Sistemas de ecuaciones

En las guías pasadas aprendimos sobre la existencia de las igualdades, éstas cumplen el rol de representar oraciones en lenguaje matemático. Las igualdades nos permiten "*traducir*" las oraciones del español al lenguaje matemático. Además, vimos que cuando estas igualdades tienen incógnitas las llamamos ecuaciones, donde, por lo general, nuestro objetivo será encontrar los valores que pueden tomar las incógnitas.

Hasta el momento hemos aprendido a resolver ecuaciones con una incógnita, como por ejemplo determinar la edad de Francisca, si sabemos que en 7 años más tendrá 25. Para hacerlo, primero que nada traducimos esta oración del español al matemático, para lo cual partimos nombrando las variables que nos presentan. En este caso, la única variable que nos da el enunciado corresponde a la edad de Francisca, la que denominaremos F, y que resulta ser a la vez la incógnita buscada. Luego, en segundo lugar, traducimos la información entregada, es decir, "que en 7 años más tendrá 25":

$$F + 7 = 25$$

Para resolver esta ecuación, simplemente restamos 7 a ambos lados, obteniendo el resultado buscado:

$$\begin{aligned} F + 7 &= 25 \\ F + 7 - 7 &= 25 - 7 \\ F &= 18 \end{aligned}$$

Pero, qué pasa si ya no tenemos solo una incógnita, sino que tenemos dos, tres o más? Por ejemplo, qué hacer si queremos conocer la edad de dos hermanos, Daniel y Fernanda, sabiendo que Daniel es tres años menor que su hermana. Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso anterior, es decir, nombrar las variables y luego traducir al matemático, resulta la siguiente expresión:

$$D = F - 3$$

¿Qué podemos hacer ahora? Con la información que tenemos no es posible determinar el valor de las incógnitas, es decir, no podemos encontrar ni la edad de Daniel ni la edad de Fernanda.

Para resolver este problema, necesitamos que nos entreguen otra información acerca de las edades de ambos hermanos, por ejemplo, que sus edades suman 29. Si traducimos esta nueva información, es posible obtener dos ecuaciones para ambas incógnitas:

$$\begin{aligned} D &= F - 3 \\ D + F &= 29 \end{aligned}$$

Esto se conoce como un **sistema de ecuaciones**.

Sistemas de ecuaciones

Gracias al ejemplo anterior, pudimos introducir un nuevo concepto, el de **sistema de ecuaciones**, el que consiste en una serie de ecuaciones para dos o más incógnitas. En general, un sistema podría tener miles de ecuaciones y miles de incógnitas como, por ejemplo, los problemas de optimización que enfrentan grandes empresas. Sin embargo, para la PAES solo nos interesan los sistemas con dos ecuaciones y dos incógnitas, los que se conocen como sistemas de 2x2. Estos, pueden ser representados de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
Ax + By &= C \\
Dx + Ey &= F
\end{aligned}
$$

en donde, A, B, C, D, E y F son los valores (ya sean números o letras) que forman parte del sistema.

Si cuando teníamos una sola ecuación, su solución correspondía al valor de la incógnita que cumplía con la igualdad (en el primer ejemplo $F = 18$), para los sistemas de ecuaciones esto no cambia. Ya no tendremos solo **una** incógnita para la cual encontrar **un** valor que cumpla con **una** igualdad, sino que debemos encontrar el valor de **ambas** incógnitas que cumplen **ambas** igualdades.

Así, siguiendo con el ejemplo de los hermanos Daniel y Fernanda, es posible notar que los valores 13 y 16 respectivamente cumplen con ambas ecuaciones, por lo que el par (13, 16) es la solución de este sistema:

$$
\begin{aligned}
D &= F - 3 \\
D + F &= 29 \\
\\
13 &= 16 - 3 \\
13 + 16 &= 29
\end{aligned}
$$

A este par (13,16) que corresponde a la solución del sistema de ecuaciones de 2x2 se le conoce como par ordenado.

Métodos de resolución algebraica

Como se dijo anteriormente, las soluciones de ambas ecuaciones que son parte de un sistema son pares ordenados, pero ¿Qué sucede si no es evidente el valor de las incógnitas en el problema? Para lograr encontrar los valores se debe resolver el sistema, para ello se tienen diversos métodos donde lo fundamental es **primero despejar una incógnita para luego encontrar la otra**.

Método de sustitución

Este es el más importante y el que más les servirá para ecuaciones lineales, consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y luego reemplazarla en la otra, así queda una ecuación con una sola incógnita. Esta se puede resolver encontrando su valor, el que se podrá reemplazar en la primera ecuación para obtener el de la otra, de esta forma se logra que una sea solución de la otra y viceversa.

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
x + 2y &= 4 \qquad (1) \\
4x - y &= 1 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Para resolver este sistema de ecuaciones primero se despejará la incógnita x en (1), y luego se reemplazará en (2), de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x &= 4 - 2y && (1) \\ 4 \cdot (4 - 2y) - y &= 1 && (2) \end{aligned}$$

Ahora en la ecuación (2) solo se tiene una incógnita y, que se puede despejar y reemplazar en la ecuación (1) para obtener el valor de la incógnita x:

$$\begin{aligned} 16 - 8y - y &= 1 && (2) \\ y &= \frac{5}{3} \\ x &= 4 - 2y && (1) \\ x &= 4 - 2 \cdot \frac{5}{3} \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Con esto finalmente se obtiene el par ordenado que es solución de ambas ecuaciones $x = \frac{2}{3}$ e $y = \frac{5}{3}$, lo que también se puede escribir como $(x, y) = (\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$.

Método de igualación

Este método consiste aislar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar el resultado, quedando una sola ecuación con una incógnita, la que se puede despejar y reemplazar para obtener la otra. Aplicado al ejemplo anterior queda:

$$\begin{aligned} x &= 4 - 2y && (1) \\ x &= \frac{1+y}{4} && (2) \end{aligned}$$

Igualando (1) y (2):

$$\begin{aligned} 4 - 2y &= \frac{1+y}{4} \\ y &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Reemplazando en (1) o (2):

$$\begin{aligned} x &= 4 - 2y && (1) \\ x &= 4 - 2 \cdot \frac{5}{3} \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Método de reducción

Finalmente, este método consiste en dejar una de las incógnitas de ambas ecuaciones con el mismo coeficiente (número que la acompaña) para luego sumar o restar ambas ecuaciones y así lograr que la incógnita desaparezca, quedando solo una ecuación con una incógnita que se puede reemplazar en la otra como en los métodos anteriores. Usando el mismo ejemplo:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \qquad (1) \\ 4x - y &= 1 \qquad (2) \end{aligned}$$

Se divide por 2 en ambos lados de la igualdad de (1) para dejar la incógnita y con coeficiente 1, opuesto a la ecuación (2), donde y está acompañada de un -1:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + y &= 2 \qquad (1) \\ 4x - y &= 1 \qquad (2) \end{aligned}$$

Ahora se puede sumar hacia abajo eliminando y:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + 4x + y - y &= 2 + 1 \\ \frac{9x}{2} &= 3 \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Reemplazando en (1) o (2):

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \qquad (1) \\ \frac{2}{3} + 2y &= 4 \\ y &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Tipos de soluciones de sistemas de ecuaciones

Supongamos que se tiene un sistema de ecuación.

$$\begin{aligned} ax + by &= e \qquad (1) \\ cx + dy &= f \qquad (2) \end{aligned}$$

Puede ocurrir que el sistema de ecuaciones tenga un único par ordenado como solución, tenga infinitas solución o que no tenga. A continuación, revisaremos como detectar cada uno de estos casos.

- **Solución única:** Un sistema de ecuaciones tiene un único par ordenado como solución si y solo sí se cumple la siguiente igualdad.

$$\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$$

- **Soluciones infinitas:** Un sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones si y solo sí se cumplen las siguientes relaciones.

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{e}{f}$$

- **No tiene solución:** Un sistema de ecuaciones no tiene solución si y solo sí se cumplen las siguientes relaciones.

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \neq \frac{e}{f}$$

Aplicaciones de Sistemas de Ecuaciones

Los sistemas de ecuaciones nos permiten resolver problemas donde hay más de un valor desconocido (en esta guía sólo estudiaremos para 2 valores desconocidos). Como vimos antes, si tengo dos valores desconocidos, no puedo despejarlos con una sola ecuación, necesito dos. Con esto en mente, al leer enunciados hay que estar atentas y atentos a que nos den dos relaciones entre nuestra incógnitas, es decir, dos ecuaciones que ambas satisfagan. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 1: Una piedra cae desde un precipicio al mar. En el aire, la piedra tiene una velocidad de $16\frac{m}{s}$ y en el agua tiene una velocidad de $3\frac{m}{s}$. Si la piedra recorrió 127 metros hasta llegar al lecho marino y la caída duró 12 segundos, ¿cuánto tiempo cayó en el aire y cuánto cayó en el agua?

Resolución: Primero fijémonos en que hay dos *tipos* de cantidades en juego: el tiempo de caída y la distancia recorrida desde el borde del precipicio al fondo del mar. Este es un indicio de que las dos incógnitas que queramos despejar deben cumplir con una ***restricción* de tiempo y otra de distancia**.
Los otros dos datos son las **velocidades** con que cae en el aire y en el agua, datos de vital importancia ya que ¡relacionan tiempo y distancia!. Además, como nos dan una velocidad para la caída en el aire y una velocidad para la caída en el agua, podemos entender rápidamente que tendremos que **separar en dos casos: la distancia que recorre la piedra en el aire, junto con el tiempo que le toma; y la distancia que recorre la piedra en el agua, junto con el tiempo que le toma**.
Como en el enunciado nos preguntan ***cuánto tiempo* le tomó en caer, nuestras incógnitas serán, claramente, medidas de tiempo** ¿qué tiempo? pues: x será el tiempo que demora en caer del precipicio al mar e y será el tiempo que demora en caer desde la superficie del mar al lecho marino. Con esta definición, podemos escribir la primera ecuación:

$$x + y = 12$$

ya que sabemos que el tiempo total que se demoró entre que cayó al mar y bajó al lecho marino fue de 12 segundos.
Para la próxima ecuación, tenemos que usar los otros datos: las velocidades. Primero notemos que la segunda restricción tiene que ver con la distancia: en total, la piedra recorrió 127 metros. Si x e y son medidas de tiempo, para calcular la distancia en cada caso, debemos multiplicar la velocidad ($\frac{m}{s}$) por el tiempo de caída (s). Entonces, para la caída en el aire sabemos que la distancia recorrida es $16[\frac{m}{\cancel{s}}] \cdot x[\cancel{s}] = 16x[m]$. Lo mismo para la caída en el agua: $3[\frac{m}{\cancel{s}}] \cdot y[\cancel{s}] = 3y[m]$. Así, podemos escribir la segunda ecuación:

$$16x + 3y = 127$$

porque sabemos que en total recorrió 127 metros, desde el acantilado al fondo marino.

Ahora que tenemos nuestro sistema de ecuaciones:

$$x + y = 12$$
$$16x + 3y = 127$$

Podemos resolverlo de la manera que prefiramos, la manera más directa es **por sustitución**: Para usar sustitución lo mejor es en general tomar la ecucación más simple y **despejar una incógnita en función de la otra**:

$$x = 12 - y$$

luego tomamos esta expresión y la reemplazamos en la otra ecuación:

$$16 \cdot (12 - y) + 3y = 127$$

Si se fijan, ahora tenemos una **ecuación con sólo una incógnita**, la cual podemos despejar:

$$16 \cdot 12 - 16 \cdot y + 3y = 127$$

$$192 - 16y + 3y = 127$$
$$192 - 13y = 127$$
$$192 - 127 = 13y$$
$$65 = 13y$$
$$\frac{65}{13} = y$$
$$y = 5$$

Con el valor de y podemos despejar directamente el valor de x **utilizando la primera ecuación**:

$$x + y = 12$$

$$x + (5) = 12$$
$$x = 12 - 5$$
$$x = 7$$

Por lo tanto, la piedra cayó 7 segundos desde el precipicio al mar y 5 segundos desde la superficie al fondo marino.

Algo **muy importante** es dedicarle unos momentos a **verificar que los cálculos son correctos**. Para los sistemas de ecuaciones es bastante simple hacerlo, simplemente se reemplazan los valores en las ecuaciones, y si cumplen con la restricción, entonces estamos bien:

$$16x + 3y = 127$$

$$16 \cdot 7 + 3 \cdot 5 = 127$$
$$112 + 15 = 127$$
$$127 = 127$$

y para la otra ecuación:

$$x + y = 12$$

$$7 + 5 = 12$$
$$12 = 12$$

Por que estamos seguros y seguras que llegamos al resultado correcto.

Ejemplo 2: La entrada para la feria de luces chinas cuesta \$10 para adultos y \$5 para niños. Cierto día entraron 350 personas los empresarios dueños de la feria recibieron \$2.425. ¿Cuántos niños y cuántos adultos fueron a la feria?.

Resolución: Al igual que antes, notemos que hay dos cantidades, y por ende, dos *restricciones*: la cantidad de gente que asistió a la feria y la cantidad de dinero que se acumuló. Como nos pregunta por la cantidad de niños y adultos, nuestras incógnitas serán: x, la cantidad de niños e y, la cantidad de adultos. De esta forma, la primera ecuación quedaría:

$$x + y = 350$$

ya que, en total, sumando niños y adultos, fueron 350 personas a la feria.
La otra restricción tiene que ver con el dinero. ¿Cómo relacionamos la cantidad de niños y adultos que fueron a la feria con el dinero recaudado? Con el precio:

$$\$5 \cdot x + \$10 \cdot y = \$2.425$$

ya que sabemos que por cada niño se pagó \$5, por cada adulto se pagó \$10 y que en total se pagó \$2.425.
Procedemos a resolver por sustitución:

$$x = 350 - y$$
$$\$5 \cdot (350 - y) + \$10 \cdot y = \$2.425$$
$$5 \cdot 350 - 5 \cdot y + 10y = 2.425$$
$$5 \cdot 350 + 5y = 2.425$$
$$1.750 + 5y = 2.425$$
$$5y = 2.425 - 1.750 = 675$$
$$y = \frac{675}{5} = 135$$

Con y despejada, podemos calcular x:

$$x + y = 350$$
$$x + 135 = 350$$
$$x = 350 - 135 = 215$$

Por lo tanto, a la feria fueron 215 niños y 135 adultos.
Podemos verificar nuestros resultados:

$$x + y = 350$$
$$(215) + (135) = 350$$
$$350 = 350$$

y en la segunda ecuación:

$$5x + 10y = 2.425$$
$$5(215) + 10(135) = 2.425$$
$$1.075 + 1.350 = 2.425$$
$$2.425 = 2.425$$

por lo que estamos seguros y seguras de nuestro resultado.