Preuniversitario José Carrasco Tapia
... desde 1989 creando oportunidades

Raíces

De las potencias aprendimos que se puede escribir la multiplicación repetida de un número como:

$$\underbrace{a \cdot a \ldots a \cdot a}_{n \text{ veces}} = a^n = x$$

En dicho caso, el número conocido es a y queremos calcular x realizando la multiplicación de a una cantidad n de veces. Las raíces son el problema inverso: sabemos que un número x *desconocido*, multiplicado n veces, resulta en un número b *conocido*. ¿Cómo calculamos el valor de x ahora?

$$\underbrace{x \cdot x \ldots x \cdot x}_{n \text{ veces}} = x^n = b$$

Veamos un ejemplo: ¿Que número multiplicado dos veces por sí mismo da 4? En esta pregunta, la cantidad de veces que se multiplica x es $n = 2$ y b es igual a 4:

$$\underbrace{x \cdot x}_{2 \text{ veces}} = 4$$

¿Lo podemos resolver? La respuesta es que sí, y para eso vamos a sacar provecho de la notación de potencias, por lo que nos queda:

$$x^2 = 4$$

Introducimos la notación $\sqrt{}$, que representa a la ***raíz cuadrada***. La raíz cuadrada *"elimina"* el exponente cuadrado. Al aplicarla (siempre a los dos lados de la ecuación) quedamos con:

$$\sqrt{x^2} = x = \sqrt{4} = 2$$

Esto quiere decir que la raíz cuadrada de 4 es 2.

Importante: Por convención, el resultado de la raíz cuadrada (o cualquier raíz con índice par) es siempre mayor o igual a 0. Es por lo anterior que en este caso estamos omitiendo que también $(-2) \cdot (-2) = 4$.

Ahora bien, la raíz cuadrada es un caso específico de raíz en que el índice es 2. Veamos qué pasa cuando usamos otros números:

Raíces n-ésimas

En general una raíz n-ésima es tal que:

$$a^n = b \iff a = \sqrt[n]{b}$$

Es decir, si a elevado a n es igual a b, entonces la *raíz n-ésima* de b es a.

Esta definición tiene una importante ***restricción*** sobre los números que se pueden utilizar si queremos saber cuánto vale $\sqrt[n]{b}$:

Si n es ***par***, b debe ser necesariamente no negativo ($b \geq 0$). ¿Por qué?

Recordemos que, por la regla de los signos de la multiplicación, al multiplicar dos números del mismo signo el resultado será positivo, en las potencias estamos multiplicando un mismo número (y por ende un mismo signo) muchas veces, por lo que si la cantidad de veces es par, el resultado siempre será positivo. Veamos unos ejemplos:

$$(-1)^2 = \underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{\text{2 veces}} = 1$$
$$(-1)^3 = \underbrace{(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)}_{\text{3 veces}} = 1\cdot(-1) = -1$$
$$(-1)^4 = \underbrace{(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)}_{\text{4 veces}} = 1\cdot(-1)\cdot(-1) = (-1)\cdot(-1) = 1$$

Relación con potencias

Las raíces (o radicales) funcionan exactamente igual a las potencias, la diferencia es que el índice n en el símbolo $\sqrt[n]{\ }$ es el denominador de una fracción, de esta forma, *una raíz n-ésima es lo mismo que una potencia elevada a una fracción*:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Con esta igualdad podemos relacionar directamente las propiedades de las potencias con las de las raíces:

Propiedades básicas

1. Cualquier raíz es una potencia elevada a una fracción:
$$\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$$
2. Si los índices son *iguales*, la multiplicación de dos raíces será la raíz de la multiplicación de las bases:
$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$
esto es equivalente a escribirlo como potencia: $a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$
3. Lo anterior es análogo a la división:
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

4. La raíz cuadrada de cualquier número elevado a 2 es su valor absoluto:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Aquí es muy importante el orden, ya que:

$$\sqrt{a^2} \neq (\sqrt{a})^2$$

En el segundo caso nos puede quedar indefinido:

$$\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$$
$$(\sqrt{(-4)})^2 = \emptyset$$

Estas propiedades nos dejan ver que se manejan de forma **muy parecida** a la notación exponencial, para corroborar que se entendió bien la materia, vamos a resolver un par de ejemplos de problemas resueltos:

Ejercicios Explicativos

1. Encuentre el valor de $\sqrt{-81}$

   Respuesta: Notemos que $81 = 9^2$, sin embargo, el valor adentro de la raíz es negativo, por tanto, la respuesta es que **NO** la podemos calcular (aún). Luego, podemos decir que el valor en cuestión no es real o que está indefinido.

2. Encuentre el valor de $\sqrt[3]{12}\sqrt[3]{18}$

   Respuesta: Notemos que tanto 12 como 18 son números a los cuales no sabemos sacarles raíz cúbica. Sin embargo veamos si podemos usar alguna propiedad, como por ejemplo la propiedad 2, que nos da que:

   $$\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{12 \cdot 18}$$

   Ahora que juntamos las dos bases en una sola raíz cúbica, veamos una forma de tratarlas cuando la multiplicación es muy grande: hareamos la factorización prima de cada número, con la idea de eliminar números que estén elevados a 3:

   $$\sqrt[3]{12 \cdot 18} = \sqrt[3]{(2^2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3^2)}$$

   Podemos reagrupar los números y aplicar la regla de las potencias de igual exponente o raíces de igual indice para la multiplicación:

   $$= \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} = 2 \cdot 3 = 6$$

   Notar que $\sqrt[3]{3^3} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^{\frac{1}{1}} = 3^1 = 3$.

Hint: Para calcular raíces de números enteros muy grandes (lo cual es frecuente en la PTU) en general el procedimiento esperado es hacer la factorización prima de los números para ver si se pueden ir *simplificando* factores de forma más “fácil”, evitando así desarrollos largos como multiplicar 12 por 18.

Raíz de una raíz

Ahora empezaremos a aplicar propiedades que son un tanto más complejas pero que se entienden mejor con la notación fraccionaria de raices, en particular, para evitar problemas con los números negativos, las siguientes propiedades se cumplen si los a que mostraremos a continuación son positivos o 0 ($a \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$) y n, m son enteros ($n, m \in \mathbb{N}$):

1. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

   Como potencia: $(a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$

2. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

   Como potencia: $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}}$

Ejercicio Explicativo

Encuentre el valor de $\sqrt{\sqrt{16}}$

Respuesta: Hay varias maneras de desarrollar este problema, a continuación dos formas de hacerlo:

$$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{(\sqrt{16})} \tag{1}$$
$$= \sqrt{4} \tag{2}$$
$$= 2 \tag{3}$$

Esta forma es básicamente desarrollar de adentro hacia afuera, esta opción puede ser útil para problemas simples.

Segunda forma: Usando las propiedades de afuera hacia adentro:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sqrt{16}} &= \sqrt[2\cdot 2]{16} \\ &= \sqrt[4]{2^4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Notar que acá aplicamos la propiedad 2 de las antes mencionadas, luego hicimos la factorización prima para ver si se podía simplificar el problema, finalmente llegamos a que la respuesta es 2.

Raíces como fracción

Si antes vimos propiedades que equivaldrían a multiplicar entre sí fracciones, ahora mostraremos algunas que equivaldrían a sumar fracciones, además de ser cercanas al concepto de amplificación y simplificación de éstas. Para que las siguientes propiedades funcionen, vamos a considerar que a y b son números reales positivos y que m y n son números naturales, con $m \neq 0$ y $n \neq 0$:

1. **Amplificación o simplificación:**

   $$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^m}$$

   Lo anterior visto como fracción sería:

   $$a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{nm}}$$

2. **Producto de raices de distinto índice:**

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m \cdot n]{a^m \cdot b^n}$$

Lo anterior, visto como fracción sería:

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{nm}} \cdot b^{\frac{n}{nm}} = (a^m \cdot b^n)^{\frac{1}{mn}}$$

3. **Meter un número dentro de una raíz:**

Esto es un caso específico de la propiedad anterior que se usa bastante cuando se multiplica un número por una raíz:

$$b \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n \cdot a}$$

Lo anterior visto como forma fraccionaria sería como:

$$b \cdot a^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{n}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} = (b^n \cdot a)^{\frac{1}{n}}$$

Notar en el último ejemplo que aprovechamos la propiedad de las potencias:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Lo que es básicamente buscar un factor común por el cual elevar ambos (en 2 y 3, por ejemplo, se utiliza para que estén bajo la misma raíz).

Racionalización

Por convención, las fracciones nunca deben tener una raíz en el denominador, lo anterior para facilitar las operaciones fraccionarias. Cuando nos encontramos con una fracción cuyo denominador tiene una raíz debemos amplificar de tal forma que se éstas se *simplifiquen*, en general nos enfrentaremos a dos casos:

1. $\dfrac{a}{\sqrt[n]{b^m}} \quad , \quad m < n$

En este caso, como m es menor a n, amplificaremos por $\sqrt[n]{b^{n-m}}$. De esta forma:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}}$$

Por las propiedades vistas con anterioridad sabemos que:

$$\sqrt[n]{b^m} \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}} = b^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{n-m}{n}} = b^{\frac{m+(n-m)}{n}} = b^{\frac{n}{n}} = b^1 = b$$

Por lo tanto:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

Esta es la forma deseada ya que no tiene raíces en el denominador.

2. $\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $b, c \neq 0$

En general encontrarán este problema sólo con raíces cuadradas, en este caso amplificaremos un término de tal forma que tanto $\sqrt{b}$ como $\sqrt{c}$ queden al cuadrado. Para ésto utilizaremos una propiedad que se verá más adelante:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Con esto en cuenta, amplificaremos nuestra fracción por $\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$:

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$$

Nuevamente, obtenemos una forma sin raíces en el denominador.

Ejercicio Explicativo

Racionalice $\dfrac{10}{\sqrt[3]{5^2}}$

En este ejemplo, $m = 2$ y $n = 3$. Amplificamos por $\frac{\sqrt[3]{5^{3-2}}}{\sqrt[3]{5^{3-2}}} = \frac{\sqrt[3]{5^1}}{\sqrt[3]{5^1}}$:

$$\frac{10}{\sqrt[3]{5^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^1}}{\sqrt[3]{5^1}} = \frac{10\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2 \cdot 5^1}} = \frac{10\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{10\sqrt[3]{5}}{5}$$

Una vez obtenida la fracción sin raíces en el denominador podemos ver si se puede simplificar:

$$= 2\sqrt[3]{5}$$

Racionalice $\dfrac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

Como vemos que tiene una suma (o resta) de raíces cuadradas, amplificamos por $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

$$\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{3\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{3\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(2-5)} = \frac{3\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(-3)}$$

Nuevamente, llegada a la expresión sin raíces, podemos continuar simplificando:

$$\frac{3\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(-3)} = -(\sqrt{2}+\sqrt{5})$$