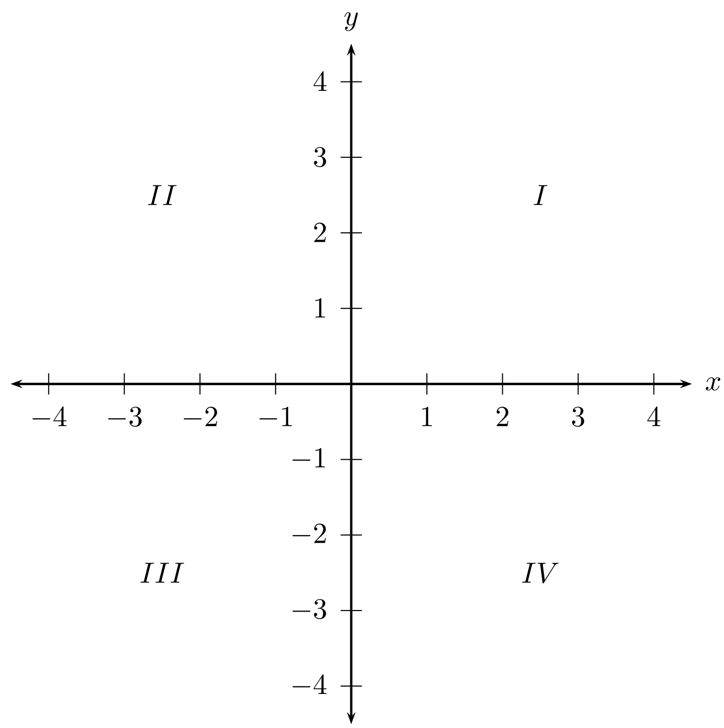
Plano Cartesiano y vectores

¿Qué es el plano cartesiano?



Como se mencionó anteriormente, el plano cartesiano es una representación que nos permite graficar distintos puntos y elementos geométricos en él. Se compone de dos ejes, el eje x conocido como el de las abscisas y el eje y, también conocido como el de las ordenadas. Además, existe un punto en el cual estos ejes se intersectan, conocido como origen y corresponde al punto $(0, 0)$, el cual aprenderemos a interpretar más adelante.

Antes de continuar con la interpretación del plano cartesiano, debemos definir qué es un par ordenado.

Par ordenado: Se define como par ordenado a los puntos (a, b) tales que a, b son números reales. En palabras simples, a es el valor que toma en el eje x y b el valor que toma en el eje y.

Por otro lado, también podemos dividir este plano en 4 partes, conocidas como cuadrantes. A continuación estudiaremos sus características.

- **Primer cuadrante (I Cuadrante):** En este cuadrante se encuentran todos los pares ordenados (a, b) cuyas coordenadas son **positivas**, es decir, tanto a como b son **positivos**.
- **Segundo cuadrante (II Cuadrante):** En este cuadrante se agrupan todos los pares ordenados (a, b) tales que a es un valor **negativo** y b un valor **positivo**.
- **Tercer cuadrante (III Cuadrante):** En este cuadrante se encuentran todos los pares ordenados (a, b) cuyas coordenadas son **negativas**, es decir, tanto a como b son **negativos.**
- **Cuarto cuadrante (IV Cuadrante):** En este cuadrante se agrupan todos los pares ordenados (a, b) tales que a es un valor **positivo** y b un valor **negativos**.

Una forma de recordarlos, es aprender donde esta el primer cuadrante y ver que el resto de los cuadrantes se nombran en sentido anti-horario (muchas cosas en matemáticas siguen el sentido anti-horario).

Observación: Los pares ordenados del estilo $(a, 0)$ y $(0, b)$, con $a, b \neq 0$, no se encuentran en ningún cuadrante, sino que se encuentran sobre los ejes x e y respectivamente.

Definición de vector

En matemática, se denomina **vector** a un segmento (o flecha) que va desde un punto A a un punto B, tal como muestra la figura 1. Como pueden ver, este segmento posee ciertos elementos que lo diferencian de los otros segmentos y que lo caracterizan como un vector, los que corresponden a **la magnitud**, **la dirección** y **al sentido**.

Por lo mismo, como estos 3 elementos son los que caracterizan a los vectores, es importante comprender el significado de cada uno.

En primer lugar, **la magnitud (o modulo)** hace referencia al tamaño del vector, es decir a cuánto mide.

En segundo lugar, **la dirección** se relaciona a la recta o línea imaginaria sobre la cual está situado nuestro vector.

Por último, **el sentido** se refiere hacia qué lado está dirigido el vector. En otras palabras, hacia qué lado de la dirección apunta la flecha del vector.

Así, por ejemplo, si estuviésemos viajando en auto desde Santiago hacia Arica y modeláramos nuestro movimiento como un vector, podríamos decir que este vector tiene dirección norte-sur (la línea sobre la cual trazamos nuestra flecha) y sentido norte, ya que nos estamos moviendo hacia el norte.

Además, es posible apreciar que el vector $\vec{AB}$ de la figura 1 parte desde el punto A, también denominado origen, y llega hasta el punto B o extremo. En general, cuando hablemos de vectores como $\vec{AB}$ lo denominaremos en función de las coordenadas del punto B, imaginándonos que situamos el punto A en el origen del plano cartesiano.

Adicionalmente es usual llamar **escalar** a los números que operen junto a un vector, específicamente cuando estos son escalados como se vera más adelante en la guía.

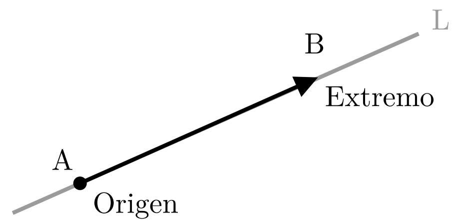
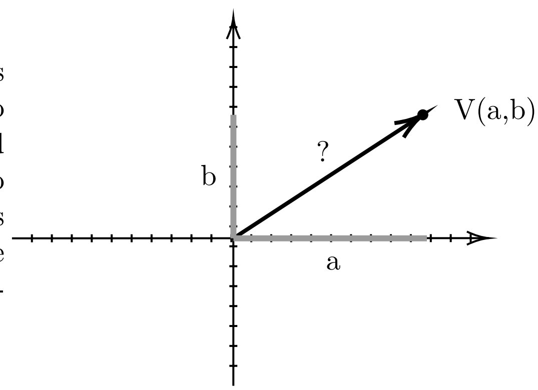


Figura 1: Partes de un vector

Teorema de Pitágoras y la magnitud de un vector

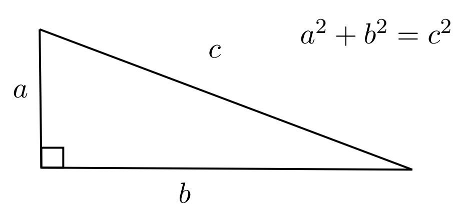
Para calcular la magnitud de un vector lo que hacemos es calcular la distancia entre el origen $(0,0)$ y el punto V de coordenadas (a,b) que lo caracteriza. La dificultad al momento de obtener esta distancia es que en el plano cartesiano sólo tenemos las medidas de las distancias horizontales (eje X) y verticales (eje Y) a las cuales se encuentra este punto. Para calcular esta distancia utilizamos el teorema de Pitágoras.

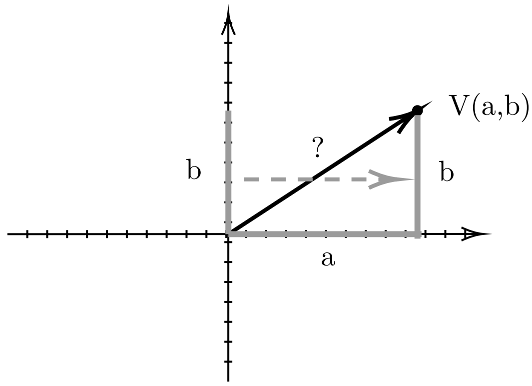


El teorema de Pitágoras dice que si tenemos un triángulo rectángulo, es decir, un triángulo donde uno de sus ángulos es recto (90°), del cual sabemos el valor de sólo dos de sus lados, podemos calcular el largo del lado que nos falta con la fórmula:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Donde a y b son los **catetos**: los lados que forman el ángulo recto, y c es la hipotenusa: el lado al frente del ángulo recto.





Conociendo esta relación, sólo tenemos que darnos cuenta que las distancias horizontal y vertical a la que está nuestro punto **V** del origen forman un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la magnitud. Por lo tanto la magnitud del vector estará relacionada con sus coordenadas de la siguiente forma:

$$|V|^2 = a^2 + b^2$$

Y con esto entonces podemos aplicar raíz cuadrada y despejar:

$$|V| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

De aquí en adelante cuando un vector se defina como $\vec{W} = (p, q)$ se asume que este vector tiene como origen el punto (0,0) y como extremo o punto final (p, q)

Operatoria entre vectores

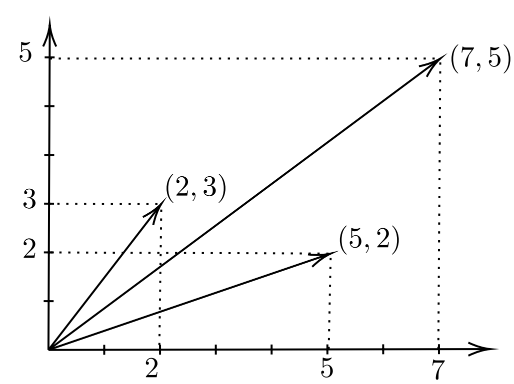
Adición y sustracción

Si se tienen dos vectores $\vec{A} = (a, b)$ y $\vec{B} = (c, d)$, estos se pueden sumar y restar componente por componente, es decir el componente del eje x de $\vec{A}$ con el del eje x de $\vec{B}$ y el componente del eje y de $\vec{A}$ con el del eje y de $\vec{B}$. Esto es:

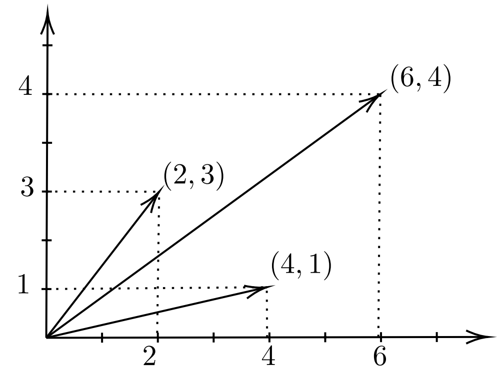
$$\vec{A} + \vec{B} = (a + c, b + d)$$
$$\vec{A} - \vec{B} = (a - c, b - d)$$

También se puede calcular con el plano, poniendo el primer vector $\vec{A}$ desde el origen y luego agregando $\vec{B}$ desde el punto donde termina $\vec{A}$, creando un vector nuevo desde el origen hasta el final de $\vec{B}$, esto quedará más claro con los siguientes ejemplos:

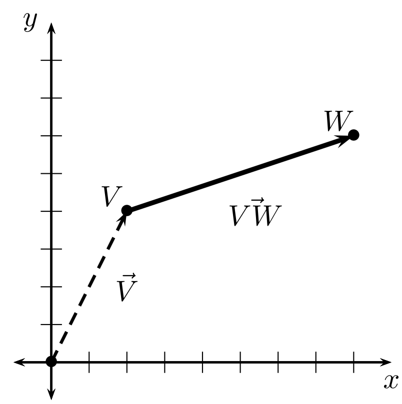
Aquí se tiene un primer vector $\vec{A} = (2, 3)$ y un segundo vector $\vec{B} = (5, 2)$, si se suman ambos comoponentes en x y ambos en y, queda un nuevo vector $\vec{C} = (7, 5)$ como el del dibujo.



En siguiente ejemplo se tiene un vector $\vec{D} = (6,4)$ al cual se le quiere restar otro vector $\vec{E} = (4,1)$, poniendo el segundo vector en la punta de $\vec{D}$ y hacia abajo, ya que la resta le cambia el signo, se puede llegar al nuevo vector $\vec{F} = (2,3)$.

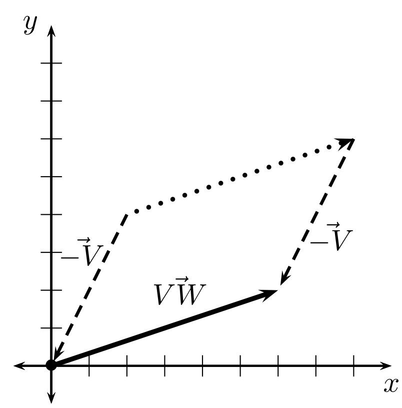


Una de las operaciones más comunes es trasladar un vector en el espacio al centro del plano cartesiano, supongamos $V = (a,b)$ y $W = (c,d)$ 2 puntos en el plano cartesiano y nos interesa conocer el vector $V\vec{W}$.



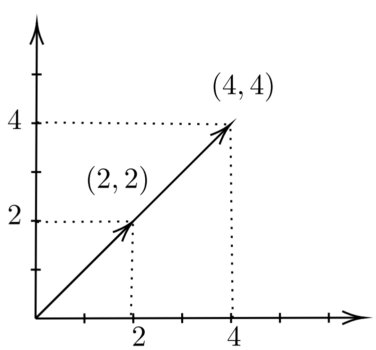
Como se puede ver en la imagen, esto corresponde a trasladar el punto V (el origen del vector) al centro del plano cartesiano, lo que se logra sumándole $-\vec{V}$ a este punto.

Luego tenemos que mover el punto W por la mismas cantidad para que la magnitud, dirección y sentido no cambien (los 3 criterios para que 2 vectores sean iguales), por lo cual también se le suma $-\vec{V}$ resultando en la segunda imagen.



Matemáticamente esto seria equivalente a $V\vec{W} = \vec{W} - \vec{V} = (c,d) - (a,b) = (c-a, d-b)$.

Multiplicación o escalamiento



Si se tiene un vector $\vec{A} = (a,b)$, se puede escalar por un número real x, multiplicando ambas componentes de este. Es decir:

$$x \cdot \vec{A} = (xa, xb)$$

En el plano, al hacer esta operación el vector sufre un escalamiento haciendo que este crezca o decrezca. En este ejemplo podemos ver que al aplicar el escalamiento $\vec{G} = 2 \cdot (2,2)$ el vector se vuelve el doble de lo que era originalmente.

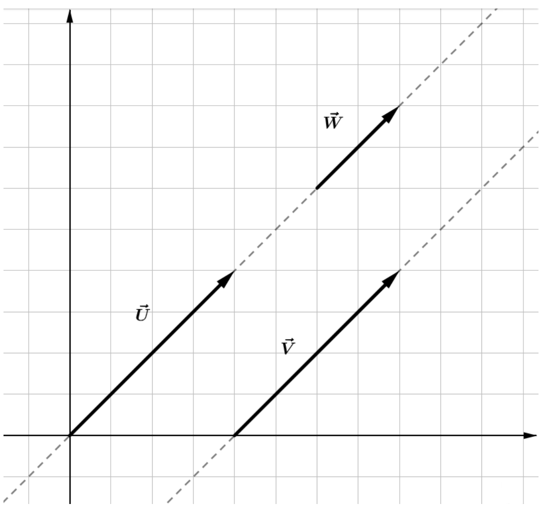
También diremos que un vector se amplifica si el modulo del escalar x es mayor a 1, se reduce cuando es menor a 1 y se invierte el sentido del vector si el signo de x es negativo.

Paralelismo y perpendicularidad

Estudiaremos ahora los conceptos de paralelismo y perpendicularidad, para ello recordemos el concepto de dirección de un vector (explicado anteriormente) que se puede entender más o menos como la inclinación que tiene este (¡No nos interesa hacia a donde apunta!), teniendo claro esto podemos pensar que dos vectores son paralelos si tienen la misma dirección y son perpendiculares si sus direcciones se intersectan en 90°.

Paralelismo

Consideremos los vectores $\vec{A} = (a, b)$ y $\vec{B} = (c, d)$ en el plano cartesiano, diremos que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos si $\dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$ (cuando a y c no son nulos). Gráficamente en el plano cartesiano, esto se vería como que las lineas que contienen a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ nunca se intersectan.

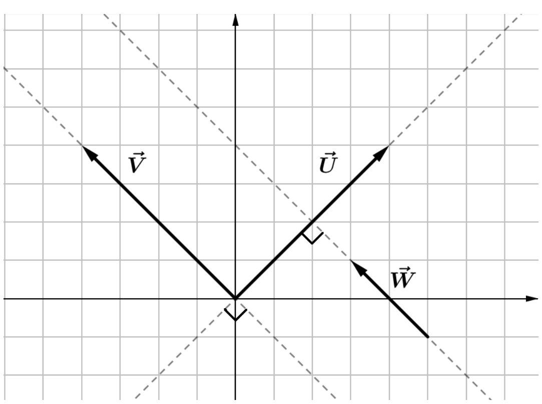


De la imagen del costado, podemos ver que los vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$ son paralelos dado que las rectas que contienen estos vectores no se intersectan.

También desde la misma imagen podemos ver que los vectores $\vec{U}$ y $\vec{W}$ están contenidos en la misma recta, esto significa que el vector $\vec{U}$ es el resultado de multiplicar el vector $\vec{W}$ por un número real o viceversa, además de ser paralelos estos 2 vectores.

Perpendicularidad

Consideremos los vectores $\vec{A} = (a, b)$ y $\vec{B} = (c, d)$ en el plano cartesiano, diremos que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares si $a \cdot c + b \cdot d = 0$. Gráficamente en el plano cartesiano esto se vería en que las intersecciones de las direcciones de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se intersectan en un ángulo de 90°.



De la imagen del costado, podemos ver que los vectores $\vec{V}$ y $\vec{W}$ son ambos perpendiculares al vector $\vec{U}$ dado que ambos tienen una dirección que forma un ángulo de 90° con respecto a la dirección de $\vec{U}$