Seminario 5: Potenciación II

Nombre:____Sección:________

Instrucciones:
- Dispone de 30 minutos para resolver el siguiente control.
- Pasados los 30 minutos del control, este será resuelto por sus tutores.

1. El pH y p OH son cantidades que miden el nivel de acidez y alcalinidad de una disolución. Estas dos cantidades se relacionan mediante la ecuación pH + pOH = 14. Para el caso de pH, este se calcula con la ecuación pH = - log [C], donde C representa la concentración de protones en la disolución. Si el pOH de una disolución es 8, ¿cuál es la concentración de protones de esta disolución?

A) 10^{-8}
B) 10^{-7}
C) 10^{-6}
D) 10^{-5}

2. Si $A = 4 + \sqrt{5}$, $B = \sqrt{27}$, $C = \sqrt{30} - 1$, entonces se cumple que:

A) $A < B < C$
B) $C < A < B$
C) $C < B < A$
D) $B < C < A$

3. La siguiente fórmula relaciona los decibeles según la potencia de un amplificador.

$$D = 10 \log (I \cdot 10^{12})$$

Donde **D** representa la potencia en decibeles e **I** representa la intensidad del sonido generado. Si en un amplificador de sonido se triplica la intensidad, ¿en cuánto aumentan los decibeles si $\log 3 \approx 0{,}47$?

A) Aproximadamente 4 unidades.
B) Aproximadamente 5 unidades.
C) Aproximadamente 10 unidades.
D) Aproximadamente 12 unidades.
E) Ninguna de las anteriores.

4. Al racionalizar la expresión $\frac{50}{\sqrt[3]{5^4}}$ se tiene que es igual a

A) $10\sqrt[3]{25}$
B) $2\sqrt[3]{25}$
C) $2\sqrt[3]{5}$
D) $2\sqrt{25}$

5. Braulio necesita reducir la expresión $\log\,(\sqrt[3]{2}) + \log\,2$. Para ello realiza el siguiente procedimiento:

Paso 1: Transforma la raíz a potencia, es decir $\log 2^{\frac{1}{3}} + \log 2$.

Paso 2: Utiliza la propiedad de suma de logaritmos, es decir, $\log\,(2^{\frac{1}{3}} \cdot 2)$

Paso 3: Utiliza la propiedad de logaritmo de una potencia, es decir, $\frac{1}{3}\log\,(2 \cdot 2)$.

Paso 4: Calcula la multiplicación dentro del argumento, es decir, $\frac{1}{3}\log 4$.

¿En qué paso se encuentra el error en esta resolución?

A) Paso 1
B) Paso 2
C) Paso 3
D) Paso 4

6. Si $A = \log_{15} 5$, ¿cómo se escribe $\log_{15} 81$ en términos de A?

A) 2A
B) 4A
C) 1 – A
D) A + 5
E) 4 (1 – A)

7. El orden decreciente de los números $a = 4\sqrt{4 \cdot \sqrt{7}}$, $b = 4\sqrt{5 \cdot \sqrt{5}}$ y $c = 4\sqrt{7 \cdot \sqrt{2}}$ es

A) a, b, c
B) a, c, b
C) b, a, c
D) c, b, a
E) b, c, a

8. Cynthia es una coleccionista de artículos curiosos. En su colección destaca una extraña calculadora que entrega códigos el valor de un logaritmos mediante la suma de logaritmos de números primos. Para descifrar el enigmático funcionamiento de esta calculadora, Cynthia decide introducir dos valores de prueba:

- Log 20 = ♠ + ♦ + ♠
- Log 63 = Δ + ♥ + ♥

Considerando los valores de prueba utilizados por Cynthia, ¿cuál podría ser la secuencia de símbolos que entregue la calculadora tras recibir log 70?

A) ♦ + ♠ + ♥
B) Δ + ♠ + ♦
C) ♥ + ♠ + Δ
D) ♥ + ♠ + ♥

9. Al racionalizar la expresión $\frac{a}{\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a}}}$, con $a \neq 0$, se obtiene

A) $\sqrt[8]{a}$
B) $\sqrt[8]{a^{11}}$
C) $\sqrt[11]{a^{15}}$
D) $\sqrt[15]{a^{11}}$
E) $\sqrt[15]{a}$

10. Considera los números $M = \frac{1}{5\sqrt{2}}$, $O = \frac{1}{7}$, $A = \frac{1}{2\sqrt{13}}$ y $R = \frac{1}{4\sqrt{3}}$. ¿Cuál es el orden de mayor a menor de estos números?

A) O. M. R. A.
B) R. O. M. A.
C) R. A. M. O.
D) A. R. M. O.

11. Sea $3^a = 4$, $4^b = 5$, $5^c = 6$, $6^d = 7$, $7^e = 8$ y $8^f = 9$, luego ¿cuál es el valor del producto $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f$?

A) 1
B) 2
C) $\sqrt{6}$
D) 3
E) $\frac{10}{3}$

12. Guillermo se encuentra con la siguiente expresión en su cuaderno:

$$\mathbf{Log_b\ a = c}$$

Donde a, b y c son números reales mayores de 1. Luego de analizarla, propone las siguiente afirmaciones:

- Si a = 4 y c = 2, entonces b = 2.
- Si b = 4 y c = 2, entonces a = 16.
- Si a = 27 y b = 3, entonces c = 13.

¿Cuántas afirmaciones correctas propone Guillermo?

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3

13. Sean a, b, c definidos por $a = \log_{15} \frac{1}{225}$, $b = \log_3 27$ y $c = \log_5 125$. Entonces el valor de $3^{a+b} \cdot 5^{a+c}$ es:

A) 3
B) 5
C) 10
D) 15
E) 25

14. Si log 5 = 0,699, entonces log 8 =
A) 0,93
B) 0,6020
C) 2,408
D) 0,903
E) No puede ser calculado con la información dada.

EJERCICIO DESAFÍO

Si $\log_m a = p$ y $\frac{1}{n}\log_m p = q$ con q, p, a y n siendo números enteros positivos. ¿Cuál de las siguiente igualdades es correcta?

A) $a = m^{n \cdot q}$
B) $a = m^{p-q} p^{\frac{1}{n}}$
C) $a = m^p + q^{p \cdot n}$
D) $a = (p \cdot m)^{n \cdot q}$
E) $a = (p \cdot m)^{n(p+q)}$

Si tienes preguntas sobre ejercicios o no entiendes un contenido, recuerda consultarlo con tu profesor de sección.
¡¡No te quedes con las dudas!!

1. El pH y p OH son cantidades que miden el nivel de acidez y alcalinidad de una disolución. Estas dos cantidades se relacionan mediante la ecuación pH + pOH = 14. Para el caso de pH, este se calcula con la ecuación pH = - log [C], donde C representa la concentración de protones en la disolución. Si el pOH de una disolución es 8, ¿cuál es la concentración de protones de esta disolución?

A) 10^{-8}
B) 10^{-7}
C) 10^{-6}
D) 10^{-5}

tenemos que:

$$pH + pOH = 14 \quad (1)$$

Como $pOH = 8$, por lo tanto reemplazamos este dato en la ecuación (1)

$$pH + 8 = 14$$

$$pH = 6 \quad (2)$$

Ahora nos indican que

$$pH = -\log[C] \quad (3)$$

Reemplazamos (2) en (3)

$$6 = -\log[C] \quad /\cdot -1$$

$$-6 = \log[C]$$

Aplicamos definición de logaritmo

$-6 = \log[C] \iff 10^{-6} = C$

Así, obtenemos que el número de protones es 10^{-6}

Respuesta C)

2. Si $A = 4 + \sqrt{5}$, $B = \sqrt{27}$, $C = \sqrt{30} - 1$, entonces se cumple que:

A) $A < B < C$
B) $C < A < B$
C) $C < B < A$
D) $B < C < A$

Vamos a encostrar los valores de las Raices

$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$
$2 < \sqrt{5} < 3$

Si te das cuenta $\sqrt{4}$ y $\sqrt{5}$ estan cerca asi que $\sqrt{5} \sim 2{,}1$,
De esta manera:

$A = 4 + \sqrt{5} \sim 4 + 2{,}1 = 6{,}1$

Ahora con $\sqrt{24}$

$\sqrt{25} < \sqrt{24} < \sqrt{36}$

$5 < \sqrt{24} < 6$

Como $\sqrt{24}$ esta cerca de $\sqrt{25}$ podemos decir que

$\sqrt{24} \sim 5{,}1$, asi

$B = \sqrt{24} \sim 5{,}1$

Para $\sqrt{30}$

$$\sqrt{25} < \sqrt{30} < \sqrt{36}$$

$$5 < \sqrt{30} < 6$$

Como $\sqrt{30}$ esta más o menos al centro asi que definire como $\sqrt{30} \sim 5{,}4$. Así,

$C = \sqrt{30} - 1 \sim 5{,}4 - 1 = 4{,}4$

Recopilando todo lo Hecho:

$$C \sim 4{,}4 < B \sim 5{,}1 < A \sim 6{,}1$$

Así,

$$C < B < A$$

Respuesta c)

3. La siguiente fórmula relaciona los decibeles según la potencia de un amplificador.

$$D = 10 \log (I \cdot 10^{12})$$

Donde **D** representa la potencia en decibeles e **I** representa la intensidad del sonido generado. Si en un amplificador de sonido se triplica la intensidad, ¿en cuánto aumentan los decibeles si $\log 3 \approx 0{,}47$?

A) Aproximadamente 4 unidades.
B) Aproximadamente 5 unidades.
C) Aproximadamente 10 unidades.
D) Aproximadamente 12 unidades.
E) Ninguna de las anteriores.

Sabemos que $D = 10 \log(I \cdot 10^{12})$

y nos preguntan cuanto aumenta D al tiplicarse I así que:

$$10 \log(3I \cdot 10^{12}) = 10 \log(3I \cdot 10^{12})$$

$$10 \log(3I \cdot 10^{12}) = 10(\log(I \cdot 10^{12}) + \log(3))$$

¿que paso aHi? bueno, existe la siguiente propiedad

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b),$$

así que se aplico esa propiedad y llegamos a lo anterior.

Sabemos que $\log(3) \approx 0{,}47$, así que Reemplazamos eso en lo que teniamos

$$10 \log(3I \cdot 10^{12}) = 10(\log(I \cdot 10^{12} + 0{,}47)$$

$$10\log(3I\cdot 10^{12}) = 10\log(I\cdot 10^{12}) + 4{,}7$$

Por ultimo, Recordemos que $D = 10\cdot\log(I\cdot 10^{12})$, asi que

$$10\log(3I\cdot 10^{12}) = D + 4{,}7$$

por lo tanto si se triplica la intensidad aumenta 5 unidades aproximadamente los Decibeles.

Respuesta B)

4. Al racionalizar la expresión $\frac{50}{\sqrt[3]{5^4}}$ se tiene que es igual a

A) $10\sqrt[3]{25}$
B) $2\sqrt[3]{25}$
C) $2\sqrt[3]{5}$
D) $2\sqrt{25}$

$$\frac{50}{\sqrt[3]{5^4}} = \frac{25\cdot 2}{\sqrt[3]{5^4}} = \frac{5^2}{\sqrt[3]{5^4}}\cdot 2$$

Usando propiedad de potencia:

$$5^{2-\frac{4}{3}}\cdot 2 = 5^{2/3}\cdot 2 = 2\cdot\sqrt[3]{5^2} = 2\cdot\sqrt[3]{25}$$

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{3} - \frac{4}{3} = \frac{6}{3} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Respuesta B)

5. Braulio necesita reducir la expresión $\log(\sqrt[3]{2}) + \log 2$. Para ello realiza el siguiente procedimiento:

Paso 1: Transforma la raíz a potencia, es decir $\log 2^{\frac{1}{3}} + \log 2$.

Paso 2: Utiliza la propiedad de suma de logaritmos, es decir, $\log(2^{\frac{1}{3}} \cdot 2)$

Paso 3: Utiliza la propiedad de logaritmo de una potencia, es decir, $\frac{1}{3}\log(2 \cdot 2)$.

Paso 4: Calcula la multiplicación dentro del argumento, es decir, $\frac{1}{3}\log 4$.

¿En qué paso se encuentra el error en esta resolución?

A) Paso 1
B) Paso 2
C) Paso 3
D) Paso 4

Paso 1 = ✓ (aplico transformación de Raíz a potencia)

Paso 2 = ✓ (aplico propiedad de potencia)

Paso 3 = X (no puedes sacar la potencia, tienes que Resolver la operación, multiplicación, primero)

6. Si $A = \log_{15} 5$, ¿cómo se escribe $\log_{15} 81$ en términos de A?

A) 2A
B) 4A
C) 1 – A
D) A + 5
E) 4 (1 – A)

$$\log_{15} 81 = \log_{15} 3^4 = 4 \log_{15} 3$$

Podemos Reescribir 3 como $\frac{15}{5}$, ya que $\frac{3^{\cdot 5}}{1 \cdot 5} = \frac{15}{5}$

Así,

$$4\log_{15} 3 = 4\log_{15}\frac{15}{5} = 4(\log_{15} 15 - \log_{15} 5)$$

Como $\log_{15} 15 = 1$ y $\log_{15} 5 = A$, Reemplazamos

$$4(1-A) = 4 - 4A$$

Respuesta E)

7. El orden decreciente de los números $a = 4\sqrt{4\cdot\sqrt{7}}$, $b = 4\sqrt{5\cdot\sqrt{5}}$ y $c = 4\sqrt{7\cdot\sqrt{2}}$ es

A) a, b, c
B) a, c, b
C) b, a, c
D) c, b, a
E) b, c, a

$$a = 4\sqrt{4\cdot\sqrt{7}} = \sqrt{4^2\cdot 4\sqrt{7}} = \sqrt{4^3\sqrt{7}} = \sqrt[4]{4^6\cdot 7}$$

$$b = 4\sqrt{5\cdot\sqrt{5}} = \sqrt{4^2\cdot 5\sqrt{5}} = \sqrt[4]{4^4\cdot 5^2\cdot 5} = \sqrt[4]{4^4\cdot 5^3}$$

$$c = 4\sqrt{7\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{4^2\cdot 7\sqrt{2}} = \sqrt[4]{4^4\cdot 7^2\cdot 2}$$

Ahora tenemos que ver que producto es mayor. Pero primero eliminemos lo que esta en todas las Raices, el 4^4, de esta manera

$a = 4^2 \cdot 7 = 16 \cdot 7 = 112$; $b = 5^3 = 125$

$c = 7^2 \cdot 2 = 49 \cdot 2 = 98$

así que $c < a < b$

Respuesta C)

8. Cynthia es una coleccionista de artículos curiosos. En su colección destaca una extraña calculadora que entrega códigos el valor de un logaritmos mediante la suma de logaritmos de números primos. Para descifrar el enigmático funcionamiento de esta calculadora, Cynthia decide introducir dos valores de prueba:

- Log 20 = ♠ + ♦ + ♠
- Log 63 = Δ + ♥ + ♥

Considerando los valores de prueba utilizados por Cynthia, ¿cuál podría ser la secuencia de símbolos que entregue la calculadora tras recibir log 70?

A) ♦ + ♠ + ♥
B) Δ + ♠ + ♦
C) ♥ + ♠ + Δ
D) ♥ + ♠ + ♥

Reescribamos 20 y 63 como multiplicación de números primos

$20 = 10 \cdot 2 = 5 \cdot 2 \cdot 2 = 5 \cdot 2^2$

$63 = 21 \cdot 3 = 7 \cdot 3 \cdot 3 = 7 \cdot 3^2$

De esta manera $\log(20) = \underbrace{\log 2}_{\text{Pica}} + \underbrace{\log 5}_{\text{Diamante}} + \log 2$

$$\log 63 = \underbrace{\log 7}_{\text{triángulo}} + \underbrace{\log 3 + \log 3}_{\text{Corazones}}$$

Ahora Reescribimos 70 en números primos

$$70 = 7 \cdot 10 = 7 \cdot 5 \cdot 2$$

Entonces $\log 70 = \underbrace{\log 7}_{\text{triángulo}} + \overbrace{\log 5}^{\text{Diamante}} + \underbrace{\log 2}_{\text{Pica}}$

Respuesta B)

9. Al racionalizar la expresión $\dfrac{a}{\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a}}}$, con $a \neq 0$, se obtiene

A) $\sqrt[8]{a}$

B) $\sqrt[8]{a^{11}}$

C) $\sqrt[11]{a^{15}}$

D) $\sqrt[15]{a^{11}}$

E) $\sqrt[15]{a}$

$$\frac{a}{\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a}}} = \frac{a}{\sqrt[15]{a^3 \cdot a}} = \frac{a}{\sqrt[15]{a^4}} = \frac{a}{a^{4/15}}$$

$$= a^{1-\frac{4}{15}} = a^{11/15} = \sqrt[15]{a^{11}}$$

$$\to \frac{1^{\cdot 15}}{1^{\cdot 15}} - \frac{4}{15} = \frac{15}{15} - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$$

10. Considera los números $M = \frac{1}{5\sqrt{2}}$, $O = \frac{1}{7}$, $A = \frac{1}{2\sqrt{13}}$ y $R = \frac{1}{4\sqrt{3}}$. ¿Cuál es el orden de mayor a menor de estos números?

A) O. M. R. A.
B) R. O. M. A.
C) R. A. M. O.
D) A. R. M. O.

$$M = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5^2 \cdot 2}} = \frac{1}{\sqrt{50}}$$

$$O = \frac{1}{7} = \frac{1}{\sqrt{49}}$$

$$A = \frac{1}{2\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2^2 \cdot 13}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 13}} = \frac{1}{\sqrt{52}}$$

$$R = \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{4^2 \cdot 3}} = \frac{1}{\sqrt{16 \cdot 3}} = \frac{1}{\sqrt{48}}$$

Como $48 < 49 < 50 < 52 \quad / \sqrt{\ }$

$$\sqrt{48} < \sqrt{49} < \sqrt{50} < \sqrt{52} \quad / (\ )^{-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{48}} > \frac{1}{\sqrt{49}} > \frac{1}{\sqrt{50}} > \frac{1}{\sqrt{52}}$$

$$R > O > M > A$$

Respuesta B)

11. Sea $3^a = 4$, $4^b = 5$, $5^c = 6$, $6^d = 7$, $7^e = 8$ y $8^f = 9$, luego ¿cuál es el valor del producto $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f$?

A) 1

B) 2

C) $\sqrt{6}$

D) 3

E) $\frac{10}{3}$

$3^a = 4 \quad / \cdot \log_3$ | $4^b = 5 \quad / \log_4$

$\log_3 3^a = \log_3 4$ | $\log_4 4^b = \log_4 5$

$a \log_3 3 = \log_3 4$ | $b \log_4 4 = \log_4 5$

$a = \log_3 4$ | $b = \log_4 5$

así con todos los siguientes, por lo tanto tenemos que

$a = \log_3 4$, $b = \log_4 5$, $c = \log_5 6$, $d = \log_6 7$, $e = \log_7 8$, $f = \log_8 9$

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f = \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9$$

Usaremos la propiedad de cambio de base

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f = \frac{\cancel{\log_9 4}}{\log_9 3} \cdot \frac{\cancel{\log_9 5}}{\cancel{\log_9 4}} \cdot \frac{\cancel{\log_9 6}}{\cancel{\log_9 5}} \cdot \frac{\cancel{\log_9 7}}{\cancel{\log_9 6}} \cdot \frac{\cancel{\log_9 8}}{\cancel{\log_9 7}} \cdot \frac{\log_9 9}{\cancel{\log_9 8}}$$

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f = \frac{1}{\log_9 3}$$

Por definición $\log_9 3 = x \Leftrightarrow 9^x = 3$

$$3^{2x} = 3 \quad / \log_3$$

$$\log_3 3^{2x} = \log_3 3$$

$$2x \log_3 3 = \log_3 3$$

$$2x = 1 \quad / :2$$

$$\boxed{x = 1/2}$$

Así,

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f = \frac{1}{1/2}$$

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f = 2$$

Respuesta B)

12. Guillermo se encuentra con la siguiente expresión en su cuaderno:

$$\mathbf{Log_b\, a = c}$$

Donde a, b y c son números reales mayores de 1. Luego de analizarla, propone las siguiente afirmaciones:

- Si a = 4 y c = 2, entonces b = 2.
- Si b = 4 y c = 2, entonces a = 16.
- Si a = 27 y b = 3, entonces c = 13.

¿Cuántas afirmaciones correctas propone Guillermo?

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3

• Si $a = 4$ y $c = 2 \Rightarrow b = 2$

$$\log_b 4 = 2 \Leftrightarrow b^2 = 4 \quad / \sqrt{\ }$$

$$|b| = 2$$

Como $b > 1$

$$b = 2$$

∴ Primera afirmación Correcta

• $b = 4$ y $c = 2 \Rightarrow a = 16$

$$\log_4 a = 2 \Leftrightarrow 4^2 = a$$
$$16 = a$$

∴ Segunda afirmación Correcta.

• $a = 27$ y $b = 3 \Rightarrow c = 13$

$$\log_3 27 = c \Leftrightarrow 3^c = 27$$

$$3^c = 3^3 \quad /\log_3$$

$$\log_3 3^c = \log_3 3^3$$

$$c \log_3 3 = 3 \log_3 3$$

$$\boxed{c = 3}$$

$\therefore$ tercera afirmación incorrecta

$\therefore$ 2 afirmaciones son correctas

13. Sean a, b, c definidos por $a = \log_{15} \frac{1}{225}$, $b = \log_3 27$ y $c = \log_5 125$. Entonces el valor de $3^{a+b} \cdot 5^{a+c}$ es:

A) 3
B) 5
C) 10
D) 15
E) 25

$$a = \log_{15} \frac{1}{225} = \log_{15} \frac{1}{15^2} = \log_{15} 15^{-2}$$

así, $a = -2$

$$b = \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$$

así, $b = 3$

$C = \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$

así, $b = C = 3$

Ahora $\quad 3^{a+b} \cdot 5^{a+c} = 3^{-2+3} \cdot 5^{-2+3}$

$\quad\quad\quad$ " $\quad = 3^1 \cdot 5^1$

$3^{a+b} \cdot 5^{a+c} = 15$

Respuesta D)

14. Si log 5 = 0,699, entonces log 8 =

A) 0,93
B) 0,6020
C) 2,408
D) 0,903
E) No puede ser calculado con la información dada.

$$\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 3 \log \frac{10}{5} = 3(\log 10 - 5)$$

$$= 3(1 - 0{,}699) = 3(0{,}301) = 0{,}903$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 0\ 9\ 9\ 10} \\ -\ \cancel{1},\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} \\ 0{,}699 \\ \hline 0{,}301 \end{array}$$

$\log 8 = 0{,}903$

Respuesta D)