Semana 7: Ecuaciones e inecuaciones

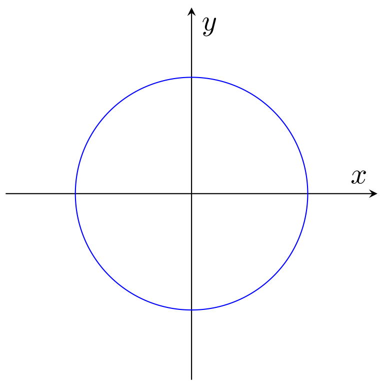
Máximo Flores Valenzuela / maximo.flores@ug.uchile.cl

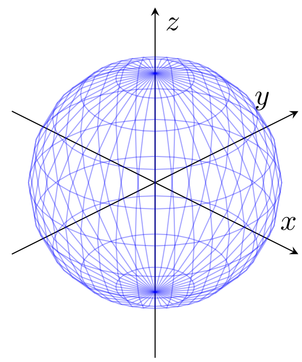
PPA-CIC-MAT: 20 y 22 de junio de 2023

- **[Definición: Ecuación]:** Una ecuación es una igualdad entre una o más incógnitas. Por ejemplo:

  1) $3x + 2 = 0$
  2) $2x^2 - 3x + 4 = 0$
  3) $x - 6x^3 = 4 - x^2$
  4) $x^2 + y^2 = 4$
  5) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

  Estas ecuaciones no siempre se pueden solucionar en el conjunto de los números reales. Podemos también encontrar la representación gráfica de cada una. Las que tienen sólo una variable, y tienen solución, son puntos. Las que tienen más de una variable, por ejemplo, la ecuación 4) y 5), son figuras, y pueden tener infinitas soluciones:





- **[Definición: Ecuación lineal]:** Se define una ecuación lineal como todas aquellas ecuaciones donde las variables tienen exponente uno. Trabajaremos las ecuaciones lineales con una incógnita. Su forma general es:

$$ax + b = 0, \text{ con } a \text{ y } b \text{ números reales, y } a \neq 0.$$

Observación: Si $a = 0$, nos reducimos al caso $0 \cdot x + b = 0$, y al multiplicar por 0 la incógnita desaparece, entonces sólo podemos tener que $b = 0$. Esto nos dice que si $a = 0$ y $b \neq 0$, la ecuación no tiene solución.

Si nos presentan una ecuación lineal de ese estilo, la solución es $x = \dfrac{-b}{a}$. Veamos por qué:

$$\begin{aligned}
ax + b = 0 &\implies ax + b - b = 0 - b && \text{(restamos } b \text{ a ambos lados)}\\
&\implies ax = -b && \text{(operamos términos semejantes)}\\
&\implies ax \cdot \frac{1}{a} = -b \cdot \frac{1}{a} && \text{(multiplicamos por } 1/a,\ a \neq 0)\\
&\implies a \cdot \frac{1}{a} \cdot x = \frac{-b}{a} && \text{(reordenamos factores)}\\
&\implies 1 \cdot x = \frac{-b}{a} && (a/a = 1)\\
&\implies x = \frac{-b}{a} && \text{(multiplicación por } 1)
\end{aligned}$$

Importante: Cuando aplicamos una operación a un lado de la igualdad, debemos aplicarla en el otro lado también para mantenerla. Pueden pensarlo como una balanza. Está equilibrada, y si agregamos más cosas, se va a desequilibrar. Debemos agregar lo mismo en ambos lados para que siga en equilibrio.

Veamos algunos ejemplos aplicados:

1. $6x - 8 = 0$ tiene como solución $x = \dfrac{-(-8)}{6} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$. Es decir, $x = \dfrac{4}{3}$. Lo importante de este ejemplo es que $a = 6$ y b considera el signo también, o sea, $b = -8$. Comprobemos que efectivamente soluciona la ecuación:

$$\text{Si } x = \frac{4}{3}, \text{ entonces } 6 \cdot \frac{4}{3} - 8 = 2 \cdot 4 - 8 = 8 - 8 = 0$$

   Como al reemplazar el valor me dio efectivamente 0, entonces sí cumple ser solución. Para ecuaciones lineales de la forma presentada, la solución encontrada es **única**, no hay ningún otro valor de x que cumpla que al reemplazarlo la expresión me de 0.

Ahora bien, no siempre ocuparemos la solución general $x = \dfrac{-b}{a}$ porque hay veces donde es más directo encontrarla, veamos el ejemplo 2:

2. $5x = 4$, basta dividir por 5 en ambos lados, porque sabemos que 5 dividido en 5 es 1, y $1 \cdot x = x$. Entonces tendremos:

$$\frac{5}{5}x = \frac{4}{5} \implies 1 \cdot x = \frac{4}{5} \implies x = \frac{4}{5}$$

Y también hay veces donde tendremos que acomodar la ecuación para llegar a algo conocido. En el ejemplo 3:

3. $\dfrac{2x-3}{5} = 2 - x$ no se parece en nada a la ecuación lineal que vimos al principio. Pero veamos que podemos llegar a algo parecido:

$$\begin{aligned}
\frac{2x-3}{5} = 2 - x &\implies 5 \cdot \frac{2x-3}{5} = 5 \cdot (2 - x) && \text{(multiplicamos por 5 en ambos lados)}\\
&\implies 2x - 3 = 10 - 5x && \text{(distribuimos al lado derecho)}\\
&\implies 2x - 3 + 5x = 10 - 5x + 5x && \text{(sumamos } 5x \text{ en ambos lados)}\\
&\implies 7x - 3 = 10 && \text{(agrupamos términos semejantes)}\\
&\implies 7x - 3 + 3 = 10 + 3 && \text{(sumamos 3 en ambos lados)}\\
&\implies 7x = 13 && \text{(simplificamos)}\\
&\implies \frac{1}{7} \cdot 7x = \frac{1}{7} \cdot 13 && \text{(dividimos por 7 en ambos lados)}\\
&\implies x = \frac{13}{7} && \text{(simplificamos)}
\end{aligned}$$

   Pueden comprobar que efectivamente al reemplazar el valor obtenido en la ecuación original, obtenemos una igualdad. Recordemos que $\dfrac{13}{7}$ no se puede simplificar más, porque 7 y 13 son números primos.

4. $\dfrac{x}{3} - 2 = 3 + x$. Como hemos visto anteriormente, la idea es agrupar la incógnita en un lado, y todo lo demás en el otro. Entonces podemos realizarlo de esta forma:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{3} - 2 = 3 + x &\implies \frac{x}{3} - 2 - x = 3 + x - x\\
&\implies \frac{x}{3} - 2 - x = 3\\
&\implies \frac{x}{3} - 2 - x + 2 = 3 + 2\\
&\implies \frac{x}{3} - x = 5
\end{aligned}$$

Hay dos formas de resolver el lado izquierdo. Una es restando fracciones. Necesitamos igualar denominadores, entonces notemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{3} - x = 5 &\implies \frac{x}{3} - \frac{x^{\times 3}}{1^{\times 3}} = 5 && \text{(amplificamos la fracción)}\\
&\implies \frac{x}{3} - \frac{3x}{3} = 5 \\
&\implies \frac{-2x}{3} = 5 && \text{(términos semejantes)}\\
&\implies \frac{-2x}{3} \cdot 3 = 5 \cdot 3 && \text{(multiplicamos por 3 en ambos lados)}\\
&\implies -2x = 15 \\
&\implies \frac{-2}{-2}x = \frac{15}{-2} && \text{(dividimos por } -2\text{)}\\
&\implies x = \frac{-15}{2} && \text{(simplificamos)}
\end{aligned}$$

La otra forma es la que se usa a menudo porque es más rápida, notemos que podemos multiplicar directamente la ecuación por 3 en ambos lados:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{3} - x = 5 &\implies 3 \cdot \left(\frac{x}{3} - x\right) = 3 \cdot 5 && \text{(multiplicamos por } 3^{*}\text{)}\\
&\implies x - 3x = 15 && \text{(distribuímos)}\\
&\implies -2x = 15 && \text{(términos semejantes)}\\
&\implies x = \frac{-15}{2} && \text{(dividimos por } -2\text{)}
\end{aligned}$$

Es importante notar en el paso señalado con asterisco $(*)$ que se debe multiplicar **todo** el lado izquierdo por 3, y **todo** el derecho por 3. Por eso se agrupó con paréntesis.

Como podemos notar, llegamos al mismo resultado.