Semana 9: Ecuaciones cuadráticas

Máximo Flores Valenzuela / maximo.flores@ug.uchile.cl

PPA-CIC-MAT: 25 y 27 de julio de 2023

- **[Definición: Grado]:** Se define el grado de una ecuación en una variable x como el mayor exponente que aparece asociado a la variable x. Por ejemplo:
  - La ecuación en x, $x^3 - 2x^2 + x = 3$ tiene grado 3, pues el mayor exponente para x es 3.
  - La ecuación en t, $2t^4 - t^5 = 3t$ tiene grado 5. El mayor exponente en t es 5.
  - Sean a y b números reales y $p > 0$. La ecuación en x, $2ax^p + a^{p-1} + b^{p+1} = 0$ tiene grado p. Notemos que la ecuación está en x, entonces nos fijamos sólo en los exponentes de x.

- **[Teorema Fundamental del Álgebra]:** Consideremos ecuaciones en la variable x. Una ecuación de grado n, con n un número natural, posee n soluciones (raíces o ceros). Por ejemplo:
  - $x^3 - x^2 + x = 0$ tiene grado 3, por lo tanto tiene 3 valores de x que al ser reemplazados cumplen la igualdad. *Ejercicio:* Verifique que $x = 0$ es un valor que satisface la ecuación. En otras palabras, 0 es una raíz de la ecuación.

  Importante: No siempre las soluciones van a ser números reales. El teorema nos garantiza que existen soluciones, ¡pero no nos garantiza que sean todas números reales!

- **[Definición: Ecuación cuadrática]:** Una ecuación cuadrática (o de segundo grado) con una incógnita x se puede expresar como:

$$ax^2 + bx + c = 0, \ a, b, c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$$

  Ejercitación: Determine cuál(es) de las siguientes ecuaciones es cuadrática:

  1) $ax^3 - x^2 + x - 1 = 0$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
  2) $x - x^2 = 8$
  3) $3x^2 - \dfrac{1}{2}x^5 = 1$
  4) $bx - 2x^2 = 8$, $b \in \mathbb{R}$

- **[Definición: Operador $\pm$]:** Antes de pasar a la forma de solucionar ecuaciones cuadráticas, necesitamos definir el operador $\pm$. Intuitivamente, este operador representa que la expresión toma los dos signos por separado, por ejemplo:
  - 2 ± 3 tiene dos opciones, $2 + 3 = 5$ o $2 - 3 = -1$.
  - $x \neq \pm 1$ quiere decir que x no puede ser igual a 1, ni igual a -1.

  Como podemos ver, es una forma de ahorrar escritura.

  Observación: Vimos anteriormente que para números reales ($x \in \mathbb{R}$), esta propiedad se cumple:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

  Es importante notar que a veces tendremos ecuaciones de la forma $|x| = c$, con c una expresión. Para deshacernos del valor absoluto, debemos considerar que x puede ser tanto negativo como positivo, por lo tanto, las ecuaciones de ese estilo tienen como solución $x = \pm c$.

- **[Forma general de solución]:** Una pregunta válida es: ¿cómo podemos solucionar una ecuación cuadrática? Usando lo aprendido en las clases anteriores. Consideremos la ecuación en su forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0, \; a, b, c \in \mathbb{R}, \; a \neq 0$$

Nuestro objetivo es despejar la variable x. Queremos deshacernos del cuadrado. Lo más intuitivo es dividir por $a \neq 0$ para intentar factorizar:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \; (\star) \end{aligned}$$

Esto último tiene la forma de un binomio cuadrado perfecto $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Notemos que si llamamos y a la incógnita que nos falta para completar el cuadrado de binomio, entonces:

$$2xy = \frac{b}{a}x \implies 2y = \frac{b}{a} \implies y = \frac{b}{2a}$$

Luego, nuestro binomio al cuadrado será de la forma:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ &= x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} \end{aligned}$$

Esto nos sugiere sumar y restar el término $\frac{b^2}{4a^2}$ en la ecuación $(\star)$ para poder formar el cuadrado de binomio. Esto es equivalente a sumar un 0, con lo cual no estaríamos afectando la expresión. Entonces:

$$\begin{aligned} (\star) &= x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Volviendo a la ecuación original, que estaba igualada a 0, tendremos:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= 0 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c^{\times 4a}}{a^{\times 4a}} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ \left|x + \frac{b}{2a}\right| &= \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|} && \text{(Aplicamos } \sqrt{\ldots} \text{ a ambos lados)} \\ x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} && (\pm \text{ hace que } |a| = a) \\ x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Así, hemos deducido la fórmula general para solucionar una ecuación cuadrática. Es decir, si

$$ax^2 + bx + c = 0, \; a, b, c \in \mathbb{R}, \; a \neq 0$$

Entonces las soluciones son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula es conocida como la fórmula de Bhaskara.

- **[Definición: Discriminante]:** Se define el discriminante (escrito como Δ) mediante la siguiente fórmula:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Notemos que este discriminante aparece dentro de la raíz cuadrada de la fórmula deducida anteriormente. El valor que tenga Δ nos entregará información sobre las soluciones:

  - Si $\Delta > 0$, entonces la ecuación cuadrática tiene 2 soluciones reales y distintas.
  - Si $\Delta = 0$, entonces la ecuación cuadrática tiene 2 soluciones reales e iguales.
  - Si $\Delta < 0$, entonces la ecuación cuadrática **no** tiene soluciones reales.

Veamos por qué. Sabemos que la solución general es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Analicemos el caso más sencillo. Si $\Delta = 0$, tendremos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

pues sumar o restar un cero nos da el mismo resultado. Ahora bien, si $\Delta > 0$ tendremos que la raíz cuadrada está bien definida, pues sabemos que sólo recibe números positivos (vimos que $\sqrt{x}$ no existe en los números reales para $x < 0$). Como $\sqrt{\Delta} > 0$, entonces tendremos 2 soluciones distintas en los números reales.

Para $\Delta < 0$, tendremos que $\sqrt{\Delta}$ no existe en los números reales, por lo tanto las soluciones de x tampoco pueden existir en dicho conjunto.

- **[Aplicación]:** Encuentre las raíces (soluciones) de:

$$x^2 + 3x - 5 = 0$$

Solución: Aplicando la fórmula de Bhaskara. Identificamos $a = 1$, $b = 3$, $c = -5$. Luego, tenemos que:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$$

Así, las soluciones son:

$$x_+ = \frac{-3 + \sqrt{29}}{2},\ x_- = \frac{-3 - \sqrt{29}}{2}$$

Se puede comprobar que al reemplazar estos valores en la ecuación original, se satisfará la igualdad.

- **[Propiedades de las raíces (ceros)]:** Sean x_1 y x_2 las soluciones de una ecuación cuadrática de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

Es decir, al reemplazar x_1 y x_2 en dicha ecuación, se cumple la igualdad. Estas raíces cumplen:

  ⋆ $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$

  ⋆ $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$

Demostración: Ejercicio. Se puede deducir con la fórmula de Bhaskara.

Solución: Veamos primero la primera propiedad. Sabemos que:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Sumando, obtenemos:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

Para la segunda, debemos multiplicar:

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \\ &= \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2} \\ &= \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2} && \text{(Suma por su diferencia)} \\ &= \frac{b^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2} \end{aligned}$$

Para que en el último paso $(\sqrt{b^2-4ac})^2 = \sqrt{(b^2-4ac)^2}$, estamos obligados a que $\Delta = b^2-4ac \geq 0$ (por propiedad de raíces), o sea, necesitamos al menos una solución real. Teniendo esta condición, podemos seguir desarrollando:

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$