Funciones

En esta guía estudiaremos una de las herramientas matemáticas más importantes que existen: *las funciones.* Sin estas no se podría haber construido todo lo que es el cálculo, y que se aplica todos los días al momento de realizar construcciones, o de hacer algoritmos para que las redes públicas funciones, o de hacer análisis de cómo evoluciona una cierta población (posiblemente en peligro de extinción), etcetera etcetera... Entonces partamos con lo más básico ¿Qué es una función?

¿Qué es una función?

Informalmente, una función es una máquina. Una máquina que toma una materia prima, y la convierte en otra cosa. Ahora bien, como toda máquina, hay que cuidarla, y por lo tanto no se le podrá ingresar cualquier cosa, pero si tu sabes que es algo que ella acepta debe entonces poder transformarlo. Por otro lado, una máquina que no tienes idea qué te va a devolver puede ser difícil de utilizar, por lo tanto una función debe cumplir que si yo le ingreso un elemento, esta siempre me debe devolver lo mismo.

Vamos formalizando un poco más la definición anterior. Dijimos que una función es una máquina, es verdad. Pero lo que a mí me importa realmente es la asociación que se genera entre el elemento que ingresa y el que sale. Es decir, no me importa tanto cómo es la máquina y que forma tiene, sino que las reales pregunta son ¿Puedo ingresarle este elemento? y ¿Qué elemento me va a devolver si es que yo le ingreso este?.

Ahora bien formal:

Una función f consta de tres elementos, el primero es el **Dominio**, este corresponde al conjunto de todos los elementos que la función debe poder aceptar. El segundo es el **Codominio**, este corresponde al conjunto donde llega la función (ya ahondaremos un poco más en esto). El último es **la regla** que asocia cada elemento x del dominio, a un único elemento y del codominio. Toda esta información se sintetiza en la siguiente frase matemática:

$$\text{Sea } f : A \to B \text{ función tal que a } x \text{ se le asocia } f(x)$$

o bien

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & B \\ & x & \to & f(x) \end{array}$$

Ambas expresiones representan que la regla de asociación está dada por $x \to f(x)$, que A es el dominio, y que B es el codominio. Es decir, se debe cumplir que dado **cualquier** elemento de A se le pueda hacer la asociación, y que siempre está asociado a un único elemento.

Evaluar una función: Cuando nos piden evaluar una función es simplemente **reemplazar** la variable en todos los lugares que aparezca (cuidado con poner bien los paréntesis).

Por ejemplo:

- $f(x) = \frac{x-3}{2x} \Rightarrow f(5) = \frac{5-3}{2\cdot 5} = \frac{2}{10} = 0,2.$
- $g(z) = z^3 - 3 \Rightarrow g(-10) = (-10)^3 - 3 = -1000 - 3 = -1003.$
- $h(a) = a^2 + 2a + 1 \Rightarrow h(1+a) = (1+a)^2 + 2(1+a) + 1 = 1 + 2a + a^2 + 2(1+a) + 1 = 4 + 34a + a^2.$

Un par de ejemplos:

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & x^2 \end{array}$$

f **es una función**, cuyo dominio es $\mathbb{R}$, codominio es $\mathbb{R}$, y que la regla de asociación está dada por $f(x) = x^2$. Por lo tanto, $f(2) = 2^2 = 4, f(-5) = (-5)^2 = 25, etc.$

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & \sqrt{x} \end{array}$$

g **no es una función**, pues se supone que el dominio sería $\mathbb{R}$, sin embargo la regla de asociación está dada por $g(x) = \sqrt{x}$. Si tomamos un x negativo ¡no se le puede asignar nadie del codominio :(!

$$\begin{array}{cccc} h & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x^2 & \to & x \end{array}$$

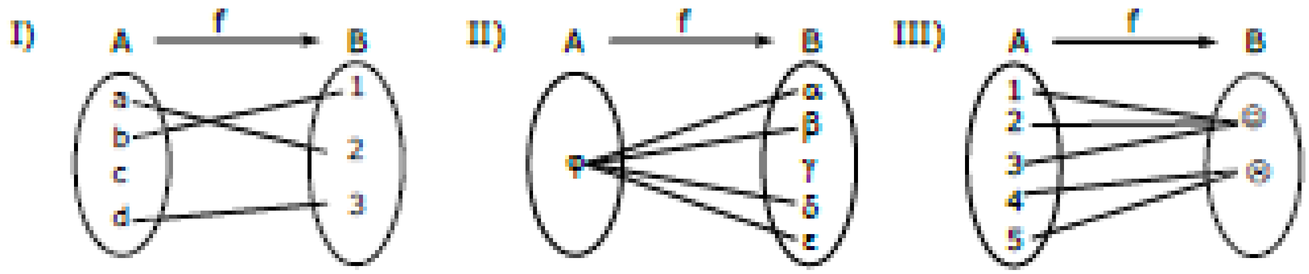
h **no es una función**, pues se supone la regla de asociación está dada por $h(x^2) = x$. Entonces $h(4) = f(2^2) = 2$, pero también $h(4) = f((-2)^2) = -2$. ¡El 4 está asociado a dos elementos distintos :(!

Algunos nombres técnicos:

- Al Dominio, también se le llama **Conjunto Preimagen**, o bien conjunto de las **variables independientes.**
- Dado un y en el codominio, al (o a los) x tales que $f(x) = y$, se le(s) llama preimagen de y. Por ejemplo, si volvemos al primer ejemplo de antes, entonces se tiene que $f(2) = 4$, y $f(-2) = 4$, por lo tanto 2 y -2 son las preimágenes del 4.
- El conjunto de valores a los que realmente llega f se le dice **Recorrido**, o **Conjunto Imagen.** En el mismo ejemplo que antes, la función $f(x) = x^2$, si bien el codominio es $\mathbb{R}$, uno puede ser aún más exacto y decir que en realidad la función llega a sólo los reales positivos, por lo tanto el Recorrido es R^+.
- Al y que se le asocia a un x, se le dice imagen. En el ejemplo anterior, la imagen del 2 es el 4, la imagen del -2, también es el 4, la imagen del -5 es el 25, etc.

A continuación te explicamos dos ejercicios explicativos relacionados a la materia vista hasta acá.

Ejercicio explicativo 1 ¿Cuál de los siguientes diagramas representa(n) una función de A en B



A) Solo I

B) Solo II

C) Solo III

D) Solo I y III

E) I, II, y III

Recordemos que se deben cumplir 2 reglas para ser función, la primera es que todos los elementos de A deben ingresar a la función, y la segunda es que todo x solo puede tener "un puente" hacia B. Verifiquemos las dos reglas en cada caso.

I) En este caso, el elemento c, no está entrando a la función, a pesar de que el enunciado dice que A es el dominio, por lo tanto no se cumple la primera regla, y automáticamente no es función.

II) En este caso, la primera regla se cumple perfectamente, todos los elementos de A (hay solo uno) tienen a alguien asociado, muy bien. Sin embargo, no se cumple la segunda regla, pues hay algún elemento que tiene asociado más de un elemento del codominio, ¡En este caso tiene 4 asociados!, por lo tanto no se cumple la segunda regla, y automáticamente no es función.

III) En este caso, la primera regla se cumple perfectamente, todos los elementos del dominio, tienen algún elemento asociado (no hay nadie de A solito :)). Por otro lado, es verdad que todos los elementos de A tienen un único elemento de B asociado (no hay nadie con dos flechitas :)), por lo tanto se cumplen ambas reglas, y automáticamente es función.

De esta forma se concluye que la alternativa correcta es $\boxed{\text{C}}$.

Ejercicio explicativo 2 Sea $f(x) = \sqrt{x-6}$ ¿Cuál de los siguientes valores pertenece al dominio?

A) 1

B) 6

C) 2

D) 3

E) 0

Forma de resolución 1

En este caso, estamos trabajando con la función raíz. Esta sabemos que se porta bien cuando lo de adentro es positivo o cero, dicho de otra forma, todo lo que haga que adentro quede negativo no está en su dominio. Así, hay que preguntarse ¿para qué valores de x se cumple que lo que queda dentro de la raíz sea positivo o cero? Esto equivale a resolver la inecuación

$$\begin{array}{rcl} x-6 & \geq & 0 \\ \Leftrightarrow \quad x & \geq & 6. \end{array}$$

Por lo tanto el dominio de la función es $[6,\infty)$. El único número de las alternativas que pertenece a este intervalo es el 6, por lo tanto la alternativa correcta es $\boxed{\textbf{B}}$.

Forma de resolución 2

Otra forma de resolverlo es probar con todas las alternativas, esta forma de resolución es de doble filo, puede ser o muy rápida, o muy lenta. Todo dependerá de la cantidad de cálculos que hay que hacer.

- **Paso 1:** Probamos con la alternativa a): reemplazamos y notamos que $f(1)=\sqrt{1-6}=\sqrt{-5}$. Estamos sacándole la raíz a un número negativo, esto no está bien definido, y por lo tanto al 1 no se le puede asociar a nadie, es decir no puede estar en el dominio.
- **Paso 2:** Ahora procedemos a probar la alternativa b): reemplazamos y notamos que $f(6)=\sqrt{6-6}=\sqrt{0}=0$. Por lo tanto el 6 está asociado al 0, no hay ningún problema, y por lo tanto está en el dominio. Se concluye que la alternativa correcta es $\boxed{\textbf{B}}$.

  De todas formas, por si acaso revisemos las otras alternativas:
- **Paso 3:** Procedemos a probar a alternativa c): reemplazamos y notamos que $f(2)=\sqrt{2-6}=\sqrt{-4}$. Estamos sacándole la raíz a un número negativo, esto no está bien definido, y por lo tanto al 2 no se le puede asociar a nadie, es decir no puede estar en el dominio.
- **Paso 4:** Procedemos a probar a alternativa d): reemplazamos y notamos que $f(3)=\sqrt{3-6}=\sqrt{-3}$. Estamos sacándole la raíz a un número negativo, esto no está bien definido, y por lo tanto al 3 no se le puede asociar a nadie, es decir no puede estar en el dominio.
- **Paso 5:** Procedemos a probar a alternativa e): reemplazamos y notamos que $f(0)=\sqrt{0-6}=\sqrt{-6}$. Estamos sacándole la raíz a un número negativo, esto no está bien definido, y por lo tanto al 0 no se le puede asociar a nadie, es decir no puede estar en el dominio.

Observación: Una función **muy importante** es la **identidad**, esta se caracteriza porque hace absolutamente nada. Toma un x, y devuelve lo mismo, matemáticamente hablando es la función siguiente:

$$\begin{array}{rccc} Id_A: & A & \to & A \\ & x & \to & x \end{array}$$

Algunas características importantes:

Para terminar con esta guía te presentaremos 4 características que **no** todas las funciones cumplen, pero que son muy importantes de conocer.

Función continua:

f se llamará función continua, si es que es una función, y además cumple que *se puede dibujar sin levantar el lápiz.* Un poco más formalmente, es que su gráfica no tiene ningún salto.

Función creciente:

f se llamará función creciente, si es que es una función, y además cumple que *a medida que los x van creciendo, los y también lo hacen* Formalmente, es que para todos los elementos del dominio se cumple que $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

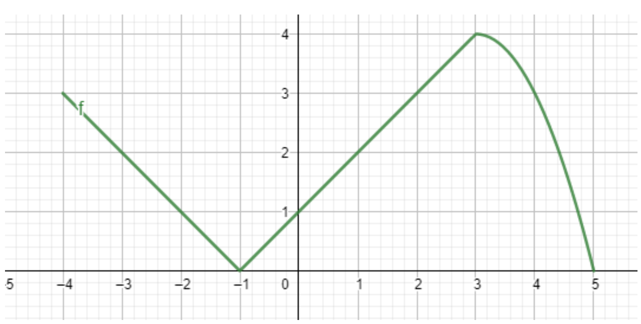
Función decreciente:

f se llamará función decreciente, si es que es una función, y además cumple que *a medida que los x van creciendo, los y se van haciendo cada vez más pequeños* Formalmente, es que para todos los elementos del dominio se cumple que $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

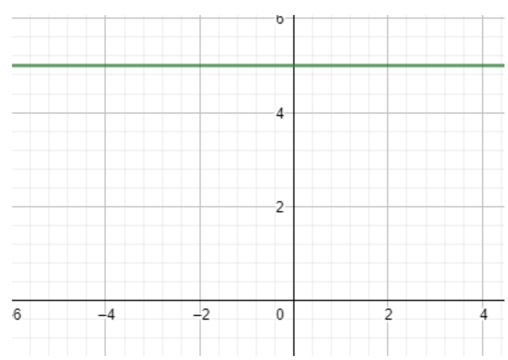
Función constante:

f se llamará función constante, si es que es una función, y además cumple que *da lo mismo que x se considere, esta siempre vale lo mismo.* Formalmente, son funciones del estilo $f(x) = c$.

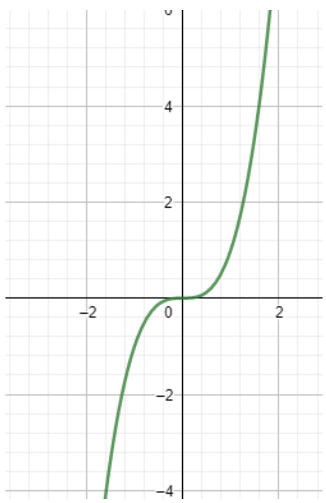
Ejemplos de las funciones anteriores son:



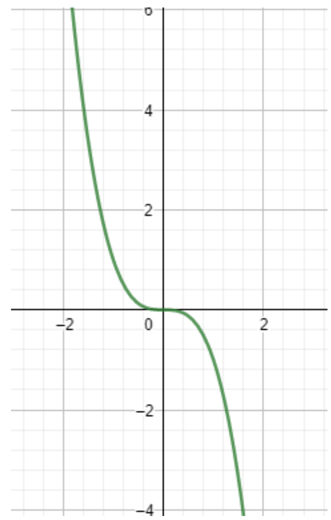
Una función continua, que no es creciente ni decreciente



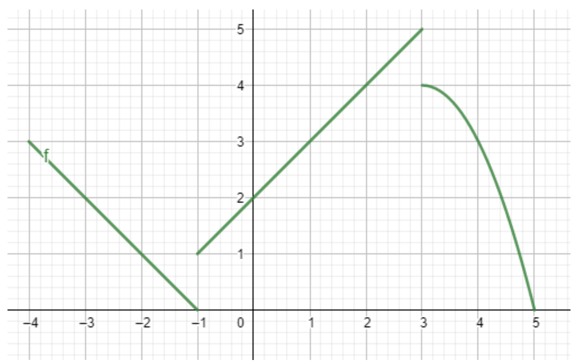
f(x)=5, una función continua, que es constante.



Una función continua, que es creciente.



Una función continua que es decreciente.



Una función discontinua, que no es creciente ni decreciente.

Ahora, seguiremos trabajando con funciones, en particular, la función lineal y la función afín. Además, estudiaremos la traslación de todo tipo de funciones. Finalmente, veremos dos tipos de funciones simétricas (funciones pares y funciones impares)

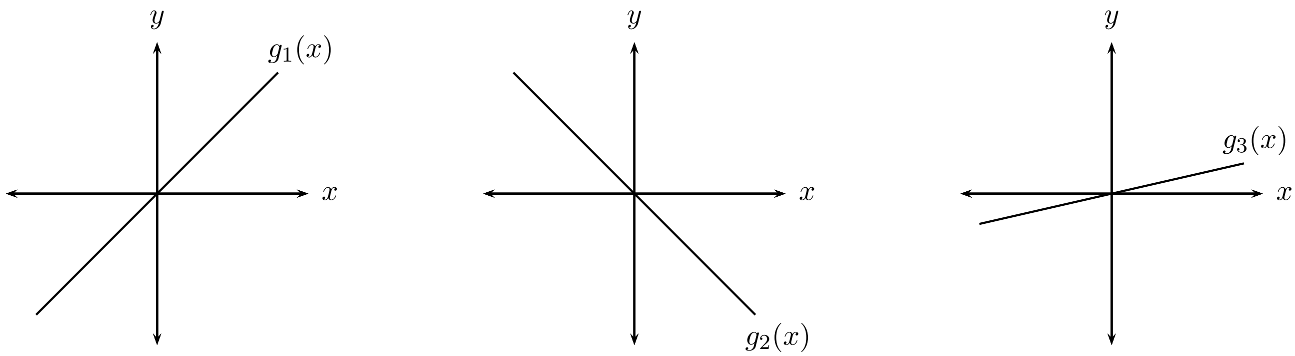
Función lineal y función afín

Tanto la función lineal como la función afín modelan problemas de la vida cotidiana. Por ejemplo, el cobro de las cuentas de la luz, las cuentas del agua y los taxímetros calculan el monto a pagar a través de una función afín. Por otra parte, el precio de los alimentos vendidos a granel sigue un modelamiento de una función lineal. A continuación se presentan las dos funciones antes mencionadas.

Función Lineal

Definición:
Se dice que $f(x)$ es una función lineal si es de la forma $f(x) = mx$, con $m \in \mathbb{R}$ distinto de 0.

Los siguientes gráficos corresponden a ejemplos de funciones lineales



Notemos que el gráfico de una función lineal se caracteriza por ser una recta que **pasa por el origen del plano cartesiano**, o sea que el punto $(0,0)$ siempre pertenece al gráfico de una función lineal.

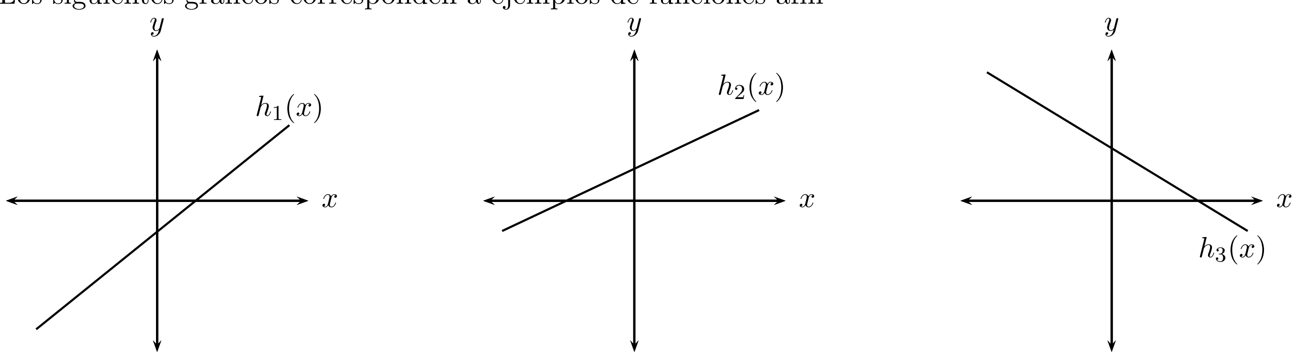
Propiedades de la función lineal
Si $f(x)$ es una función lineal, entonces siempre es verdadero que:

- $f(a+b) = f(a) + f(b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$
- $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 0$

Función Afín

Definición:
Se dice que $f(x)$ es una función afín si es de la forma $f(x) = mx + n$, con m y n $\in \mathbb{R}$ distintos de 0.

Los siguientes gráficos corresponden a ejemplos de funciones afín



Nota: En una función afín $f(x) = mx + n$, $f(x)$ intersecta al eje de las ordenas en el punto $(0, n)$ ya que $f(0) = n$

Modelamiento de problemas

A la hora de estudiar problemas puede resultar más fácil analizarlos si se plantean como una función, en especial cuando se requiere ver múltiples casos de este mismo, es importante en este proceso identificar las variables con las que se están trabajando, o sea, qué variable va en el eje Y y cual va en el eje X. La manera general de poder identificar dichas variable es mediante la dependencia de ellas entre si, como por ejemplo la cantidad que recorre un auto (eje y) depende de cuanta gasolina tiene este (eje x), la valor de la cuenta del agua (eje y) depende de la cantidad de agua usada (eje x), de esta manera la variable dependiente es la función a modelar y la variable independiente es la variable x que evaluamos en esta función. A continuación veremos unos ejemplos resueltos.

Ejemplo 1: El valor total de una cuenta de luz consta de 2 cobros. El primero es un cargo fijo mensual, independiente del consumo de energía, este es para cubrir gastos como los de atención al cliente, administración,etc. El segundo es un cobro según el consumo, es decir, según la cantidad de kW consumidos. Si una empresa que vende este servicio cobra $800 por cargo fijo y $150 por cada kW ¿A partir de cuántos kW consumidos el costo total mensual es superior a 13.000? (considerar un mes como un periodo de 30 días)

- **Paso 1:** Lo primero que hay que identificar son las variables de este problema. Tenemos que el total a pagar depende(eje y) de los kW consumidos (eje x)
- **Paso 2:** Luego debemos notar que el costo aumentará si aumenta el consumo de kW, por lo tanto la función es creciente.Con esto podemos saber que a partir de cierta cantidad de kW consumidos, el total superará los $13.000
- **Paso 3:**Ahora identificaremos el tipo de función.Sabemos que con 0 kW consumidos, el valor total será de $800, por lo tanto la función será afín.
- **Paso 4:** Teniendo en cuenta esta información debemos escribir nuestra función. Si k es la cantidad de kW consumidos, la expresión

$$800 + k \cdot 150$$

representa lo que se paga por consumo, pero debemos agregar el cargo fijo , por lo tanto la expresión final queda :

$$800 + k \cdot 150 =$$

Total a pagar

- **Paso 5:**El problema pide que el total sea superior a $13.000, por lo que nos queda la inecuación:

$$800 + k \cdot 150 > 13.000$$

y al resolver esto nos queda :

$$k \cdot 150 > 13.000 - 800$$
$$k > \frac{12.2000}{150}$$
$$k > 81,3$$

Por lo tanto, la cantidad de kW que se deben consumir para que el total a pagar supere los $13.000 debe ser mayor a 81,3

Ejemplo 2: Un trotamundos acaba de llegar a Chile y le interesa recorrer múltiples puntos del país, pero primero tiene que salir del aeropuerto, para esto presenta 2 opciones, la empresa de taxis 1, o taxis 2, y estos presentan una tarifa distinta. Los taxis 1 cobran un monto de $5.000 fijo además de $200 por kilometro recorrido, en cambio, los taxis 2 cobran un monto fijo de $7.000 y $100 por kilometro recorrido (ninguno cobran por tiempo). El trotamundos a aún no sabe hacia donde quiere ir, pero le interesa tener en mente qué tipo de taxi le sirve para distintas distancias. ¿Cómo podemos saber que taxi le sirve más para cada situación?

- **Paso 1:** Primero hay que identificar las variables del problema. Tenemos que cada taxi tendrá un costo a pagar (eje y) que depende de la cantidad de kilómetros recorridos (eje x)
- **Paso 2:** Luego modelamos los costos de los taxis 1 como $f(x)$ y los del taxi 2 como $g(x)$
  - **Paso 2.1:** Escribimos cómo se vería la función $f(x)$. Por los datos del enunciado sabemos que $f(x)$ tiene un costo fijo asociado igual a $5.000. Adicionalmente se cobra $200 por kilometro recorrido (los kilómetros son nuestra variable x en $f(x)$), entonces $f(x) = 200 \cdot x + 5000$
  - **Paso 2.2:** Queremos escribir $g(x)$, leyendo el problema otra vez rescatamos la información que los taxis 2 tienen un costo fijo de $7.000 y costo por kilometro igual a $100, entonces $g(x) = 100 \cdot x + 7.000$
- **Paso 3:** Una vez modeladas las funciones con las que queremos trabajar, tenemos que recordar lo que se nos está preguntando. En este caso queremos saber que taxi es más conveniente+ según la distancia recorrida. Este problema se puede separar en 2 subcasos: cuándo es más conveniente tomar el taxi 1 (o sea cuando $f(x) < g(x)$) y cuándo es más conveniente tomar el taxi 2 ($g(x) < f(x)$)
- **Paso 4.1:** $f(x) < g(x)$
  Del Paso 2 sabemos que $f(x) = 200 \cdot x + 5000$ y $g(x) = 100 \cdot x + 7.000$, entonces remplazando esto en la desigualdad podemos resolver como una inecuación, entonces:

$$f(x) < g(x)$$

$$200 \cdot x + 5000 < 100 \cdot x + 7.000$$

$$100 \cdot x < 2000$$

$$x < \frac{2000}{100}$$

$$x < 20$$

$$x \in (-\infty, 20)$$

  De esto podemos concluir que el taxi 1 conviene más si se va a hacer un viaje de menos de 20 kilómetros.

- **Paso 4.2:** $g(x) < f(x)$
  De la misma forma, resolvemos la desigualdad remplazando con los datos que tenemos: $f(x) = 200 \cdot x + 5000$ y $g(x) = 100 \cdot x + 7.000$.

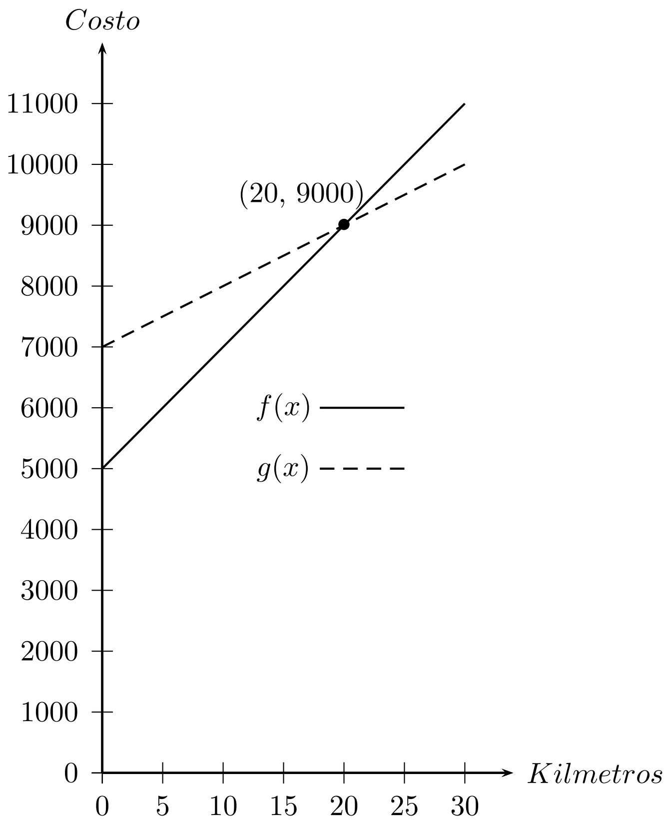
$$g(x) < f(x)$$

$$100 \cdot x + 7.000 < 200 \cdot x + 5000$$

$$2000 < 100 \cdot x$$
$$\frac{2000}{100} < x$$
$$20 < x$$
$$x \in (20, \infty)$$

Entonces para viajes mayores a 20 kilómetros el taxi 2 es más conveniente

Adicional: Hasta el punto 4 el ejercicio esta resuelto ya que sabemos cuándo conviene usar uno u otro taxi. Pero analicemos un poco más allá, ¿qué pasa cuando la distancia recorrida es exactamente 20 kilómetros?, ¿cómo se ven los gráficos de estas funciones?



Acá podemos ver gráficamente el comportamiento de las funciones de costo de los taxis. Por como calculamos antes, $f(x)$ (costo taxi 1) es menor a $g(x)$ (costo taxi 2) cuando se recorren menos de 20 kilómetros (x menor a 20), ya que al dibujar los gráficos de las funciones, este esta por debajo de la otra, esto es una manera de sacar información rápidamente de un gráfico. También podemos ver qu é es lo que ocurre cuando el trotamundos quiere viajar exactamente 20 kilómetros. El precio del viaje en ambos taxis es el mismo, por lo tanto no existe una preferencia entre uno o el otro.

También es importante notar que las escalas de este gráfico no son las mismas en cada eje. Notar cómo el eje de las ordenadas va de 1000 en 1000 y el de las abscisas de 5 km en 5 km. A la hora de ver ejercicios de análisis de gráficos es importante ver bien las escalas de los ejes y qué representa cada eje.

Traslación de funciones

La traslación de funciones nos puede ayudar a comprender el comportamiento una función de una manera más rápida y sencilla . Permitiéndonos deducir, por ejemplo, valores importantes sólo mirando la expresión de esta o comparándola con una ya conocida .

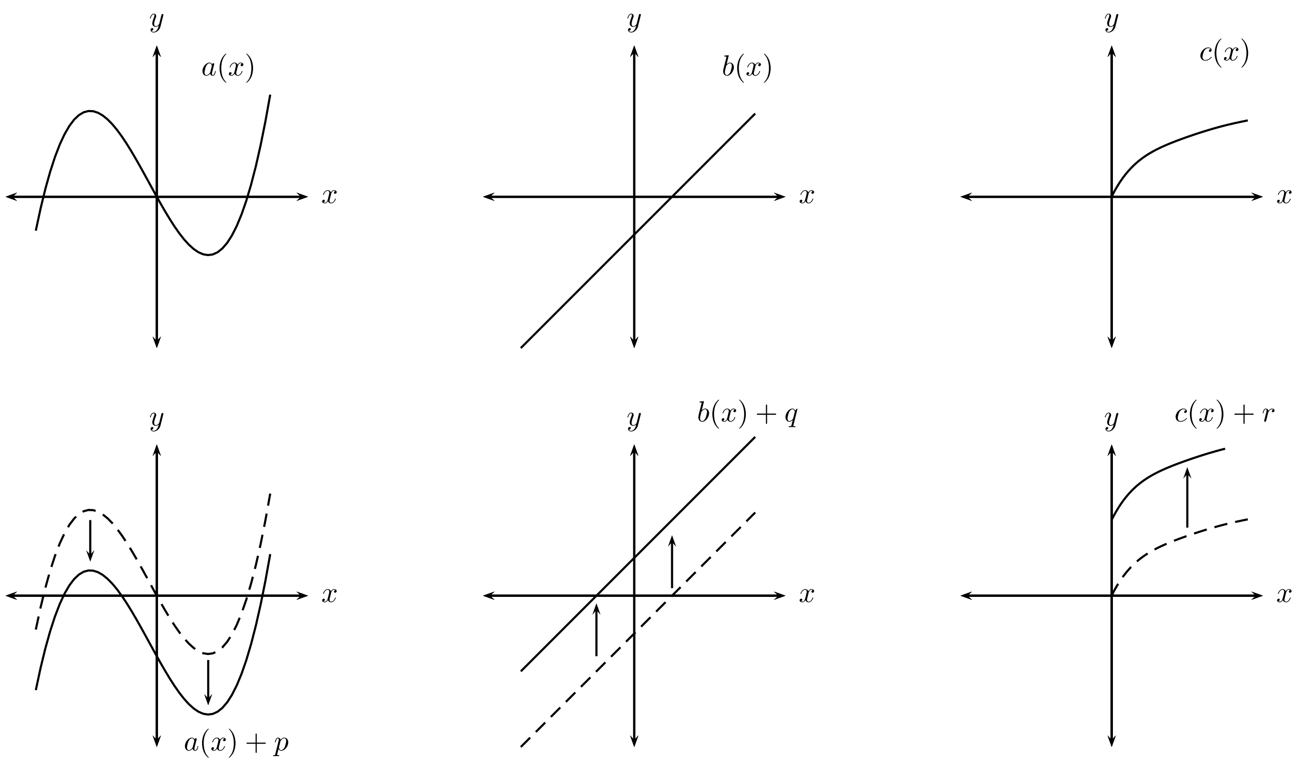
Traslación Vertical

Sea $f(x)$ una función cualquiera y $p \in \mathbb{R}$ distinto de 0, entonces $f(x) + p$ es una traslación vertical de $f(x)$. Se pueden dar 2 casos:

- Si p es positivo, entonces $f(x)$ se desplaza p unidades hacia arriba
- Si p es negativo, entonces $f(x)$ se desplaza p unidades hacia abajo

Ejemplo:

La función $a(x)$ esta siendo trasladada verticalmente con un p negativo, la función $b(x)$ por un q positivo y la función $c(x)$ por un r positivo.



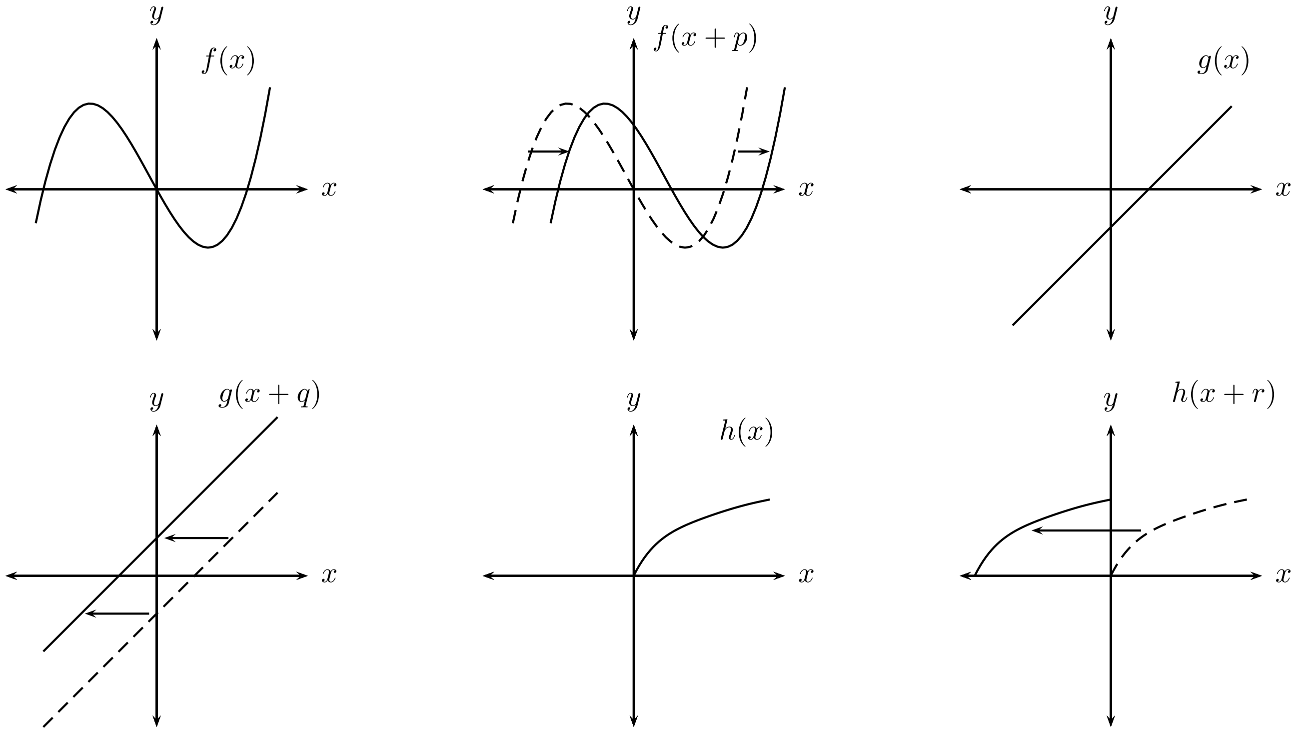
Traslación Horizontal

Sea $f(x)$ una función cualquiera y $p \in \mathbb{R}$ distinto de 0, entonces $f(x + p)$ es una traslación horizontal de $f(x)$. Se pueden dar 2 casos:

- Si p es positivo, entonces $f(x)$ se desplaza p unidades hacia la izquierda.
- Si p es negativo, entonces $f(x)$ se desplaza p unidades hacia la derecha.

Ejemplos:

La función $f(x)$ esta siendo trasladada horizontalmente con un p negativo, la función $g(x)$ por un q positivo y la función $h(x)$ por un r positivo



Simetría en las funciones

Este es un tópico que no esta previsto en el temario para la PTU, pero es una propiedad importante que pueden tener las funciones para estudios superiores de estas

Funciones pares e impares

- **Funciones pares:** Son las que cumplen $f(x) = f(-x)$ lo que significa que es simétrica con respecto al eje y.
- **Funciones impares:** Son las que cumplen $f(x) = -f(-x)$, este tipo de función es simétrica con respecto al origen.

Ejemplo 1: La función $f(x) = x^2 + 3$ es una función par pues si se calcula $f(-x)$ nos resulta $(-x)^2 + 3$ lo que e igual a $x^2 + 3$ y por lo tanto $f(x) = f(-x)$
Ejemplo 2: Si tengo la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y reemplazo $-x$ queda $\dfrac{1}{-x}$, resultando $f(x) = -f(-x)$