Clase 2

Sucesiones

2.1. Axiomas de los reales

Los axioma son proposiciones que no requieres ser demostradas, y sobre las cuales se basan propiedades.

En este caso, enunciaremos los axiomas de los reales desde los cuales se demuestran todas las propiedades de los números reales. A pesar de que fueron mencionados brevemente en la clase pasada, es necesario volver a ellos para poder introducir el **axioma del supremo**, el cual es esencial para poder distinguir entre números racionales e irracionales.

Axiomas de cuerpo

1. Conmutatividad de la suma y la multiplicación.
2. Asociatividad de la suma y la multiplicación.
3. Distributividad de la multiplicación sobre la suma.
4. Existencia de un elemento neutro para la suma, y de un elemento neutro para el producto.
5. Existencia de elementos inversos (opuesto en el caso de la suma, recíproco en la multiplicación).

Axiomas de orden

6. Tricotomia (o un numero es estrictamente positivo, o su inverso lo es, o es cero)
7. Clausura (si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x + y \in \mathbb{R}$ y $x \cdot y \in \mathbb{R}$).

Axiomas del supremo

8. Todo conjunto no vacío y acotado superiormente posee un supremo.

2.2. Sucesiones

Una sucesión real es una función desde los naturales a los reales, i.e, f: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Y se aceptará que un número finito de términos no existan o no pertenezcan a los naturales. Piense por ejemplo, $s_n = \sqrt{n^2 - 9}$.

2.2.1. Convergencia de series

Diremos que una serie converge a l si dado cualquier intervalo $[l-\epsilon, l+\epsilon]$, sólo una cantidad finita de términos queda fuera de este intervalo. l se conoce como el límite de la sucesión. Además, cuando el límite existe es único.

La definición formal de covergencia estable que una sucesión converge a l si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0)\ s_n \in [l-\epsilon, l+\epsilon].$$

Demuestre:

1. Que la sucesión definida por $s_n = \frac{1}{n}$ tiende a cero.
2. Que el teorema del supremo permite definir $\sqrt{2}$.
3. Demuestre que $\sqrt{2}$

2.2.2. Teorema del Sandwich

Sean u_n, v_n, w_n sucesiones reales. Si u_n y w_n convergen al real l y ademas

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0)\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n,$$

entonces v_n tambien converge a l.

2.3. Videos

- Visión general de la clase (https://youtu.be/I1p9V7ytjRI).
- Sucesión 1/n tiende a cero (https://youtu.be/7sLItPlv_TU).
- El teorema del supremo permite definir $\sqrt{2}$.(https://youtu.be/S6mtG9IA4lY).
- $\sqrt{2}$ es irracional (https://youtu.be/S6mtG9IA4lY).