Semana 6: Expresiones Algebraicas

Máximo Flores Valenzuela / maximo.flores@ug.uchile.cl

PPA-CIC-MAT: 13 y 15 de junio de 2023

- **[Motivación]:** ¿Para qué nos sirve agregar letras a matemáticas? ¿No es sólo complicar las cosas? La respuesta es no. Las expresiones algebraicas nos sirven para modelar situaciones de la vida real, porque no siempre todo es fijo, los fenómenos naturales son variables.

- **[Definición: Variable algebraica]:** Una variable es un término literal que puede tomar algún valor en un conjunto dado. Ejemplo: x, y, z, p, q. Si estas variables son números reales, diremos que pueden tomar cualquier valor en ese conjunto.

- **[Definición: Término algebraico]:** Los términos algebraicos son expresiones donde tendremos una combinación de números y variables algebraicas (o sólo variables algebraicas). Ejemplo: $4x^2$, $2a_n$, pq, r^{2i}, x^n.

- **[Definición: Expresión algebraica]:** Una expresión algebraica se define como la suma o resta de términos algebraicos. Ejemplo: $x - y$, $p(1 - q)$, $r^2 - r$, $s + 2p$.

- **[Operaciones]:** Podemos operar las expresiones algebraicas obteniendo expresiones equivalentes, pero simplificadas. Las simplificaciones se agrupan en:

  - *Términos semejantes:* Corresponde a operar los términos que estén asociados a una variable, de tal manera de agruparlos. Ejemplos:

    * *En la suma/resta:* $2x + 3y - x + 6y$ es igual a $x + 9y$. La operación se realizó como sigue: $(2x - x) + (3y + 6y) = x + 9y$. Como vemos, sólo hay que operar los coeficientes numéricos.
    * *En la multiplicación:* $2x \cdot 4xy$ es igual a $8x^2y$. Notemos que primero se multiplican los términos numéricos $(2 \cdot 4 = 8)$ y después los términos semejantes $(x \cdot x = x^2)$. El y se conserva, pues no se puede agrupar más.
    * *En la división:* $\dfrac{16xy^2z}{5xy}$ es igual a $\dfrac{16yz}{5}$. Aquí, también primero se dividen los números, pero $\dfrac{16}{5}$ no tiene un resultado entero, así que lo dejamos igual. Para las variables algebraicas, la simplificación se hace ocupando propiedades de potencias. $\dfrac{x}{x}$ es 1, $\dfrac{y^2}{y}$ es $y^{2-1} = y$, y z queda igual.

  - *Factorización:* Cuando tenemos una suma/resta de términos algebraicos que comparten una o más variables, podemos factorizarlas. Todas las variables repetidas quedan como factor común. Ejemplo: $xy - 2x$ es igual a $x \cdot (y - 2)$ y $xyz - 2x^2y$ es igual a $xy \cdot (z - 2x)$. La forma de verlo es la siguiente (veremos el segundo ejemplo):

    1) Identificamos todas las variables que se repiten. En $xyz - 2x^2y$ tenemos dos términos donde se repiten x e y. **OJO:** No se repite x^2.
       Observación: No es necesario que las variables se repitan en todos los términos, por ejemplo, al pasar de $xy - 3x + 2$ a $x(y - 3) + 2$ también hicimos una factorización válida.
    2) Sacamos las variables que se repiten como factor común. Recordemos que un factor es algo que multiplica. $xy \cdot$ ...algo...
    3) Nos preguntamos: ¿qué nos falta para obtener cada término que quiero? Y eso es lo que va dentro del paréntesis. En el ejemplo, para obtener el primer término, debo multiplicar xy por z, pues $xy \cdot z = xyz$. Para el segundo, debo multiplicar xy por $2x$, así obtengo $2x^2y$.

4) Vemos los signos que deben ir dentro del paréntesis. Notemos que xyz es positivo en la expresión que queremos, así que dentro del paréntesis irá un $+z$. Por otro lado, $2x^2y$ aparece negativo, por lo tanto, irá dentro del paréntesis un $-2x$. Así, la factorización es $xy \cdot (z - 2x)$.

– *Distributividad:* Corresponde a expandir una expresión. Se multiplica cada término que está dentro del paréntesis por el factor común. Ejemplo: $x(3 - y)$ es igual a $3x - xy$, y $(x + 3y)(2 + z)$ es igual a $(x + 3y) \cdot 2 + (x + 3y) \cdot z$, que a su vez es igual a $2x + 6y + xz + 3yz$ (aplicando dos veces esta propiedad).

- **[Productos notables]:**

1) **Cuadrado de binomio:** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Dem. Del caso positivo. Por definición de potencia,

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = (a+b)\cdot a + (a+b)\cdot b && \text{(distributividad)}\\
&= a\cdot a + b\cdot a + a\cdot b + b\cdot b && \text{(distributividad)}\\
&= a^2 + a\cdot b + a\cdot b + b^2 && \text{(def. potencia + conmutatividad)}\\
&= a^2 + 2ab + b^2 && \text{(agrupación de términos semejantes)}
\end{aligned}$$

Para el caso con signo negativo es el mismo procedimiento (Ejercicio).

Ejercitación: Expanda las siguientes expresiones aplicando el cuadrado de binomio:

∗ $(2x + \sqrt{y})^2$, para $y \geq 0$.

∗ $(x^n - 1)^2$, para x un número real y n un número natural.

Observación: Sabemos que la suma conmuta, entonces podemos decir que $(a + b)^2 = (b + a)^2$*. Pero ¿qué pasa con la resta? Notemos que:*

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 &= [(-1)\cdot(b-a)]^2 && \text{(Factor común } -1\text{)}\\
&= (-1)^2\cdot(b-a)^2 && \text{(Prop. de potencia)}\\
&= 1\cdot(b-a)^2 && ((-1)^2 = 1)\\
&= (b-a)^2 && \text{(Multiplicar por } 1 \text{ no afecta)}
\end{aligned}$$

Así, podemos concluir que también se tiene $(a - b)^2 = (b - a)^2$.

2) **Suma por su diferencia:** $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Notemos que esta no es conmutativa, porque $a^2 - b^2 \neq b^2 - a^2$ (la igualdad se cumple sólo si $a = b$).

Dem. Aplicando distributividad y agrupación de términos semejantes:

$$\begin{aligned}
(a+b)(a-b) &= (a+b)\cdot a + (a+b)\cdot(-b)\\
&= (a+b)\cdot a - (a+b)\cdot b\\
&= a\cdot a + b\cdot a - a\cdot b - b\cdot b\\
&= a^2 + a\cdot b - a\cdot b - b^2\\
&= a^2 - b^2
\end{aligned}$$

Ejercitación: Simplifique la siguiente expresión: $(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})$. También, encuentre una expresión equivalente para $a - b$ usando la suma por su diferencia.

3) **Binomio con término común:** Una pregunta natural es qué pasa si tenemos una expresión más compleja, por ejemplo, de la forma:

$$x^2 + ax + bx + ab$$

Con a y b números reales. ¿Se puede factorizar? ¿Hay alguna propiedad que me lo permita? Notemos que ninguna de las propiedades anteriores nos permite con certeza decir si existe una manera de factorizar esta expresión.

Lo cierto es que sí se puede. Notemos que podemos agrupar convenientemente los términos:

$$\begin{aligned} x^2+ax+bx+ab &= (x^2+ax)+(bx+ab) && \text{(asociatividad)} \\ &= [x(x+a)]+[b(x+a)] && \text{(factor común)} \\ &= x(x+a)+b(x+a) && \text{(asociatividad)} \end{aligned}$$

Notemos que en este punto, ahora $(x+a)$ se convierte en un factor común, entonces podemos factorizarlo:

$$x(x+a)+b(x+a) = (x+a)\cdot(x+b)$$

¡Encontramos la factorización! Es decir, $x^2+ax+bx+ab=(x+a)(x+b)$. De aquí sale la regla tan conocida de *"buscar dos números que sumados me den el término que acompaña a x, y multiplicados me den el término libre (aquel que no tiene x)"*.

Ejercitemos para entenderlo mejor:

* x^2+5x+6. Podemos escribir convenientemente $5x$ como $3x+2x$, y 6 como $3\cdot 2$. Aquí, estamos haciéndonos la pregunta de *"dos números que sumados me den 5, y multiplicados me den 6"*. Luego,

  $$\begin{aligned} x^2+5x+6 &= x^2+3x+2x+3\cdot 2 \\ &= (x+3)(x+2) && \text{(aplicando la propiedad)} \end{aligned}$$

* $x^2-4x-12$. Este es un poco más difícil, pero en esencia se aplica lo mismo. Podemos escribir convenientemente $-4x$ como $-6x+2x$ y -12 como $-6\cdot 2$. Nuevamente, estamos haciéndonos la pregunta *"dos números que sumados nos den -4, y multiplicados nos den -12"*. Entonces:

  $$\begin{aligned} x^2-4x-12 &= x^2+(-6x)+2x+(-6)\cdot 2 \\ &= (x+(-6))(x+2) && \text{(aplicando la propiedad)} \\ &= (x-6)(x+2) \end{aligned}$$

  Notemos que es <u>muy</u> importante tener cuidado con los paréntesis. En la propiedad que dedujimos, todos los signos son positivos.

Ejercitación: Factorice x^2+6x+9.

Para terminar, veamos dos ejercicios que aplican todo lo visto. Se nos pide simplificar las siguientes expresiones:

1) $\dfrac{2a-a^2}{a-2}\cdot\dfrac{a+1}{a}$, para a un número real distinto de 0 y de 2.

   Solución: Podemos aplicar las factorizaciones vistas:

   $$\begin{aligned} \frac{2a-a^2}{a-2}\cdot\frac{a+1}{a} &= \frac{a(2-a)}{a-2}\cdot\frac{a+1}{a} && \text{(factor común } a\text{)} \\ &= \frac{a(-1)(a-2)}{a-2}\cdot\frac{a+1}{a} && \text{(Factor común: } 2-a=(-1)\cdot(a-2)\text{)} \\ &= -a\cdot\frac{a+1}{a} && \text{(prop. de potencia)} \\ &= -(a+1) && \text{(prop. de potencia)} \end{aligned}$$

2) $\dfrac{a^2+10a+25}{a^2-25} : \dfrac{a+5}{a-5}$, para a un número real tal que $a \neq 5$ y $a \neq -5$ (también abreviado $a \neq \pm 5$).

Solución: Podemos aplicar las factorizaciones y propiedades vistas:

$$
\begin{aligned}
\frac{a^2+10a+25}{a^2-25} : \frac{a+5}{a-5} &= \frac{a^2+10a+25}{a^2-25} \cdot \frac{a-5}{a+5} && \text{(prop. de fracciones)}\\
&= \frac{a^2+5a+5a+5\cdot 5}{a^2-25} \cdot \frac{a-5}{a+5} && \text{(Expresamos } 10a = 5a+5a \text{ y } 25 = 5\cdot 5\text{)}\\
&= \frac{(a+5)(a+5)}{a^2-25} \cdot \frac{a-5}{a+5} && \text{(Binomio con término común)}\\
&= \frac{(a+5)(a+5)}{(a+5)(a-5)} \cdot \frac{a-5}{a+5} && \text{(Suma por su diferencia)}\\
&= 1 && \text{(prop. de potencias)}
\end{aligned}
$$

Así, la expresión larga que teníamos al inicio sabemos que es igual a 1, cuando $a \neq \pm 5$. ¿Por qué hay que poner esta restricción?