



Cuerpos geométricos

Anteriormente vimos lo que era un polígono: Una figura geométrica plana limitada por líneas rectas. Acá vamos a definir un cuerpo geométrico como una figura geométrica, pero a diferencia del polígono, esta está en el espacio tridimensional. Esto significa que posee largo, ancho y alto.

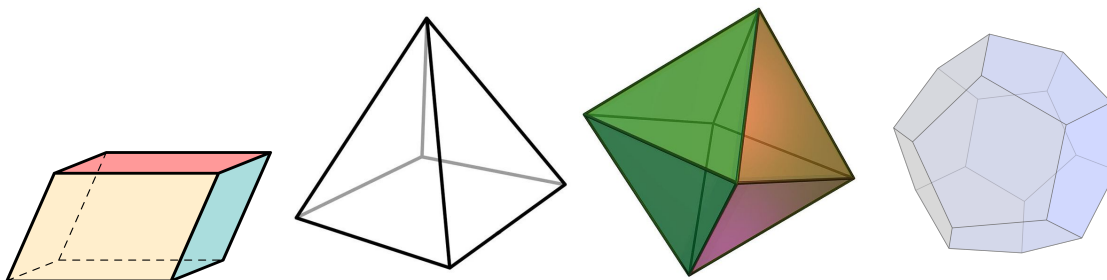
Los poliedros (*polys*, muchos, y *hedra*, cara), dentro de los cuerpos geométricos, son aquellos que sus caras son planas. Un cubo por ejemplo, es un poliedro de seis caras, una pirámide también es un poliedro, entre otros. Nosotros nos dedicaremos a estudiar en esta guía algunos poliedros. Antes de continuar, notar que al final de la guía hay un listado con dibujo, de diversos poliedros que aparecerán bastante en el desarrollo de esta materia.

Un cuerpo geométrico se compone por tres componentes:

- **Caras:** Son las partes planas del polígono.
- **Aristas:** Son segmentos de recta que son el “tope” entre dos caras vecinas.
- **Vértices:** Son los puntos de cruce entre aristas.

Una pregunta usual es: ¿Cuántos vértices, aristas o caras, tiene un poliedro? Depende del poliedro en verdad, algunos ejemplos comunes son:

- **Cubo y Paralelepípedo:** 6 caras, 8 vértices y 12 aristas.
- **Pirámide con base de n lados:** $n + 1$ caras, $2n$ aristas y $n + 1$ vértices.
- **Octaedro:** 8 caras, 12 aristas, 6 vértices.
- **Dodecahedro:** 12 caras, 30 aristas y 20 vértices.



De izquierda a derecha: Un paralelepípedo, una pirámide de base cuadrada, un octaedro y un dodecahedro.

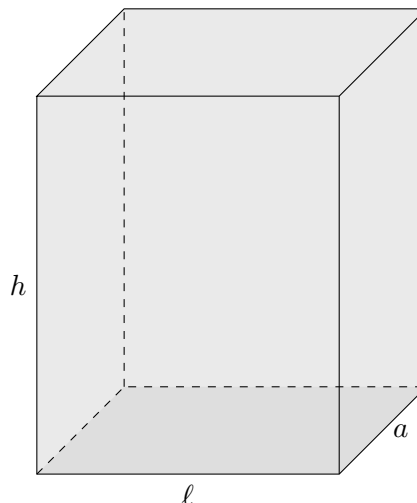
El objetivo general de esta guía se centrará en estudiar los volúmenes y superficies de algunos poliedros “tipo”, a continuación veremos sobre ello.

Volumen

¿Qué es el volumen? Esta pregunta puede ser algo difícil, sin embargo no es algo descabellado dado que ya hemos hecho una pregunta similar anteriormente, cuando nos preguntamos qué es el área. A continuación vamos a partir con lo “intuitivo” para luego ver las fórmulas de figuras más enrevesadas.

Al igual que en el caso del volumen, sólo sabemos calcular el volumen de una figura muy simple: Un paralelepípedo. ¿Cómo se calcula su volumen? La idea base acá podría ser pensar cuantos cubitos de $1 \times 1 \times 1$ caben en el mismo. Si este paralelepípedo tiene ancho a , largo ℓ y alto h , entonces su volumen será, intuitivamente...

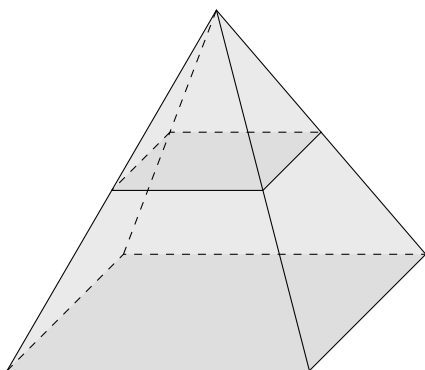
$$V = a \times \ell \times h$$



Anexo histórico (no entra en la prueba)

¿Cómo se pueden deducir las fórmulas para otros poliedros más complicados? La respuesta a esto es complicado, si bien se ha hecho desde la antigüedad el procedimiento (común) iba como sigue:

1. Tenemos una figura complicada
2. Vamos a intentar rellenar con paralelepípedos convenientes de volumen conocido.
3. Sumar todos los volúmenes.
4. Hacer esto con más paralelepípedos más pequeños cada vez, hasta que la “resolución” de la figura sea suficientemente buena como para no ver los “escalones” que se forman



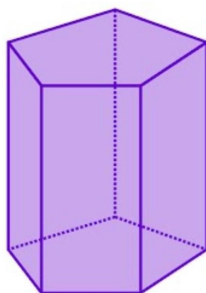
Al método en cuestión se le llamaba *método de Exhaustión*, y fue usado para calcular cosas complicadas por la humanidad hasta que Isaac Newton inventó el cálculo. El procedimiento anterior, si alguien se interesa en el tema, es (en corto) calcular lo que se conoce como integral, lo cual ciertamente no es materia para la prueba. Estos procedimientos fueron desarrollados intuitivamente por la humanidad desde bastante tiempo en la antigüedad, el llamado *Papiro Matemático de Moscú* tenía una fórmula correcta para un volumen de una pirámide truncada, y los griegos, que dedujeron una fórmula general para la diversas áreas y volúmenes irregulares. Junto con los nombres de los diversos poliedros que están en la tabla final, está el volumen de la misma.

Prismas

Un tipo de cuerpos geométricos que aparece muy comunmente son los “prismas”, estos son como tomar un polígono y lo “trasladamos”, como se mira en la figura.

El volumen de estas figuras es simplemente:

$$\begin{aligned} V &= A \times h \\ A &= \text{Área polígono de la base} \\ h &= \text{Altura del prisma} \end{aligned}$$

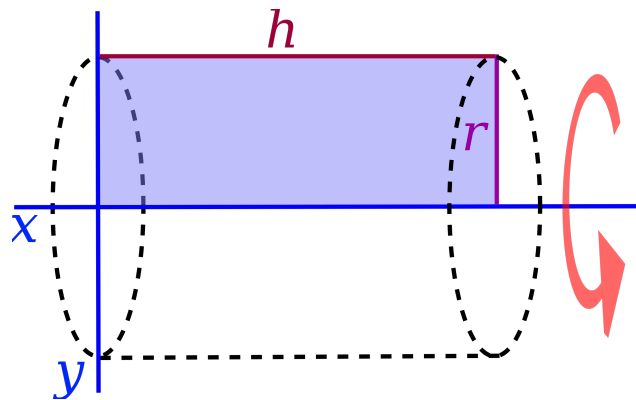


Si el polígono de la base tiene n lados y vértices, entonces un prisma tiene $n + 2$ caras, $3n$ aristas y $2n$ vértices. Además, a las caras superior e inferior se le llaman **bases**, mientras que a la superficie alrededor que las envuelve se le llama **manto**.

De entre los prismas usuales, hay uno que resalta de forma especial: Los llamados *prismas regulares*, que son aquellos que tienen **bases que son polígonos regulares**.

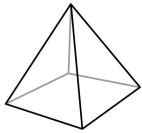
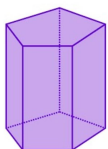
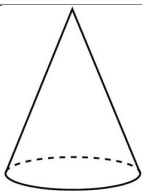
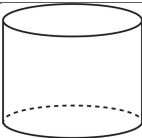
Sólidos de Revolución

Con un prisma, se parte de una figura geométrica y se “traslada” según una línea recta perpendicular a la misma. Con los sólidos de revolución se hace lo mismo pero haciendo que el polígono gire con respecto a algún eje coordenado. Si bien esto puede sonar algo extraño, pensemos en un rectángulo de lados r y h respectivamente, que hacemos girar con eje en un lado h . Entonces se obtiene un cuerpo geométrico, en este caso un cilindro! De altura h y radio basal r .



Con las herramientas que poseen a veces podrán calcular los volúmenes de sólidos de revolución donde puedan identificar figuras conocidas: ¿Qué figura obtienen al girar un rectángulo según alguno de sus lados? ¿O un cuadrado según su diagonal? ¡Los animamos a calcular en estos casos!

Tabla con Datos importantes

Nombre	Dibujo	Volumen	Anexos
Pirámide de base de n lados		$V = \frac{1}{3}Bh$ $B = \text{Área base}$ $h = \text{Altura}$	$\text{Caras} = n + 1$ $\text{Vértices} = n + 1$ $\text{Aristas} = 2n$
Prisma regular de Base B de n lados		$V = Bh$ $B = \text{Área Base}$ $h = \text{Altura}$	$A_{\text{Manto}} = nha$ $A_{\text{Base}} = n\frac{1}{2}pa$ $A_{\text{Total}} = 2A_{\text{Base}} + A_{\text{Manto}}$ $a = \text{Arista}$ $p = \text{Apotema base}$ $h = \text{Altura}$
Cono		$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $r = \text{Radio base}$ $h = \text{Altura cono}$	$A_{\text{Manto}} = \pi h \sqrt{h^2 + r^2}$ $A_{\text{Base}} = \pi r^2$ $A_{\text{Total}} = A_{\text{Base}} + A_{\text{Manto}}$ $r = \text{Radio base}$ $h = \text{Altura}$
Cilindro		$V = \pi r^2 h$ $r = \text{Radio base}$ $h = \text{Altura}$	$A_{\text{Base}} = \pi r^2$ $A_{\text{Manto}} = 2\pi r h$ $A_{\text{Superficie}} = 2A_{\text{Base}} + A_{\text{Manto}}$ $r = \text{Radio base}$ $h = \text{Altura}$

Resultado Anexo

¡Como dato anexo! Cuando se “mueve” la cara basal mientras se va subiendo, como en la siguiente imagen de monedas:



¡El volumen se mantiene! Es lo mismo que cuando en un triángulo se mueve la altura a lo largo de la base, mientras el largo de la base y de la altura sean el mismo, el área se mantendrá. Acá mientras **el área transversal y la altura se mantengan, el volumen se conservará**. A esto se le conoce como “*teorema de Cavalieri*”. Acá la idea sería que el número de monedas lo podemos contar por el alto de la torre, si movemos un poco cada moneda, esto no cambiará el número de monedas.