Potencias y Notaciones

Ahora que tenemos los conjuntos numéricos base de las matemáticas, podemos definir un par de operaciones que nos permitirán trabajar entre ellos en diversas formas.

Potencias en $\mathbb{Q}$

Si bien en una guía anterior vimos de manera superficial lo que era una potencia, ahora profundizaremos con las distintas propiedades que éstas tienen, en primer lugar, recordemos lo que es una potencia. Sea a un número racional ($a \in \mathbb{Q}$) y n un número entero positivo ($n \in \mathbb{Z}^+$), se define lo siguiente:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a \cdot a \cdot a}_{a \text{ multiplicado } n \text{veces por si mismo}} = a^n$$

El término a^n es una potencia, la que se lee como *"a elevado a n"* donde el número a se conoce como ***base*** y el número n se denomina ***exponente***. La potencia viene a simplificar la notación de una multiplicación que se repite n cantidad de veces. Podemos ver más claro este concepto en el siguiente ejemplo:

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{\text{multiplicamos 3 veces el 4}} = 4^3$$

Observación: Cuando un número esta elevado a dos (a^2), se suele decir que a esta elevado al cuadrado. Por otro lado, cuando un número esta elevado a tres (b^3) se dice que b esta elevado al cubo.

Propiedades de las potencias

Como ya hemos mencionado antes, para entender los mensajes que vienen en **lenguaje matemático** es importante conocer cómo funcionan sus símbolos. Para esto, es fundamental conocer las propiedades de cada operación. Estas pueden ser entendidas como **las reglas del juego**. Piensen, ¿Qué posibilidad tienen de participar en un juego (dar la PAES de matemática) si ni siquiera conocen sus reglas?

Por lo mismo, a continuación se encuentran las propiedades de las potencias:

- Para todo número a, con a distinto de cero ($a \neq 0$), se cumple que: $a^0 = 1$
- Para todo número a, $a \neq 0$: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- Para cualquier número n: $0^n = 0$ y $1^n = 1$
- 0^0 no está definido.

- **Signos de la potencia:**

$$a^n = \begin{cases} \text{n es } \textbf{par} \text{ y } a \neq 0 & a^n \text{ es } \textbf{siempre positivo} \\ \text{n es } \textbf{impar} \text{ y } a < 0 & a^n \text{ es } \textbf{negativo} \\ \text{n es } \textbf{impar} \text{ y } a > 0 & a^n \text{ es } \textbf{positivo} \end{cases}$$

Operatoria de potencias

Así como sus propiedades, también es importante conocer cómo se operan las potencias. En otras palabras, qué entender de una oración matemática en la que se están multiplicando o dividiendo potencias:

- **Multiplicación** de potencias de **igual base** se suman los exponentes $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
  Ejemplo: $2^3 \cdot 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10}$
- **División** de potencias de **igual base** se restan los exponentes $a^n : a^m = a^{n-m}$
  Ejemplo: $6^6 : 6^2 = 6^{6-2} = 6^4$
- **Multiplicación** de potencias de distinta base e **igual exponente** se multiplican las bases $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
  Ejemplo: $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3$
- **División** de potencias de distinta base e **igual exponente** se dividen las bases $a^n : b^n = (a : b)^n$
  Ejemplo: $2^3 : 5^3 = (2 : 5)^3$
- **Potencia de una potencia** se multiplican los exponentes $(a^n)^m$
  Ejemplo: $(5^2)^4 = 5^{(2 \cdot 4)} = 5^8$

Notación científica

La notación científica es una aplicación de las potencias que permite trabajar con números muy grandes (o muy pequeños) de manera más fácil. Básicamente es escribir un número muy grande (o chico) de otra forma, utilizando las potencias de 10.

Por ejemplo, tener que escribir el número 5.000.000.000.000.000 varias veces en un documento resulta engorroso o comparar cuál es mayor entre 0,000000000006 y 0,00000000000006 contando los ceros sería un trabajo tedioso e ineficiente. Bajo esta problemática surge la notación científica.

- **Notación Científica:** Un número esta expresado en notación científica si tiene la forma:

$$k \cdot 10^p \text{ ; con } 1 \leq k \leq 10 \text{ y } p \in \mathbb{Z}$$

Es decir, se escribe como un número decimal mayor a 1 y menor a 10, multiplicado por una potencia de 10 (10 elevado a un número entero p)

Ejemplos:

- 650 en notación científica es $6,5 \cdot 10^2$
- $0,075$ en notación científica es $7,5 \cdot 10^{-2}$

- $12,4$ en notación científica es $1,24 \cdot 10^1$
- $1,614 \cdot 10^2$ esta escrito en notación científica, el número original es $161,4$
- $16,14 \cdot 10^2$ No esta escrito en notación científica

- **Forma Abreviada:** Un número esta expresado de forma abreviada si esta expresado de la forma:

$$k \cdot 10^p \text{ ; con } k \text{ el menor entero } (\mathbb{Z}) \text{ posible y } n \in \mathbb{Z}$$

Ejemplos:

- 650 en forma abreviada es $65 \cdot 10^1$
- $0,075$ en forma abreviada es $75 \cdot 10^{-3}$
- $12,4$ en forma abreviada es $124 \cdot 10^{-1}$
- 160000 en forma abreviada es $16 \cdot 10^4$

- **Ampliada/Desarrollada:** Un número esta expresado de forma Ampliada/Desarrollada cuando representa como la suma de sus ***cifras significativas*** multiplicadas por las potencias de 10 correspondientes a su posición.

$$abcd,ef = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10^1 + d \cdot 10^0 + e \cdot 10^{-1} + f \cdot 10^{-2}$$

Ejemplos:

- 650 en forma Ampliada es $6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1$
- $0,075$ en forma Desarrollada es $7 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$
- $12,4$ en forma Desarrollada es $1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1}$
- $100200,07$ en forma Ampliada es $1 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^{-2}$

Raíz Cuadrada

La raíz cuadrada de un número x es otro número y tal que, al multiplicar y por si mismo, obtengo el número x, es decir, $y^2 = x$.

De esta forma, definimos la raíz como el símbolo $\sqrt{}$ que denota lo siguiente:

$$y^2 = x \text{ si y solo si } \sqrt{x} = y, \ (x > 0)$$

Lo cual se lee **"la raíz cuadrada de x es y"**. Es muy importante decir que el valor x debe ser mayor o igual a cero ($x \geq 0$), además por convención, y también debe ser mayor o igual a cero ($y \geq 0$).

Ejercicio resuelto ¿Cual es el valor de la expresión $\sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{16}$?

a) 2

b) 3

c) 7

d) 9

Paso 1: Debemos calcular los valores de las raíces en cuestión y luego sumarlas. Como vimos en las guías anteriores $2^2 = 4$, $3^2 = 9$ y $4^2 = 16$. Es decir, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$ y $\sqrt{16} = 4$.

Paso 2: Luego sumamos los términos calculados: $2 + 3 + 4 = 9$. Con esto, la alternativa correcta es $\boxed{\text{d}}$.

Propiedades de la raíz cuadrada:

Si $\sqrt{\mathbf{a}}$ y $\sqrt{\mathbf{b}}$ están definidas en los reales, entonces tenemos las siguientes propiedades:

- **Multiplicación de raíces de igual índice**:

$$\boxed{\sqrt{\mathbf{a}} \cdot \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{ab}}}$$

- **División de raíces de igual índice**:

$$\boxed{\frac{\sqrt{\mathbf{a}}}{\sqrt{\mathbf{b}}} = \sqrt{\frac{a}{b}}}$$

IMPORTANTE: Las propiedades de la raíz surgen del hecho de que cualquier raíz se puede escribir como una potencia elevada a una fracción: $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ o $\sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{3}{4}}$. Se ahondará sobre esto en la próxima guía.

Números Reales ($\mathbb{R}$) - (No entra en la prueba M1)

Conocemos ya los números racionales ($\mathbb{Q}$), pero además de estos existen los números irracionales ($\mathbb{Q}^*$ o I) los cuales son números que no se pueden escribir como fracciones (π y $\sqrt{2}$ por ejemplo). Estos conjuntos (Racionales e Irracionales) no comparten ningún elemento entre si (o sea que un número es racional o es irracional, nunca ambos a la vez).
El conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) se denota por la unión entre los racionales ($\mathbb{Q}$) y los irracionales ($\mathbb{Q}^*$).

$$\boxed{\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*}$$

- Las operaciones definidas anteriormente para el conjunto de los naturales y enteros, cumplen las mismas reglas en los reales.

Relación entre los conjuntos numéricos

Podemos observar que:

- $\mathbb{N}$ es subconjunto de $\mathbb{Z}$. ($\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$)
- Además, $\mathbb{Z}$ es subconjunto de $\mathbb{Q}$. ($\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$)
- Como dijimos anteriormente, $\mathbb{Q}^*$ y $\mathbb{Q}$ son mutuamente excluyentes, ningún elemento pertenece a los dos al mismo tiempo.
- Entre todos los conjuntos (vistos hasta ahora) forman a los Número Reales $\mathbb{R}$