Semana 9.1: Anexo ecuaciones cuadráticas

Máximo Flores Valenzuela / maximo.flores@ug.uchile.cl

PPA-CIC-MAT: 1 de agosto de 2023

Preuniversitario ANTUMAPU

- **[Recuerdo: Cuadrado de binomio]:** Un cuadrado de binomio es de la forma $(x+y)^2$. Sabemos que desarrollando la expresión, obtenemos:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

- **[Definición: Trinomio cuadrado perfecto]:** Se dice que una expresión cumple ser un trinomio cuadrado perfecto cuando se puede expresar como un cuadrado de binomio. Veamos ejemplos:

  1) $x^2 + 6x + 9$ es un trinomio cuadrado perfecto, pues lo podemos expresar como $(x+3)^2$.
  2) $x^2 + x + 1$ no lo es. No podemos expresarlo como cuadrado de binomio.
  3) $x^2 + 4x + 3$ no lo es, a pesar de que podamos factorizarlo como $(x+3)(x+1)$.

  Una pregunta importante es *¿cómo detectamos trinomios cuadrados perfectos?* Tenemos que intentar factorizar la expresión con alguno de los métodos vistos. Si los más rápidos no sirven, siempre usaremos la fórmula general de Bhaskara. Si de la factorización resulta un término de la forma $(x+y)^2$, entonces encontramos un trinomio cuadrado perfecto.

- **[Completación de cuadrados]:** Una técnica muy común a la hora de resolver ecuaciones cuadráticas es la completación de cuadrados. Consiste en sumar/restar términos que no dependan de la variable de la ecuación para formar un trinomio cuadrado perfecto. Veamos un ejemplo de aplicación.

  Ejemplo: Queremos resolver $x^2 + 6x + 5 = 4$. Notemos que al lado izquierdo no tenemos un trinomio cuadrado perfecto. Sabemos que $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, es decir, el término de al medio (en este caso $6x$) se forma como $2 \cdot x \cdot y$. Si despejamos:

$$2xy = 6x \implies y = 3$$

  Es decir, en este caso el trinomio cuadrado perfecto sugerido es $(x+3)^2$. Si lo desarrollamos, obtenemos x^2+6x+9. Ahora bien, la pregunta es ¿cuánto me falta en la ecuación original para obtener este trinomio? Notemos que si sumamos 4 en ambos lados lo tenemos, pues quedaríamos con $x^2 + 6x + 9 = 8$. Esta ecuación es equivalente a $(x+3)^2 = 8$ y esta última es mucho más fácil de resolver.

$$\begin{aligned}(x+3)^2 = 8 &\iff x + 3 = \pm\sqrt{8}\\ &\iff x = \pm\sqrt{8} - 3\\ &\iff x = \pm 2\sqrt{2} - 3\end{aligned}$$

  En el último paso se utilizó que $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Ahora bien, esas son las soluciones de la ecuación del ejemplo, es decir, $x = 2\sqrt{2} - 3$ y $x = -2\sqrt{2} - 3$ satisfacen dicha igualdad (verifíquelo).

  Ejercicio: Resuelva $x^2 + 3x - 4 = -1$ usando el método de completación de cuadrados.

- **[Otras formas de resolución]:** Para las ecuaciones cuadráticas, existe otra estrategia cuando tenemos una de la forma:

  $$ax^2 = c, \ a > 0, c \geq 0$$

  Aquí no es necesario usar la fórmula general, basta notar que la solución es $x = \pm\sqrt{c/a}$.

  Asimismo, si tenemos ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$ con $a \neq 0$ y $b \neq 0$, podemos factorizarla directamente como $x(ax + b) = 0$. Esto nos da la solución $x = 0$ y la solución $x = -b/a$.

  La enseñanza de esto es que no siempre tenemos que usar la solución por la fórmula general de Bhaskara. Hay distintos escenarios donde la solución es más sencilla de lo que parece.