

## Función cuadrática

Continuando con más funciones, en esta ocasión veremos una muy conocida, la cual corresponde a la función cuadrática.

### Función Cuadrática

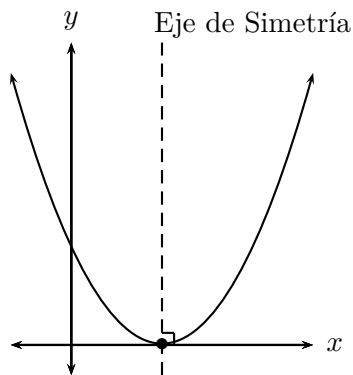
Una función cuadrática es de la forma:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son coeficientes reales. Recordando que una ecuación cuadrática es de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , entonces podemos ver la función como una ecuación cuadrática en donde la  $x$  es una variable, y lo que en realidad estamos buscando es cuáles son los valores que puede tomar al evaluarla según la fórmula. A continuación, veremos esto gráficamente para entenderlo mejor.

Es importante mencionar que la función cuadrática cumple lo siguiente:

- Su dominio son los reales. ( $Dom(f) = \mathbb{R}$ )
- Su Codominio son los reales. ( $Codom(f) = \mathbb{R}$ )
- El recorrido de  $f$  depende de la concavidad que tenga la función, es decir, si es cóncava (cuando la parábola es una cara triste o más formalmente, cuando se abre hacia abajo) o convexa (cuando la parábola es una cara feliz o cuando se abre hacia arriba)
- La función puede tener ceros.
- Esta función es continua en todo su dominio.
- El crecimiento también se divide por intervalos y dependerá de su concavidad.

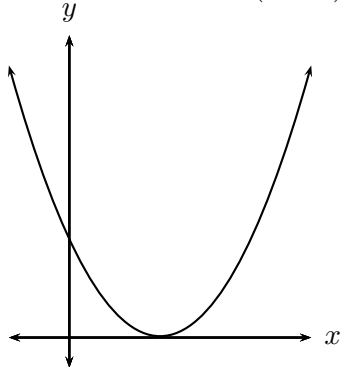
Una función cuadrática se representa gráficamente a través de una parábola, en la cual podemos identificar un **eje de simetría**, su **concavidad**, el **vértice**, y sus **intersecciones con el eje x e y**. Veamos qué significan estos conceptos.

**Eje de simetría:** Una parábola cumple la propiedad de ser simétrica, lo que significa que si dibujáramos una recta que pasa por su centro, obtendremos dos curvas iguales, como si se miraran una a otra frente a un espejo. Esta recta, es de hecho lo que se denomina un **eje de simetría**. En el caso de funciones cuadráticas, este eje siempre será paralelo al eje y, tal como se muestra en la siguiente figura.

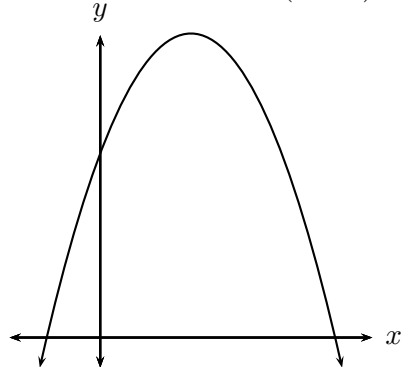


**Concavidad:** Depende del coeficiente  $a$ , y corresponde básicamente a si la parábola apunta hacia arriba o hacia abajo. En concreto, y dicho formalmente, tenemos dos tipos de concavidad:

**Parábola Convexa ( $a > 0$ )**



**Parábola Concava ( $a < 0$ )**



**Vértice:** El vértice de una parábola es un punto que está justo en medio de la curva, por lo que **pasa por el eje de simetría**. Lo podemos calcular a través de la siguiente fórmula:

$$V = \left( \frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right)$$

O equivalentemente, a través de la fórmula:

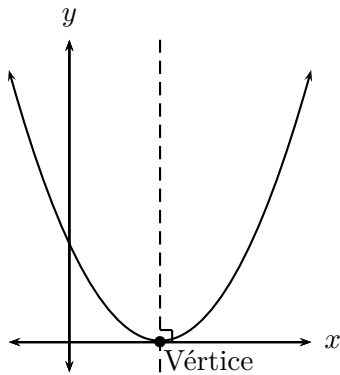
$$V = \left( \frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right) = \left( \frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$$

En el contexto de función cuadrática, este punto puede representar el máximo o mínimo de ella. ¿Cuál es cuál?

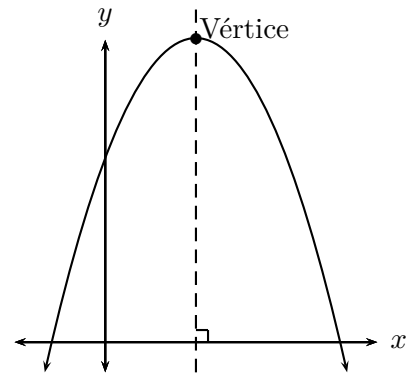
- Parábola convexa ( $a > 0$ ): el vértice será el mínimo de la función.
- Parábola concava ( $a < 0$ ): el vértice será el máximo de la función.

Lo anterior lo podemos ver claramente de manera gráfica:

**Parábola Cóncava ( $a > 0$ )**



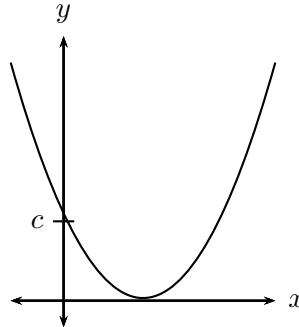
**Parábola Convexa ( $a < 0$ )**



Tip: Para recordar en que dirección va a estar su parábola les puede servir lo siguiente:

- Si  $a$  es positivo ( $a > 0$ ), la parábola también “es positiva”, es decir, tiene la forma de una cara feliz ☺.
- Si  $a$  es negativo ( $a < 0$ ), la parábola también “es negativa”, es decir, tiene la forma de una cara triste ☹.

**Intersección con el eje y:** La parábola de una función cuadrática siempre interseca el eje y en punto  $(0, c)$ , es decir, en  $y = c$ .



**Ceros de la función:** Se les llama ceros de la función a los puntos que intersectan al eje x. Además, podemos verlo de manera tal que estos puntos corresponden a las soluciones de la ecuación cuadrática asociada. Es decir, los valores de  $x$  tales que  $y = 0$  (y por tanto, podemos calcularlos con las mismas herramientas que usamos para encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática). Recordemos qué tipo de soluciones podemos tener según su determinante:

- Si  $\Delta = 0$  : las soluciones serán iguales y reales.
- Si  $\Delta > 0$  : las soluciones serán diferentes y reales.
- Si  $\Delta < 0$  : las soluciones serán imaginarias.

Gráficamente, tendremos que:

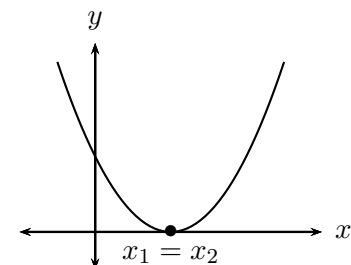
- Si las soluciones  $x_1, x_2$  son reales (independiente de si son iguales o diferentes), entonces intersectan al

eje  $x$ , y por lo tanto,  $x_1, x_2$  serán los ceros de la función. En caso de que sean iguales tendremos que el vértice de la función se encuentra justo sobre el eje  $x$ , y que además el vértice es igual a las soluciones.

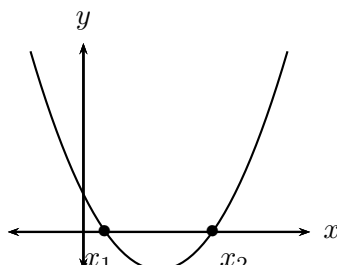
- Si las soluciones  $x_1, x_2$  son imaginarias, no intersectan al eje  $x$ , y por lo tanto, no serán ceros de la función.

A continuación, podemos ver esto de manera gráfica.

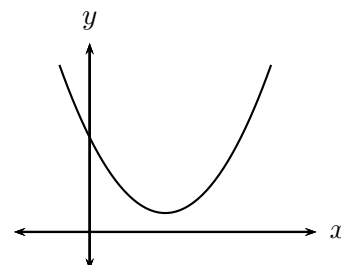
### Ceros de una función cuadrática



Dos soluciones iguales



Dos soluciones distintas



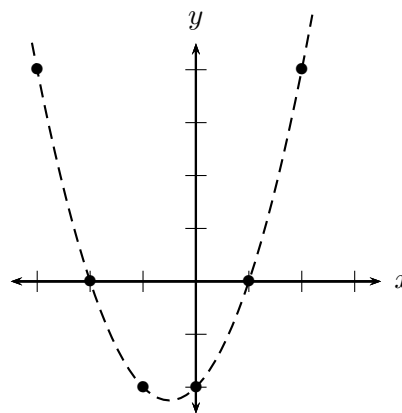
Sin soluciones reales

## Ejemplo de aplicación

Sea la función  $f(x) = x^2 + x - 2$ . Veamos cómo luce su gráfica, y cómo encontramos el eje de simetría, concavidad, vértice e intersecciones con los ejes.

Para graficar una función podemos evaluarla para diferentes valores de  $x$ , y así conocer dónde estarían sus respectivos puntos con respecto al eje  $y$ . Una manera útil y sencilla de hacerlo, es llenando una tabla como la que se muestra a continuación. Además graficando y uniendo los puntos obtenidos se puede construir finalmente la gráfica buscada.

| $x$ | $f(x) = y$                       |
|-----|----------------------------------|
| -3  | $f(-3) = (-3)^2 + (-3) - 2 = 4$  |
| -2  | $f(-2) = (-2)^2 + (-2) - 2 = 0$  |
| -1  | $f(-1) = (-1)^2 + (-1) - 2 = -2$ |
| 0   | $f(0) = (0)^2 + (0) - 2 = -2$    |
| 1   | $f(1) = (1)^2 + (1) - 2 = 0$     |
| 2   | $f(2) = (2)^2 + (2) - 2 = 4$     |
| 3   | $f(3) = (3)^2 + (3) - 2 = 10$    |



Si bien esta es una buena metodología, es un proceso muy extenso si es que queremos saber el valor de muchos otros puntos. Así que el conocer los valores del eje de simetría, vértice, concavidad y/o intersecciones con los ejes, nos ayudará a ahorrarnos tiempo y nos dará más información. Veamos cómo encontrarlos:

**Concavidad:** Recordando la forma de una función cuadrática, lo primero que debemos hacer es identificar los coeficientes.

| Coeficientes |         |          |
|--------------|---------|----------|
| $a = 1$      | $b = 1$ | $c = -2$ |

Luego, debemos mirar el signo de  $a$ . En este caso, como  $a = 1$ , es positivo, y por tanto la parábola será cóncava.

**Vértice:** Para encontrar el vértice de la función solo basta reemplazar los valores de los coeficientes encontrados anteriormente, en cualquiera de las dos fórmulas. Luego, nos queda:

$$V = \left( \frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right) = \left( \frac{-(1)}{2 \cdot (1)}, \frac{4 \cdot (1) \cdot (-2) - (1)^2}{4 \cdot (1)} \right) = \left( \frac{-1}{2}, \frac{-8 - 1}{4} \right) = \left( \frac{-1}{2}, \frac{-9}{4} \right)$$

Y entonces, el vértice será el punto  $\left( -\frac{1}{2}, \frac{-9}{4} \right)$ , en donde  $-\frac{1}{2}$  será la coordenada  $x$ , y el punto  $\frac{-9}{4}$  será la coordenada en  $y$ .

*\*Notemos que como la función es cóncava, el vértice será el mínimo.*

**Eje de simetría:** Recordemos que el eje de simetría es una recta que pasa por el vértice, y es paralela con respecto al el eje  $y$ . Teniendo en cuenta eso, y que conocemos el vértice de esta función, solo nos basta tomar su coordenada  $x$ . Entonces el eje de simetría será:

$$x = \text{coordenada } x \text{ del vértice} = \frac{-1}{2}$$

**Intersección con el eje  $y$ :** La intersección con el eje  $y$  la podemos encontrar a través del coeficiente  $c$  antes encontrado. En este caso será:

$$y = \text{coeficiente } c \text{ de la función} = -2$$

**Ceros de la función:** Los ceros de la función los encontramos a través de la ecuación asociada. En este caso:  $x^2 + x - 2 = 0$ . Viendo la forma que tiene, y recordando lo que sabemos de ecuaciones cuadráticas, podemos resolverla a través de factorización o usando directamente la fórmula.

**Método 1: factorización** Notamos que en este ejemplo la función tiene la forma de un binomio con factor común. Así que nos queda:

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

Y viendo la ecuación de esa manera, podemos extraer fácilmente que las soluciones son:  $x = 1$  y  $x = -2$ .

**Método 2: fórmula** Utilizamos los coeficientes encontrados anteriormente en la fórmula de ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-2)}}{2 \cdot (1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

Evaluando el símbolo  $\pm$  obtenemos:

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1, x_2 = \frac{-1 - 3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Notamos que con ambos métodos llegamos a que las soluciones a la ecuación cuadrática son  $x = 1$  y  $x = -2$ . Entonces, estos corresponderán a los ceros de la función (los puntos en donde la gráfica interseca al eje  $x$ ).

