Planteamiento

Recordando que en la guía anterior se vieron ecuaciones lineales o de primer grado, en esta ocasión aprenderemos a plantear o "generar" este y otro tipos de expresiones algebraicas a partir de una cantidad de datos.

En primer lugar, vale destacar la importancia que tiene este tema en nuestra vida cotidiana, puesto que lo usamos implícitamente al dividir cosas entre partes iguales. Por ejemplo, cuando calculamos cuanto debemos aportar en una "vaquita", nosotrxs planteamos ecuaciones y otras expresiones cuando estamos con otras personas y decidimos comprar algo para beber entre lxs presentes.

Esto se puede ver en la siguiente situación:

- Genteee! ¿Compremos una bebida entre todxs?
- Yapo! Compremos una de 3L de $1.600.
- Ya, somos 4, ¿Cuanto pone cada unx?
- $400, con esto estaríamos.

En esta situación, quien dirige la conversación resolvió una ecuación como la siguiente:

$$4x = \$1600$$

Donde x representa el valor desconocido que pondrá cada integrante, el cual finalmente es $400.

¿Cómo planteo o razono una situación en una expresión matemática?

La importancia de esta sección no está en el cálculo u obtención de resultados, sino en el razonamiento necesario para plantear distintas expresiones matemáticas que se adapten a los distintos problemas a los que nos enfrentemos. En otras palabras, para cada ejemplo vamos a llegar a una igualdad que nos ayude a representar o resolver el problema.

En general, podemos dividir un problema en 6 pasos:

- **Paso 1:** Leer **ATENTAMENTE** el enunciado.
- **Paso 2:** Leerlo nuevamente e identificar los datos que nos entrega.
- **Paso 3:** Definir incógnitas: Identificar qué se quiere encontrar/calcular.
- **Paso 4:** Plantear ecuaciones: Traspasar los datos y relaciones que nos entrega el problema a fórmulas matemáticas.
- **Paso 5:** Resolver ecuaciones del paso anterior.
- **Paso 6:** Comprobar lo obtenido en 5.

En base a estos 6 pasos, resolveremos algunos ejercicios con el fin de realizar una mejor transición desde lo teórico a lo práctico, pero antes, revisemos enunciados comunes.

Expresiones más usadas

Enunciado presentado	**Expresión matemática**
Un número desconocido, o una cantidad desconocida	x
El doble de un número	$2x$
El triple de un número	$3x$
La mitad de un número	$\frac{1}{2}x$ o $\frac{x}{2}$
El cuadrado de un número	x^2
El cubo de un número	x^3
Un número menos la mitad del mismo	$x - \frac{1}{2}x$
La raíz cuadrada de una cantidad desconocida	$\sqrt{x}$
La diferencia entre x e y, respectivamente	$x - y$
La diferencia positiva entre x e y	$\lvert x - y \rvert$
La semisuma entre x e y	$\frac{x+y}{2}$
Una cantidad aumentada en b unidades	$x + b$
Una cantidad disminuida en b unidades	$x - b$
Una cantidad excede a otra en b unidades	$x - b = y$
Un número multiplicado por si mismo n veces	x^n
x es a unidades mayor que y	$x = y + a$
x es a unidades menor que y	$x = y - a$
x veces a	$x * a$

Si bien es posible trabajar sin conocer esta tabla del todo, ayuda a resolver los ejercicios con mayor facilidad.

Ahora, conociendo estas expresiones, nos enfocaremos en poner en práctica los distintos pasos expuestos anteriormente. Si bien no hay una forma general de realizar todos los problemas, la idea es, a través de los siguientes ejemplos, generar un poco de intuición y llevar lo teórico a la practica.

Casos particulares de estudio

Problemas con edades

Este tipo de problemas suele ser un dolor de cabeza para muchos y muchas estudiantes, por lo que se vuelve interesante analizarlo en particular. Vale decir que no es nada sofisticado y solo suele traer confusiones con respecto a su planteamiento.

Supongamos que tenemos una edad x y otra edad y. Se tienen las siguientes relaciones.

Edad hace a años atrás	Edad actual	Edad en b años más
$x - a$	x	$x + b$
$y - a$	y	$y + b$

Problemas con horas de trabajo y trabajadores

Este caso de estudio es muy recurrente en los distintos problemas de planteamiento. Por lo general nos encontramos con preguntas en las que tenemos que representar una situación dada a partir de otros datos de producción, como pueden ser el tiempo que demora cada trabajador en completar una tarea, de cuantos trabajadores disponemos, etc. Si bien es netamente un problema de proporcionalidad inversa, también puede verse a través de un modelo matemático.

Este tipo de problemas suele presentarse como:

*Si un trabajador tarda m unidades de tiempo en realizar una labor y otro trabajador tarda n unidades de tiempo, ¿Cuanto tiempo **t** tardarán ambos trabajadores en conjunto en realizar el mismo trabajo?*

Es importante mencionar que m y n representan el tiempo en segundos, minutos, horas, semanas, etc, dependiendo de lo que el ejercicio nos indique. En base a esto, es importante considerar las conversiones de tiempo y tener mucho cuidado al desarrollar nuestro problema.

Esta situación se puede modelar a través de la siguiente expresión, donde t representa el tiempo que buscamos.

$$\boxed{\frac{1}{t} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$$

Ecuación itinerario

Este tipo de casos involucra distancias, tiempos, desplazamientos y velocidades. Suelen tratarse de problemas en que algo o alguien se está moviendo a cierta velocidad y nos interesa saber cuanto ha recorrido o avanzado en un intervalo de tiempo.

A continuación veremos un caso de este estilo.

Un día, Pepone decidió viajar de Lugar1 hasta Lugar2. Lleva recorrido X_o unidad de distancia y circula a una velocidad de v unidad de velocidad. ¿Cuanto habrá recorrido en total transcurrido t unidades de tiempo?

Es importante mencionar que X_o representa la distancia que lleva hasta el momento y puede estar en cualquier unidad de medida de distancia, tales como centímetros, metros, kilómetros, etc. Por su parte, v representa la velocidad con la que se mueve lo que se esta desplazando, esta velocidad por lo general se encuentra en metros por segundo ($\frac{m}{s}$) o kilómetros por hora ($\frac{km}{h}$).

A continuación veamos la expresión matemática con la cual se pueden modelar estas situaciones.

$$\boxed{X_f = X_o + v \cdot t}$$

Donde X_f representa la posición final transcurrido un tiempo t, X_o la posición que lleva hasta el momento en que se plantea la pregunta, es decir, lo que lleva recorrido y, v la velocidad con la que se desplaza

RECORDATORIO: Se debe tener muchísimo cuidado con todas las unidades del problema. Se adjuntará un Anexo con las conversiones más frecuentes.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1

Jonas llega con 48 tazos al colegio, al primer recreo perdió un cuarto de sus tazos, al segundo recreo ganó el doble de lo que perdió en el recreo pasado, y en su último juego del día volvió a ganar, pero esta vez la mitad de tazos que tenía inicialmente. ¿Con cuántos tazos quedó al final del día?. (Respuesta: 84 tazos).

Paso 1: Leer atentamente

En primer lugar debemos leer atentamente el enunciado, para así, generar una visión global de lo que se está solicitando.

Paso 2: Leer nuevamente el enunciado

En esta nueva lectura, la idea es ser más exhaustivo con lo que se está leyendo, identificar datos y extraerlos del enunciado. Estos datos serán mostrados y utilizados más adelante en el desarrollo.

Paso 3: Definir incógnitas

Aquí es importante hacerse la pregunta: ¿Qué queremos encontrar? y luego asignarle una variable a la respuesta. En otras palabras, ¿cuál es el x que queremos encontrar? Para este caso:

Pregunta: ¿Qué queremos encontrar?

Respuesta: Los tazos que le quedaron a Jonas al final del día $\rightarrow x$.

Estamos listos con el paso 3.

Paso 4: Plantear ecuaciones (fórmulas) a partir de los datos del problema.

A partir del Paso 2 encontramos los siguientes datos , los cuales serán utilizados a continuación.

- "llega con 48 tazos al colegio"
- "perdió un cuarto de sus tazos"
- "ganó el doble de lo que perdió en el recreo pasado"
- "volvió a ganar ... la mitad de tazos que tenia inicialmente"

Ahora "traduzcamos" esas relaciones a cosas mas numéricas:

- "llega con 48 tazos al colegio" $\rightarrow$ 48 tazos iniciales.
- "perdió un cuarto de sus tazos" $\rightarrow$ perdió $12 = \left(\frac{48}{4}\right)$ tazos.
- "ganó el doble de lo que perdió en el recreo pasado" $\rightarrow$ ganó 24 $(2 * 12)$ tazos.
- "volvió a ganar ... la mitad de tazos que tenía inicialmente" $\rightarrow$ ganó 24 $\left(\frac{48}{2}\right)$ tazos.

Recordemos que x es la cantidad de tazos que tenemos al final

Informalmente podemos expresar x como:

$$x = \text{Tazos iniciales - Tazos perdidos + Tazos ganados}$$

Anteriormente expresamos explícitamente cada una de estas cantidades (tazos iniciales, perdidos y ganados) por lo que podemos tomarlas y reemplazar en la representación:

$$\begin{array}{rcccccccc} x = & \text{Tazos iniciales} & - & \text{Tazos perdidos} & + & & \text{Tazos ganados} & & \\ x = & 48 & - & \left(\frac{48}{4}\right) & + & (2*12) & + & \left(\frac{48}{2}\right) \\ x = & 48 & - & 12 & + & 24 & + & 24 \end{array}$$

En este punto nuestro problema "está resuelto", solo nos falta el paso 5 y 6.

Paso 5: Resolver la ecuación

Aquí deben procurar no equivocarse en el desarrollo de las operaciones (esto se logra practicando y equivocándose). Como esta parte no se trata de desarrollos, solo se mostrará el resultado (por si quieren desarrollar ustedes y revisar). Finalmente se obtiene que $x = 84$.

Paso 6: Comprobar la ecuación

Si les alcanza el tiempo pueden revisar su respuesta. Una manera útil de hacerlo es tomando el resultado que les dio (en este caso 84) y reemplazarlo en los lugares donde aparece la variable desconocida en la ecuación inicial. Si obtienen el mismo resultado a ambos lados de la igualdad, ¡Felicidades! comprobaron que su resultado está correcto.

En este ejercicio solo necesitamos usar una variable para resolverlo, sin embargo, el objetivo es entender el proceso de resolución para poder aplicarlo a ejercicios mas complejos.

A continuación revisaremos un ejercicio clásico de edades en el tiempo.

Ejercicio 2

Hace 10 años Pedro tenía el doble de la edad de Ana. También hace 10 años María tenía 5 años más que Ana. En 6 años más, Pedro tendrá el doble de la edad que tenía hace 10 años. ¿Qué edad tendrán Ana, María y Pedro, respectivamente, en 3 años? (Respuesta: 21, 26 y 29 años).

Paso 1: Leer atentamente

En primer lugar, debemos leer atentamente el enunciado, para así generar una visión global de lo que se está solicitando.

Paso 2: Leer nuevamente el enunciado

En esta nueva lectura la idea es ser más exhaustivo con lo que se está leyendo, identificar datos y extraerlos del enunciado. Estos datos serán mostrados y utilizados más adelante en el desarrollo.

Paso 3: Definir incógnitas

Como recomendación general para este paso, traten de elegir como variables cosas que les parezcan intuitivas (que puedan recordar y entender fácil y/o rápidamente) y **siempre** anoten qué significa cada variable que definieron. En particular, para este paso se recomienda elegir como variables las edades actuales de cada persona. Es decir, representaremos las edades de cada una de las personas por la inicial de su nombre.

- Pedro → P
- Ana → A
- María → M

Nota: Ojo que da lo mismo las letras que se elijen para definir variables, no es obligatorio usar x, y, etc..., de hecho para este problema no las vamos a usar.

Antes de continuar, entendamos un poco el problema:

- Si Pedro tiene 20 años hoy, ¿cuántos tendrá en 8 años más? → $20 + 8 = 28$ años.
- Si Pedro tiene 16 años hoy, ¿cuántos tenía hace 6 años? → $16 - 6 = 10$ años.

Ahora con variables:

- Si Pedro tiene P años hoy, ¿cuántos tendrá en n años más? → $P + n$ años.
- Si Pedro tiene P años hoy, ¿cuántos tenía hace n años? → $P - n$ años.

Como indica el enunciado, tenemos que trabajar con 3 edades para cada persona: la edad del pasado, la edad del presente y la edad del futuro. Generalizando el entendimiento escrito arriba, creamos esta tabla:

Nombre\Edad	hace 10 años	actual	en 6 años
Pedro	P-10	P	P+6
Ana	A-10	A	A+6
María	M-10	M	M+6

Tal vez no se vea muy útil ahora pero aguanten que esta tabla hará el paso 2 mucho más simple.

Paso 4: Plantear ecuaciones (fórmulas) a partir de los datos del problema

Las relaciones que nos dan son:

- "Hace 10 años, Pedro tenía el doble de la edad de Ana".
- "Hace 10 años María tenía 5 años mas que Ana".
- "En 6 años más, Pedro tendrá el doble de la edad que tenía hace 10 años".

Esta vez pasar a lenguaje numérico no es tan simple, analicemos por ejemplo esta relación: "Hace 10 años Pedro tenía el doble de la edad de Ana".

Primero, nos están hablando de hace 10 años (para Ana y Pedro), por lo que si miramos nuestra tabla de edades, podemos ver que vamos a utilizar las edades P-10 y A-10 para Pedro y Ana, respectivamente. Además, nos dicen que en ese entonces "Pedro tenía el doble de la edad de Ana", es decir $P - 10 = 2(A - 10)$.

Es muy importante entender por qué usamos A-10 y no A (la edad actual de Ana), o mejor dicho, es muy importante entender "con cuales" edades estamos trabajando, ¿las de hoy? ¿las de mañana? o ¿las de ayer?, ya que elegir las edades de épocas incorrectas nos va a llevar a respuestas incorrectas. Esta información tenemos que sacarla directamente del enunciado, leyendo atentamente y siendo ordenados (y practicando!).

Entonces siguiendo el mismo razonamiento, "traduzcamos" todas las relaciones a cosas numéricas:

- "Hace 10 años, Pedro tenía el doble de la edad de Ana". $\rightarrow P - 10 = 2(A - 10)$
- "Hace 10 años María tenía 5 años mas que Ana". $\rightarrow M - 10 = (A - 10) + 5$
- "En 6 años más, Pedro tendrá el doble de la edad que tenía hace 10 años". $\rightarrow P + 6 = 2(P - 10)$

Listo! Pasemos al paso 5.

Paso 5: Resolver nuestras ecuaciones

Despejando todas nuestras fórmulas (si quieren hacerlo despejen P en la 3ra relación, luego A en la 1era y finalmente M en la 2da) obtenemos que $P = 26$, $A = 18$ y $M = 23$.

Revisemos si nuestros datos concuerdan con las fórmulas obtenidas:

- $P - 10 = 2(A - 10) \rightarrow 26 - 10 = 2(18 - 10) \rightarrow 16 = 16 \rightarrow$ Sí.
- $M - 10 = (A - 10) + 5 \rightarrow 23 - 10 = (18 - 10) + 5 \rightarrow 13 = 13 \rightarrow$ Sí.
- $P + 6 = 2(P - 10) \rightarrow 26 + 6 = 2(26 - 10) \rightarrow 32 = 32 \rightarrow$ Sí.

Finalmente, recordemos que la pregunta es "¿Qué edad Tendrán Ana, María y Pedro, respectivamente en 3 años?", así que solo nos falta sumarle 3 a todas las edades actuales y reordenarlas $\rightarrow A + 3 = 21$, $M + 3 = 26$, $P + 3 = 29$.

Paso 6: Comprobar la ecuación

Nuevamente, si les alcanza el tiempo pueden revisar su respuesta, recordando que una manera útil de hacerlo es tomando el resultado que les dio y reemplazarlo en los lugares donde aparece la variable desconocida en la ecuación inicial. Si obtienen el mismo resultado a ambos lados de la igualdad, ¡Felicidades! comprobaron que su resultado está correcto. En este caso tienen 3 variables y 3 ecuaciones, así que deben revisar para cada ecuación (de forma independiente).

Finalmente, es importante recordar que el propósito de esta guía es darles algo de intuición y ayudarlos a ser metódicxs y ordenadxs al momento de resolver un ejercicio.

Consejo: Muchas veces para plantear un problema puede ser útil hacer tablas, un dibujo de la situación, reescribir el problema, etc. Si se torna difícil, prueben valores numéricos y luego aventúrense a evaluar letras. Aún así, siempre es recomendable leer varias veces un ejercicio, con tal de que ningún detalle se nos pase. En resumen, cualquier cosa que les sirva para entender "qué pasa en el problema" y "qué es lo que les están preguntando". Así que a practicar!

Anexo

Unidades a convertir	Fórmula
Metros a kilómetros	Dividir por 1.000
Kilómetros a metros	Multiplicar por 1.000
Metros a centímetros	Multiplicar por 100
Horas a minutos	Dividir por 1.000
Kilómetros a metros	Multiplicar por 1.000
Metros a centímetros	Multiplicar por 100
Kilómetros a centímetros	Multiplicar por 100.000
Kilómetros por hora a metros por segundo	Dividir por 3,6
Metros por segundo a Kilómetros por hora	Multiplicar por 3,6

preujct.cl · preujct · preujct · preujct.cl · Tupper 2140 Oficina 4 · 2978 4125