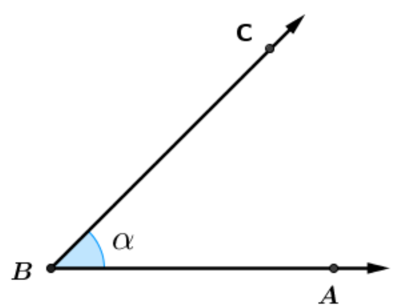
Ángulos y Triángulos

Definición de ángulo

En geometría, un ángulo se define como la apertura o parte del plano que queda determinada por dos rectas que parten desde un mismo punto. De manera gráfica, un ángulo quedaría definido de la siguiente manera:



$$\measuredangle\alpha, \measuredangle B \text{ ó } \measuredangle ABC$$

En este caso, las rectas BA y BC (ambas partes del mismo punto B) forman el ángulo a.

Clasificación de ángulos según su medida

Un ángulo se puede clasificar de acuerdo a sus grados de la siguiente forma:

- **Ángulo agudo:** Si mide menos de 90°.
- **Ángulo recto:** Si mide 90°.
- **Ángulo obtuso:** Si mide entre 90° y 180°.
- **Ángulo extendido:** Si mide 180°.
- **Ángulo completo:** Si mide 360°.

Clasificación de ángulos según posición

Un par de ángulos que comparten vértice se pueden clasificar en:

- **Ángulos consecutivos:** Par de ángulos que comparten un vértice y un lado.

- **Ángulos adyacentes:** Par de ángulos que comparten un vértice, un lado y que, además, sus otros lados forman una línea recta.
- **Ángulos opuestos por el vértice:** Par de ángulos que se crean al cruzar dos rectas y que, como dice su nombre, quedan de lado contrario haciendo que no compartan lados. Estos ángulos siempre tienen la misma medida.

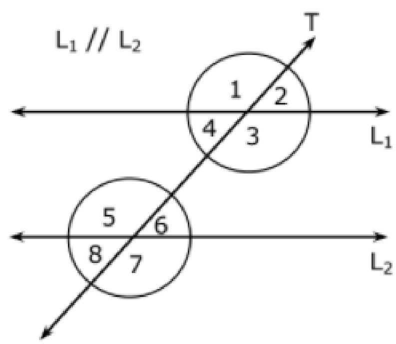
Clasificación de ángulos de acuerdo a la suma

Un par de ángulos se pueden clasificar según la suma de sus grados en:

- **Ángulos complementarios:** Un par de ángulos α y β son complementarios si suman 90°, además, se dice que β es el complemento de α o, al revés, α es el complemento de β.
- **Ángulos suplementarios:** Un par de ángulos α y β son suplementarios si suman 180°, además, se dice que β es el suplemento de α o, al revés, α es el suplemento de β.

Pares de Ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal

Cuando dos rectas paralelas son cortadas por una tercera recta (o transversal) se forman los siguientes ángulos:



Estos ángulos pueden ser clasificados en parejas de la siguiente manera, cumpliendo las siguientes igualdades.

- Ángulos alternos:

ALTERNOS EXTERNOS	ALTERNOS INTERNOS
$\measuredangle 1$ con $\measuredangle 7$	$\measuredangle 3$ con $\measuredangle 5$
$\measuredangle 2$ con $\measuredangle 8$	$\measuredangle 4$ con $\measuredangle 6$

Los ángulos alternos entre paralelas son de igual medida.

- Ángulos correspondientes:

$\measuredangle 1$ con $\measuredangle 5$	$\measuredangle 2$ con $\measuredangle 6$	$\measuredangle 3$ con $\measuredangle 7$	$\measuredangle 4$ con $\measuredangle 8$

Los ángulos correspondientes entre paralelas son de igual medida.

- Ángulos colaterales:

COLATERALES EXTERNOS	COLATERALES INTERNOS
$\measuredangle 1$ con $\measuredangle 8$	$\measuredangle 4$ con $\measuredangle 5$
$\measuredangle 2$ con $\measuredangle 7$	$\measuredangle 3$ con $\measuredangle 6$

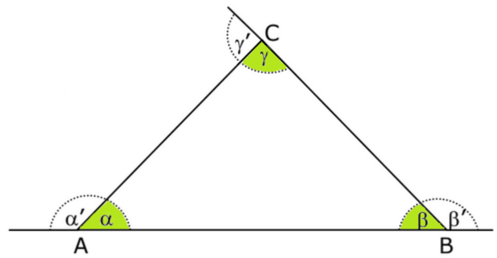
Los ángulos colaterales entre paralelas son suplementarios, es decir suman 180°.

Teoremas de los ángulos en un triángulo

Los distintos ángulos que se pueden medir en un triángulo cumplen con **3 reglas** o teoremas:

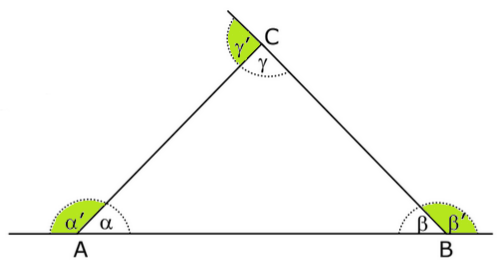
- Suma de los ángulos interiores:
  La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo suman 180°. En este caso:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$



- Suma de los ángulos exteriores:
  La suma de los ángulos exteriores de cualquier triángulo siempre suman 360°. En este caso:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$$

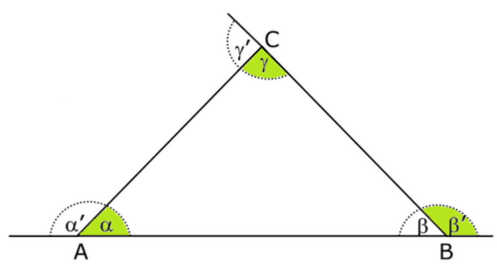


- Relación entre ángulos exteriores e interiores:
  Cada ángulo exterior mide lo mismo que la suma de los dos ángulos interiores **no adyacentes**. En el dibujo:

$$\beta' = \alpha + \gamma$$

  Lo que es válido para los otros ángulos:

$$\alpha' = \beta + \gamma, \quad \gamma' = \alpha + \beta$$



Clasificación de triángulos

Los triángulos se pueden clasificar de dos formas: **según sus lados y según sus ángulos**.

Según sus lados

Esta clasificación depende de si el triángulo tiene todos sus lados distintos, sólo dos iguales o todos iguales:

- Triángulo Equilátero:
  Tiene **todos** sus lados iguales
- Triángulo Isósceles:
  Tiene **sólo dos** lados iguales

- Triángulo Escaleno:
  No tiene lados iguales, es decir, son todos distintos.

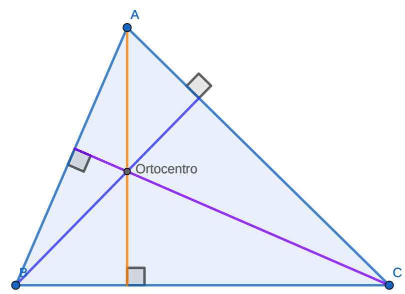
Según sus ángulos

Esta clasificación depende de si todos los ángulos del triángulo son agudos, o si tiene un ángulo recto u obtuso.

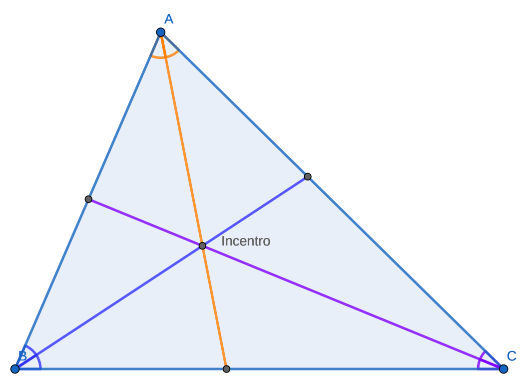
- Triángulo Acutángulo:
  Sus tres ángulos son **agudos**.
- Triángulo Rectángulo:
  Tiene un ángulo **recto**.
- Triángulo Obtusángulo:
  Tiene un ángulo **obtuso**

Partes notables del Triángulo:

Definición 1. Altura Dado un triángulo ABC, una altura con respecto a un vértice es el segmento de recta que une el vértice con el lado opuesto al mismo y es perpendicular al lado opuesto. Usualmente se señala con la letra h de *height* (altura en inglés).
Esta recta notable es de gran importancia para el cálculo del área de un triángulo (que dejaremos en un anexo al final sobre las áreas de triángulos y cuadrados).



Definición 2. Bisectriz Dado un triángulo ABC y un vértice del mismo, la bisectriz del ángulo que está en el vértice es la recta que divide al ángulo que está en dicho vértice en dos partes iguales.
Esto tendrá gran importancia cuando veamos los círculos y su relación con los triángulos. Es decir, lo dejaremos para después.



Definición 3. Ortocentro El ortocentro es la intersección de las tres alturas del triángulo

Definición 4. Incentro El incentro es la intersección de las bisectrices del triángulo.

Teoremas importantes de los triángulos Rectángulos

A continuación veremos teoremas relativos a triángulos rectángulos y las medidas de sus lados o rectas relacionadas con los mismos. De todos los teoremas que poseemos, uno de los más importantes que hay es el teorema de pitágoras. Que es el siguiente:

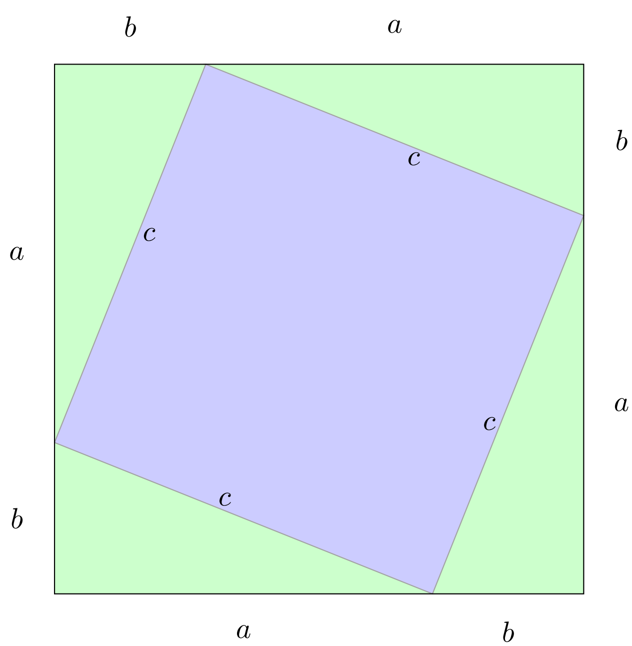
Teorema 1. ***Teorema de Pitágoras***

Dado un triángulo rectángulo, donde sus lados a y b son catetos y c la hipotenusa, se tiene que:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Entonces con este teorema tenemos una potente herramienta para poder conocer el tercer lado de un triángulo en particular, a pesar de su simpleza, tiene innumerables aplicaciones en diversos ámbitos. ¿Cómo sabemos que esta fórmula es cierta? La verdad hay bastantes formas de descubrirlo, como dato: En la edad media para alcanzar el grado de "*Magíster matheseos*" había que demostrar porque se cumplía el teorema de pitagoras. Una forma más o menos simple de hacerlo es lo siguiente:

¿De donde viene este teorema?



Podemos calcular el área del cuadrado azul de dos formas: Directamente con el cuadrado de los lados, del mismo (esto sería, c^2) y la otra sería calcular el área del cuadrado grande y restarle el área de los triángulos verdes que lo rodean. Como el área de un cuadrado es el lado al cuadrado, y el área de un triángulo es $\frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}$, obtenemos que por un lado el área es:

- Cuadrado solo:
$$c^2$$
- Cuadrado grande y restamos los triángulos:
$$(a+b)^2 - 4\frac{ab}{2} = a^2 + b^2$$

Como ambos son el área del cuadrado azul, tendremos que son iguales estas dos cantidades, así:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Como recuerdo, en una parte allí usamos que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, entonces se restaba el término de $2ab$ y se obtienen que quedan los cuadrados solos! Hay numerosas formas de *demostrar* el teorema de pitágoras, llegando incluso a haber libros enteros con demostraciones de como se obtiene la fórmula, desde formas puramente algebraicas hasta formas geométricas como la que acabamos de ver (una incluso la hizo un presidente de Estados Unidos[1]).

Gracias a este teorema siempre que tengamos un triángulo rectángulo **sabiendo dos lados podremos saber el otro**, ya que si sabemos por ejemplo un cateto a y la hipotenusa c, podemos obtener que:

[1] `https://www.gaussianos.com/la-demostracion-del-presidente/` aquí hay un pequeño artículo sobre dicha demostración. Para poder realizarla se necesita conocer la fórmula del área de un trapecio.

$$a^2 + b^2 = c^2 \implies b^2 = c^2 - a^2 \implies b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Cómo último dato de vital importancia: Usualmente estos números que obtenemos por aplicar el teorema de pitágoras pueden ser números feos o difíciles de manipular. Por ejemplo, en un triángulo rectángulo isósceles rectángulo con catetos de lado 1, al aplicar el teorema de pitágoras, obtenemos que la hipotenusa es $\sqrt{2}$. Entonces surge una pregunta inmediata: ¿Se pueden obtener números *bonitos* con el teorema de pitágoras? Y con bonitos más que nada nos referimos a números naturales. La respuesta es que *sí*, por ejemplo un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 cumple que su hipotenusa tiene largo 5. A las ternas (conjuntos de tres números) de números positivos que cumplen con la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$ se les llama *tríos pitagóricos*.

Con una materia que verán próximamente (semejanza) se puede obtener este resultado por otro camino que puede ser más simple, sin embargo como no lo han visto aún, decidimos mostrar esta manera de deducir el teorema.

Algunos tríos numéricos cumplen esta relación. A estos se les conoce como ”tríos pitagóricos”.

Tríos pitagóricos		
a	**b**	**c**
3	4	5
5	12	13
7	24	25
8	15	17
20	21	29
x	x	$x\sqrt{2}$
x	$2x$	$x\sqrt{5}$

Otros

Aquí pondremos un par de definiciones que podrían servir para no marearse tanto:

Las definiciones antes mencionadas podrán parecer un poco extrañas, sobre todo porque usa términos como "recta" y "segmento". Por esto vamos a ver la diferencia entre ambos y una propiedad que las relaciona:

- **Recta**: Es una linea infinita que no se curva en ninguna parte.
- **Segmento**: Es un "corte" de una recta. Es una parte de la recta pero solo entre dos extremos (por ejemplo, en la recta numérica, $[0, 1]$ es un segmento).
- **Relación:** Todo segmento se puede extender a una recta de forma única.

¿Cómo sabemos el último punto? Es una cosa que se llama **axioma**, que es... ¡Una verdad que se asume para partir con todo en matemáticas! En particular las nociones de geometría que están viendo aquí son de lo que se llama *geometría euclidiana*, ya que fue descrita por primera vez por ese matemático griego.

Concepto de área y perímetro

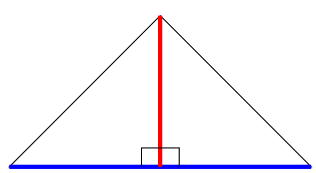
A continuación una brevísima definición de área y de perímetro que se usan bastante. Además de un par de fórmulas básicas:

- **Perímetro:** Es el largo del borde de la figura. Sus unidades en la vida real son de longitud, para calcularlo basta sumar el largo de cada lado de la figura en cuestión (en el caso de polígonos). En el caso del círculo su cálculo es un poco más complicado y se verá en la próxima guía.
- **Área:** El area de una figura plana (es decir, $2D$) es la parte del plano que ocupa la misma. Para calcularlo veremos un par de fórmulas básicas para calcular el área de figuras simples:

$$\text{Área rectángulo lados } a \text{ y } b: \qquad A = ab$$

$$\text{Área de un triángulo de base } b \text{ y altura } h: \qquad A = \frac{1}{2}hb$$

¿Qué son la base y la altura? La altura ya la vimos antes, la base es el lado del triángulo al cual llega la altura (que es la contraria al vértice en cuestión).



Aquí un ejemplo dibujístico, en rojo la altura y en azul la base. Como dato importante en un triángulo rectángulo la altura y la base pueden ser los dos catetos! En dicho caso el área se puede ver como la mitad de la multiplicación de los catetos.

La fórmula del área del triángulo viene de que se puede ver como un rectángulo pero tomando solo la mitad.