Semana 11: Funciones cuadráticas

Máximo Flores Valenzuela / maximo.flores@ug.uchile.cl

PPA-CIC-MAT: 17 de agosto de 2023

- [**Definición: Función cuadrática**]: Una función cuadrática se expresa de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ \ a, b, c \in \mathbb{R}\ \ \text{y } a \neq 0$$

Esta se llama forma general de la función. Gráficamente, es una parábola.

  - Si $a > 0$, se dice que la parábola es «cóncava hacia arriba».
  - Si $a < 0$, la parábola es «cóncava hacia abajo».

- [**Intersecciones**]: Una función cuadrática interseca al eje de las ordenadas (eje Y) cuando $x = 0$. Luego, si $f(x) = ax^2 + bx + c$,

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$

Es decir, el punto de intersección con el eje Y es $(0, c)$.

Por otro lado, la función interseca al eje de las abscisas (eje X) cuando $f(x) = 0$. Tomando $f(x) = ax^2 + bx + c$, tenemos:

$$f(x) = 0 \equiv ax^2 + bx + c = 0$$

Ya sabemos resolver esta última ecuación. Las soluciones son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Entonces podemos decir que las intersecciones son:

$$P_1 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right) \wedge P_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$$

Observación: La función puede tener cero, una, o dos intersecciones con el eje X. Como habíamos visto con el discriminante Δ:

  - Si $\Delta > 0$, hay dos intersecciones (soluciones o ceros).
  - Si $\Delta = 0$, hay una intersección.
  - Si $\Delta < 0$, no hay intersecciones.

- [**Vertice**]: Notemos que la función cuadrática posee un vértice. Este vértice define un máximo si $a < 0$ y un mínimo si $a > 0$.

¿Cómo podemos obtener el punto del vértice? Primero notemos que $f(x)$ es simétrica, es decir, posee un eje de simetría. Este eje de simetría pasa por el vértice y dada esta simetría, la distancia entre x_1 y x_V es la misma que la distancia de x_2 y x_V.

Indicación: x_V es la coordenada en x del vértice, y x_1 y x_2 son las raíces, soluciones, o ceros de la ecuación cuadrática asociada a la función.

Calculemos entonces la coordenada en x del vértice. Sabemos que:

$$
\begin{aligned}
&d_1 = d_2\\
\Leftrightarrow\ & x_V - x_1 = x_2 - x_V\\
\Leftrightarrow\ & 2x_V = x_1 + x_2\\
\Leftrightarrow\ & x_V = \frac{x_1 + x_2}{2}
\end{aligned}
$$

Sin embargo, sabemos por propiedades de raíces de ecuaciones cuadráticas que la suma de ellas es igual a $-\frac{b}{a}$. Entonces tendremos que:

$$x_V = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Por lo tanto, la coordenada del vértice es:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

Notemos que: Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ (forma general), entonces:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Donde Δ es el discriminante de la ecuación. Por lo tanto, también podemos escribir el vértice como:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

- [**Gráfico de una ecuación cuadrática**]: Para graficar una ecuación cuadrática se deben determinar puntos y parámetros especiales. Partamos por los puntos.
  - **Vértice:** Lo calculamos como vimos anteriormente. La forma general es reemplazando en la fórmula antes descrita.
  - **Intersección con el eje X:** Para una ecuación de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, necesitamos resolver:

    $$ax^2 + bx + c = 0$$

    Sabemos que la solución se obtiene mediante la fórmula de Bhaskara ya deducida, es decir,

    $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  - **Intersección con el eje Y:** Basta reemplazar $x = 0$, o dicho de otra forma, necesitamos evaluar $f(0)$. Para la forma general, tendremos que:

    $$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$

  - **Concavidad:** Para ello necesitamos saber el signo de a. Si $a > 0$, es cóncava (abre) hacia arriba, y si $a < 0$, es cóncava (abre) hacia abajo.

<u>Veamos un ejemplo</u>. Queremos graficar $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Primero, identifiquemos los parámetros. Podemos notar que $a = 1, b = -5$ y $c = 6$. Como $a > 0$, la parábola abrirá hacia arriba.

El vértice será el punto:

$$V = \left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$$

Pero nos falta calcular $f\left(\frac{5}{2}\right)$. Hagámoslo:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{5}{2}\right) &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + 6 \\
&= \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6 \\
&= -\frac{25}{4} + 6 \\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Así, nuestro vértice es $V = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. Veamos ahora las intersecciones con los ejes. La intersección con el eje Y es el valor de c, es decir, en $y = 6$. Entonces, la parábola pasa por el punto $(0, 6)$ (recordemos que para calcular una intersección en un eje, se hace 0 la otra variable).

Ahora, para las intersecciones con el eje X, necesitamos resolver la ecuación:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \equiv (x-3)(x-2) = 0$$

O sea, $x = 3$ y $x = 2$ son los ceros de la función. Esto nos dice que la parábola en el gráfico pasará por $(2, 0)$ y $(3, 0)$. Con todos estos parámetros dados, podemos graficar la función.

- [**Forma canónica de la ecuación cuadrática**]: Ya vimos la forma general

  $$f(x) = ax^2 + bx + c, \;\; a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

  Sin embargo, hay otras formas de escribir esta ecuación que nos permite deducir propiedades de manera rápida. Se introduce la forma canónica de una ecuación (o función) cuadrática como:

  $$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

  donde el vértice es $V = (h, k)$ y los otros parámetros son los usuales. Notemos que esta versión de la ecuación nos sirve para identificar rápidamente el vértice y los cortes con los ejes, pues las ecuaciones que se deben resolver son relativamente más sencillas (el cuadrado ya está completado).

- [**Dominio y recorrido de $\boldsymbol{f(x)}$**]: Sobre las funciones cuadráticas no hay restricciones en la variable que se evalúa (x). El dominio está asociado a esta variable, y cuando no hay restricciones decimos que es el conjunto de los números reales ($\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$).

  El recorrido (o imagen) va a depender netamente de los valores que toma la variable dependiente y. El conjunto imagen va a depender de la ecuación cuadrática, pero se relaciona con el vértice y la concavidad. Si la parábola es cóncava hacia arriba, los posibles valores de y que pueden tomar van desde y_V hasta $+\infty$. Si es cóncava hacia abajo, los posibles valores son desde $-\infty$ hasta y_V.

  - Si $a > 0$, tendremos que $\mathrm{Im}(f) = (y_V, +\infty)$.
  - Si $a < 0$, $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, y_V)$

  con $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ y $\Delta = b^2 - 4ac$.