esta se representa mediante la división o cuociente. La notación que utilizamos es $x : y$ o bien $\frac{x}{y}$, lo que se lee "x es a y" (recordar la relación entre la división y las fracciones). Además, llamamos antecedente al número que nombramos primero en la razón (x) y consecuente al que le sigue (y). Finalmente, si calculamos la razón como una división, el valor obtenido se conoce como: **VALOR DE LA RAZÓN**

Volviendo al ejemplo del arroz y el agua que mencionamos más arriba, para aplicar el concepto de razón, debemos conocer la relación o comparación que existe entre la cantidad de arroz y de agua a utilizar. Como tod@s sabemos (o deberíamos saber), para cocinar 1 taza de arroz (cantidad x) se deben agregar 2 tazas de agua (cantidad y). De esta forma, la razón que se establece entre las tazas de arroz y las tazas de agua es de $1 : 2$ o bien $\frac{1}{2}$, lo que se lee "1 es a 2" o en un lenguaje más cotidiano "1 taza de arroz cada 2 tazas de agua". Así mismo, podemos calcular el valor de la razón, el que corresponde a la división entre 1 y 2, cuyo resultado es 0.5.

En este punto, es normal preguntarse si esta es la única forma en que podemos establecer la razón entre arroz y agua, es decir, si siempre compararemos la cantidad de arroz a la cantidad de agua (el arroz primero y el agua segunda) o si puede suceder de manera contraria, es decir comparar la cantidad de agua a la cantidad de arroz (el agua primera y el arroz segundo). Para responder esto, piensen en su vida cotidiana, siempre que alguien pregunta por cómo hacer arroz se le responde primero con el arroz y luego con el agua? Como la respuesta a esta pregunta es negativa, podemos deducir entonces que las cantidades a comparar en una razón pueden estar en cualquiera de los sentidos posibles (arroz vs agua o agua vs arroz), pero con una salvedad: cuidar la coherencia entre las cantidades, es decir respetar que si el arroz está primero, el antecedente de la razón sea la cantidad que le corresponde y viceversa. Esto quiere decir que si ahora compararemos la cantidad de agua para la cantidad de arroz a cocinar, la razón se establece de manera inversa a la anterior, es decir es de $2:1$ o bien $\frac{2}{1}$, lo que se lee "2 es a 1" o "2 tazas de agua cada 1 taza de arroz". Igual que cuando establecimos la razón originalmente, podemos calcular su valor, el que corresponde a la división entre 2 y 1, cuyo resultado es 2.

Proporción

El segundo concepto a estudiar nos será de utilidad cuando queramos llevar una comparación o razón conocida (situación 1: conocida) a una segunda situación desconocida (situación 2: desconocida), manteniendo el valor de la razón. Esto ocurre, por ejemplo, cuando sabiendo que por cada 1 taza de arroz necesitamos 2 tazas de agua (situación 1: conocida), queremos saber cuánta agua echarle a 3 tazas de arroz o a 5, 7, 10 o cualquier cantidad de arroz que queramos cocinar (situación 2: desconocida).

Para poder determinar las cantidades a utilizar en esta segunda situación desconocida haremos uso de **las proporciones**, las que representan **una igualación de dos razones**. En este sentido, el valor de una primera razón (digamos entre a y b) es el mismo que el de una segunda razón (digamos entre c y d). Por lo mismo, se puede establecer la siguiente igualdad:

$$\boxed{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}}$$

Donde los números a y d corresponden a los denominados **extremos** y b y c son los llamados **medios** y la forma que se lee la proposición expuesta es "a es a b como c es a d".

Una propiedad importante y muy útil de la proporción es que **El producto de los extremos es siempre igual al producto de los medios**, lo que se expresa:

$$\boxed{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}}$$

Como observación podemos añadir que, tomando la misma proporción anterior, va a existir una constante que llamaremos **k**, que cumple lo que sigue:

$$\boxed{\mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{k},\ \mathbf{b} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{k} \text{ con } \mathbf{k} \neq \mathbf{0}}$$

En otras palabras, la constante **k** corresponde al valor por el cual amplificamos la fracción $\frac{a}{b}$ para llegar a la fracción $\frac{c}{d}$.

Si volvemos al ejemplo del arroz y queremos determinar cuánta agua utilizar para cocinar 3 tazas de arroz, para usar los conocimientos de proporciones siempre tenemos que tener en cuenta lo siguiente. Primero, necesitamos conocer como funciona la situación (en este caso cocinar arroz) para algún caso (situación 1: conocida). Segundo, necesitamos una segunda situación, donde conozcamos solo 1 de los 2 componentes de la razón (situación 2: desconocida). Con estos datos podremos plantear la proporción (o igualdad) entre las dos razones y resolver la cantidad desconocida (¿Les suena conocido esto? Una expresión matemática donde tenemos una igualdad y un dato desconocido que intentamos buscar? Corresponden a las ecuaciones).

De esta forma, tenemos que la situación 1 (conocida) corresponde a cocinar 1 taza de arroz, para lo cual usamos 2 tazas de agua, y que en la situación 2 (desconocida) queremos cocinar 3 tazas de arroz. ¿Cuánta agua necesitamos?

$$\boxed{\mathbf{\frac{2}{1} = \frac{Agua}{3} \iff \frac{2 \cdot 3}{1} = Agua \iff 6 = Agua}}$$

Es decir, si queremos cocinar 3 tazas de arroz necesitamos echarle 6 tazas de agua hirviendo. Si se fijan, lo único que debemos hacer es reemplazar en nuestra proporción al lado izquierdo la situación 1 (conocida), donde usamos 2 tazas de agua para cada taza de arroz y al lado derecho la situación 2 (desconocida), donde queremos cocinar 3 tazas de arroz, pero no sabemos cuánta agua ocupar. Luego, despejamos nuestra cantidad desconocida utilizando las herramientas que nos ofrecen las ecuaciones (no se preocupen, ya veremos más adelante cuáles son estas).

Si recuerdan, más arriba discutíamos acerca de la posibilidad de escribir las razones de diferentes maneras (agua vs arroz o arroz vs agua), resaltando que esto sí era posible, siempre y cuando fuésemos coherentes con los datos utilizados. En el caso de las proporciones, esta coherencia se traduce en que si ponemos al lado izquierdo el agua en el numerador de la razón y el arroz en el denominador, debemos respetar este orden para el lado derecho de la igualdad. Es decir, podemos completar nuestra proporción de las siguientes dos maneras llegando al mismo resultado:

$$\boxed{\frac{\textbf{Agua situación 1}}{\textbf{Arroz situación 1}} = \frac{\textbf{Agua situación 2}}{\textbf{Arroz situación 2}} \ \textbf{o} \ \frac{\textbf{Arroz situación 1}}{\textbf{Agua situación 1}} = \frac{\textbf{Arroz situación 2}}{\textbf{Agua situación 2}}}$$

Serie de Razones

La definimos como la equivalencia de más de dos razones, lo que es prácticamente lo mismo que antes pero con más igualdades:

$$\boxed{\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}}$$

La cual también se puede representar como sigue $x : y : z = a : b : c$. Toda serie de razones cumple con siguiente propiedad:

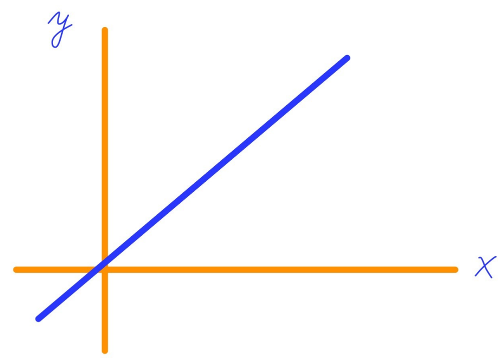
$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}}$$

Proporcionalidad directa

Definición : Dos variables x e y se dice que son directamente proporcionales si y solo si el **cuociente** entre valores respectivos de las variables es una constante. En otras palabras, esto significa que a medida que el valor de una variable aumenta, también lo hace el valor de la otra. Un ejemplo conocido por tod@s que corresponde a una situación en que dos variables se encuentran en proporcionalidad directa corresponde a la compra del pan. ¿Por qué? Porque si consideramos que al comprar pan tenemos dos variables, la cantidad de pan comprado y el total pagado, a medida que aumenta la cantidad de pan que compramos, aumenta también el total pagado. Es decir, si compramos más kilos de pan, pagamos un total mayor.

Esto se refleja en el siguiente gráfico, donde a mayores valores de x (en nuestro ejemplo la cantidad de pan comprado), también tenemos mayores valores de y (en nuestro ejemplo el total pagado).

$\boxed{\mathbf{\frac{x}{y} = k}}$

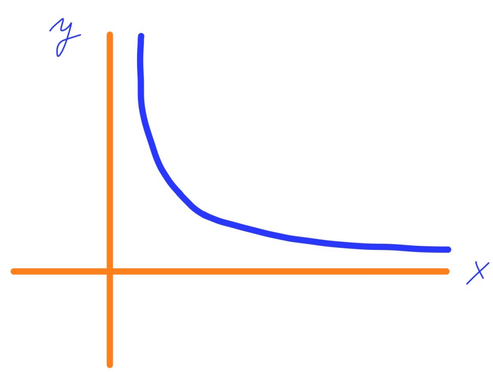


Proporcionalidad inversa

Definición: Dos variables x e y se dice que son inversamente proporcionales si y sólo si el **producto** entre los valores respectivos de la variable resulta una constante. En otras palabras, esto significa que a medida que el valor de una variable aumenta, el valor de la otra disminuye. Un ejemplo de esto sería la construcción de una pared. ¿Por qué? Porque si consideramos que al construir una pared tenemos 2 variables, la cantidad de personas trabajando y el tiempo que nos demoramos en terminar el trabajo, es posible apreciar que a mayor cantidad de personas trabajando, menor es el tiempo que nos demoramos en terminar la pared.

Esto se refleja en el siguiente gráfico, donde a mayores valores de x (en nuestro ejemplo la cantidad de personas trabajando), menores son los valores de y (en nuestro ejemplo el tiempo que nos demoramos en terminar el trabajo).

$\boxed{\mathbf{x \cdot y = k}}$



Porcentaje

Cuando hablamos de porcentaje, nos referimos un ejemplo práctico de proporciones. En específico, hablamos de lo que representa una cantidad con respecto de otra cantidad divida en 100 partes iguales. En este sentido, es posible postular la siguiente proporción:

$$\boxed{\frac{\textbf{Parte de interés}}{\textbf{Total}} = \frac{\textbf{Porcentaje}}{\textbf{100}}}$$

Toda proporción está constituida por 4 partes, las que en el caso del porcentaje corresponden a las siguientes. En primer lugar, por el lado izquierdo de la proporción anotamos los datos del problema específico que queremos resolver, los que hemos denominado "Parte de interés" y "Total", los que corresponden respectivamente a quienes cumplen cierta característica que estamos buscando ("Parte de interés") y al total sobre el cual escogemos a esta parte de interés ("Total"). Por otra parte, por el lado derecho de la proporción, siempre tendremos en el numerador el porcentaje que corresponde a la parte de interés y en el denominador un 100. De esta forma, de los 4 elementos que constituyen una proporción, siempre tendremos 1 fijo (el 100) y otros 3, de los cuales 2 serán conocidos y 1 el valor desconocido que buscaremos (nuevamente tenemos el caso de una igualdad con un valor desconocido: ecuación!).

Si por ejemplo, nos preguntan el porcentaje de hinchas de la U en una sala de clases, sabiendo que 35 de l@s 50 estudiantes son de la U, lo primero que debemos comprender es qué característica estamos buscando y entre quiénes la estamos buscando, para así poder cuantificarlos y reemplazarlos en nuestra proporción. En este caso, la característica buscada corresponde a ser hincha de la U (Parte de interés: 35 estudiantes) y entre quienes corresponde al total de estudiantes en la sala (Total: 50 estudiantes). Como ya tenemos dos valores conocidos, el tercer valor, el del porcentaje, es nuestra incógnita a resolver.

Dicho esto, reemplazamos nuestros valores en la proporción y despejamos la incógnita:

$$\boxed{\frac{\textbf{Parte de interés}}{\textbf{Total}} = \frac{\textbf{Porcentaje}}{\textbf{100}} \iff \frac{\textbf{35}}{\textbf{50}} = \frac{\textbf{Porcentaje}}{\textbf{100}} \iff \frac{\textbf{35} \cdot \textbf{100}}{\textbf{50}} = \textbf{Porcentaje} \iff \textbf{70} = \textbf{Porcentaje}}$$

Por lo tanto, un 70 por ciento de l@s estudiantes de la sala son hinchas de la U. Es importante mencionar que de los 3 valores de una proporción (parte de interés, total y porcentaje) podrían darnos cualquier combinación de dos, dejando la tercera variable como desconocida.

Para entender mejor esto último, pensemos en que tras encuestar a l@s estudiantes del Preuniversitario José Carrasco Tapia sobre quién era José Carrasco Tapia, un 60 por ciento responde conocerlo, por lo que queremos saber cuántos efectivamente conocen al periodista que da nombre al Preu. Para lograrlo, realizamos el mismo proceso de pensamiento que en el ejercicio anterior, identificando qué característica buscamos y sobre qué universo buscamos esta característica. En este caso, la característica buscada corresponde a conocer a José Carrasco Tapia (Parte de interés: desconocida), entre el total de estudiantes del preu (Total: 800 estudiantes). Además, sabemos que dicha parte de interés representa el 60 por ciento del total. Si se fijan, nuevamente tenemos 2 valores conocidos (Total y Porcentaje) y uno desconocido (Parte de interés), aunque en una composición diferente al primer ejemplo. Para encontrar la cantidad de estudiantes que sí conocen a José Carrasco Tapia, reemplazamos en la proporción los 2 valores conocidos, despejando el valor que queda de incógnita:

$$\boxed{\frac{\textbf{P. interés}}{\textbf{Total}} = \frac{\textbf{Porcentaje}}{\textbf{100}} \iff \frac{\textbf{P. interés}}{\textbf{800}} = \frac{\textbf{60}}{\textbf{100}} \iff \textbf{P. interés} = \frac{\textbf{60} \cdot \textbf{800}}{\textbf{100}} \iff \textbf{P. interés} = \textbf{480}}$$

Es decir, de l@s 800 estudiantes del preu, solo 480 conocen quién era y qué hizo José Carrasco Tapia (si estás en el 40 por ciento de estudiantes que no lo conoce, puedes investigar sobre él en google o youtube fácilmente).

Por otra parte, es frecuente encontrarse con ejercicios en los cuales tengamos que operar con porcentajes. Por lo que a continuación se explican las operaciones mas habituales:

- **Sumar o restar porcentajes de una misma cantidad**

  Por ejemplo, ¿Cuanto vale el 5 % de 200 más el 8 % de 200?, sabemos que el 5 % de 200 es 10, y el 8 % de 200 es 16, por lo que la suma de ambos es 26, cantidad que corresponde al 13 % de 200. Por lo que en general para alguna cantidad C se tendrá que:

  $$\boxed{a\,\%\text{ de } C \pm b\,\%\text{ de } C = (a \pm b)\,\%\text{ de } C}$$

- **El porcentaje del porcentaje de una cantidad**

  Por ejemplo, ¿Cuánto vale el 5 % del 10 % de 200?. En este caso lo primero que hay que calcular es el 10 % de 200, ya que nos piden calcular el 5 % del resultado de esa operación. De esta manera, sabemos que el 10 % de 200 es 20, por lo que nos piden calcular el 5 % de 20, lo que corresponde a 1, por lo que concluimos que el 5 % del 10 % de 200 es 1. Para resolver estos problemas, en general tendremos que para una cantidad C:

  $$\boxed{\text{El } a\,\%\text{ del } b\,\%\text{ de } C = \tfrac{a}{100} \cdot \tfrac{b}{100} \cdot C}$$

Interés Simple

Por último, se encuentra el concepto de interés, el que es probable que les suene familiar a partir de diversas situaciones de la vida cotidiana como por ejemplo el cobro de intereses por un préstamo o crédito. Además, para poder calcular los intereses en una situación dada, utilizaremos lo que acabamos de aprender sobre los porcentajes, ya que generalmente se definen los intereses a pagar en función de un porcentaje del monto total prestado.

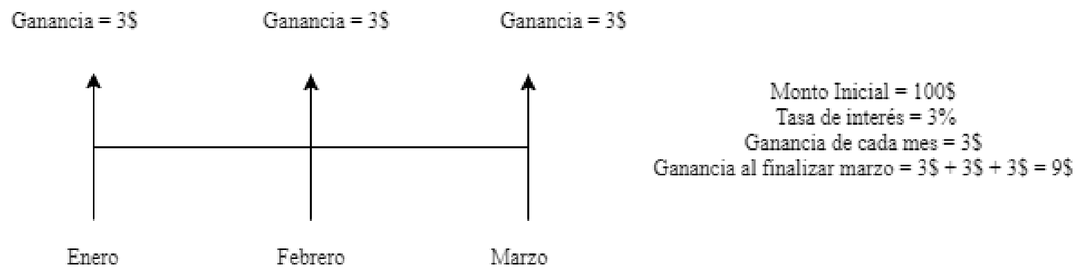
En este sentido, para poder calcular el interés en una situación dada, siempre tendremos 3 elementos. Primero, el monto total por el cuál cobraremos (o nos cobrarán) intereses. Segundo, el porcentaje de este monto que será cobrado cada mes/semestre/año, lo que se denomina tasa de interés. Tercero, la cantidad y el tipo de periodos (meses/semestres/años) que cobraremos (o nos cobrarán) dicho interés.

El cálculo de intereses se puede realizar de dos maneras, según se trate de una tasa de interés simple o una tasa de interés compuesta. En esta sección explicaremos cómo realizar cálculos de intereses cuando estamos en presencia de una **tasa de interés simple**, lo que se refiere a que siempre cobraremos el interés en base al monto inicial. Por otra parte, cuando más adelante tratemos el interés compuesto, veremos que en ese caso se cobra la tasa de interés ya no siempre sobre el monto inicial, sino que sobre el nuevo monto, el que se irá reajustando cada vez que se le sumen los nuevos intereses.

Expliquemos el funcionamiento del interés simple a través del siguiente ejemplo:

Supongamos que tenemos 100\$ al inicio del mes de enero y nos dicen que si invertimos nuestro dinero podremos ganar cada mes que pase el 3 % de estos 100\$ hasta el mes de marzo. Es decir, nos ofrecen un 3 % (tasa de interés), cada mes por 3 meses (tipo y cantidad de periodo de pago de interés), sobre los 100\$ (monto inicial). De esta forma, ganaremos 3\$ por cada mes (si se fijan, para poder calcular este valor se utiliza un cálculo de porcentaje como el aprendido en la sección anterior). Esto quiere decir que al final del mes de enero, febrero y marzo recibiremos 3\$, por lo que al final de marzo tendremos acumulado $3\$+3\$+3\$ = 9\$$, esta será la ganancia de la inversión.

En este caso se aplicó una **tasa de interés simple** del 3 %, sobre un **monto inicial** de 100\$ para los **periodos** de enero, febrero y marzo, obteniéndose una **ganancia** de 3\$ en **cada periodo**, lo cual implicó finalmente una **ganancia total** de 9\$ al terminar el mes de marzo.



En ejemplo se utilizó una tasa de interés simple por que al final de cada periodo se recibió como ganancia siempre un porcentaje del **monto inicial** y por ello la ganancia siempre fue igual.

En general entonces, si tenemos un monto inicial **C**, que crece a una tasa de interés simple del **i %** por una cantidad de **n** periodos, la cantidad C_f que se tendrá al finalizar el ultimo periodo estará dada por:

$$\boxed{C_f = C + \frac{n \cdot i}{100} \cdot C}$$

Si se fijan, el monto final (C_f) corresponde al monto inicial (**C**) más lo que este aumente producto de los intereses. Esto último corresponde al interés de cada periodo ($\dfrac{i}{100} \cdot C$, esto lo calculamos usando lo aprendido en porcentaje) multiplicado por la cantidad de periodos que se aplique el interés (**n**).

Por otra parte, si sólo queremos saber cuánto aumentó el monto inicial producto de los intereses (lo que llamaremos Ganancia) sin considerar el monto inicial, lo podemos calcular de la siguiente manera:

$$\boxed{Ganancias = \frac{n \cdot i}{100} \cdot C}$$

Interés Compuesto

Como se explicó anteriormente, el interés compuesto corresponde a aplicar el interés sobre un monto nuevo, el cual se actualiza en cada periodo. Por ejemplo, para el primer período donde se aplica el interés, tendríamos que el monto resultante es la suma del inicial C y el porcentaje aplicado sobre éste ($C \cdot \frac{i}{100}$):

$$\boxed{C_1 = C + C\frac{i}{100} = C(1 + \frac{i}{100})}$$

Para el segundo periodo sería parecido, solo que ahora nuestro monto inicial es el resultado del periodo pasado (C_1) por la aplicación del interés $(1 + \frac{i}{100})$:

$$\boxed{C_2 = C_1 + C_1\frac{i}{100} = C_1(1 + \frac{i}{100}) = \underbrace{C(1 + \frac{i}{100})}_{C_1} \cdot (1 + \frac{i}{100}) = C(1 + \frac{i}{100})^2}$$

Se puede ver que si reemplazamos el monto del primer período C_1 por su relación con el monto inicial $C(1+\frac{i}{100})$ podemos descubrir un patrón. Entonces, para obtener el monto final C_f, por cada período que pasa se debe multiplicar el monto inicial C por la suma $(1 + \frac{i}{100})$ que, si se fijan, representa a la razón entre cada monto y el resultado de aplicar el interés en cada período. De esta forma, para n períodos obtendremos la fórmula:

$$\boxed{C_f = C \cdot (1 + \frac{\cdot i}{100})^n}$$