APUNTE DE MATEMÁTICAS I
ÁLGEBRA

Magister en Informática Médica,

Universidad de Chile

Preparado por Jocelyn Dunstan Escudero

Santiago de Chile

29 de mayo de 2020

Índice general

Prólogo **v**

1. Operaciones básicas con matrices **1**

1.1. ¿Qué es una matriz? 1

1.2. Matriz transpuesta 2

1.3. Multiplicación de matrices 2

1.4. Videos 4

2. Sistemas de ecuaciones lineales y método de Gauss **5**

2.1. Matrices elementales 6

2.2. Método de Gauss 6

2.3. Obtener la solución del sistema a partir del cálculo de la inversa 7

2.4. Videos 8

3. Traza y determinante **9**

3.1. Traza 9

3.2. Determinante 9

3.3. Videos 11

4. Control 1 **12**

4.1. Cohorte 2018 12

4.2. Cohorte 2020 13

5. Valores y vectores propios I 15

5.1. Definición . . . 15

5.2. Ejercicios . . . 15

5.3. Videos . . . 17

6. Valores y vectores propios II 18

6.1. Procedimiento para calcular valores y vectores propios . . . 18

6.2. Interpretación geométrica de los valores y vectores propios . . . 18

6.3. Videos . . . 20

7. Interpretación geométrica 21

7.1. Plano cartesiano . . . 21

7.2. Solución a sistemas de ecuaciones . . . 22

7.3. Vectores ortonormales . . . 22

7.4. Valores y vectores propios como un cambio de base . . . 24

7.5. Videos . . . 24

8. Control 2 26

8.1. Cohorte 2018 . . . 26

8.2. Cohorte 2020 . . . 27

9. Diagonalización de matrices 28

9.1. Definición . . . 28

9.2. Cálculo de las potencias de una matriz a partir de su diagonalización. . . . 29

9.3. Demostración de que valores propios distintos generan vectores propios linealmente independientes . . . 30

10. Matrices de Markov 32

10.1. Matrices de Markov o matrices estocásticas . . . 32

10.1.1. ¿Por qué tienen un valor propio 1? . . . 32

10.1.2. Aplicando sucesivamente una matriz markoviana . . . 33

10.2. Ejemplo numérico 33
10.3. Videos 33

11. Rango de una matriz y formas cuadráticas **34**
11.1. Rango de una matriz 34
11.2. Multiplicidad geométrica y algebraica de valores propios 35
11.3. Matrices simétricas reales 35
11.4. Formas cuadráticas 36

Bibliografía **39**

Prólogo

Este apunte corresponde al curso de Matemáticas 1 del Magíster en Informática Médica de la Universidad de Chile [1]. Este curso intenta en 11 clases entregar los conceptos básicos del álgebra líneal. Es por supuesto difícil intentar enseñar álgebra líneal en tan pocas clases, pero este es mi intento!

Este magíster se da cada dos años, y yo he impartido este curso el 2018 y el 2020. En la segunda versión pude mejorar varias cosas con respecto al 2018, y me encantaría hacer el curso un par de veces más para consolidar este apunte (como el magíster se da cada dos años no alcanzo a aburrirme).

Este 2020 fue especial puesto que me tocó impartirlo de manera online debido al covid-19. Esto implicó hacer clases por videollamadas y preparar cápsulas con contenidos. Estas cápsulas se encuentran en mi canal de Youtube, y cada clase termina con un link a las cápsulas complementarias cuando corresponde.

Si encuentra un error o tiene alguna sugerencia para mejorar este trabajo, escríbame a jdunstan@uchile.cl.

Quisiera terminar dedicándole este apunte a la gente que le ha tocado difícil en esta crisis sanitaria. Los alumnos de este curso son profesionales de la salud, y muchas veces están de turno durante las clases o evaluaciones. Además, todo mi respeto a aquellos que tienen que cuidar a sus hijos/as y que veo a veces en la cámara. Si pude escribir y mejorar este apunte el 2020 fue gracias a lo priviligiada que soy de tener un sueldo, una casa cómoda y la tranquilidad mental de poder hacer ciencia en pandemia.

Jocelyn Dunstan
Universidad de Chile
2020

[1] https://cimt.uchile.cl/mim/

Clase 1

Operaciones básicas con matrices

1.1. ¿Qué es una matriz?

Una matriz es un arreglo rectangular de números o un tabla de doble entrada. Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz de m filas y n columnas, sus elementos están representados por:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

donde se accede a un elemento de la matriz a través de sus sub-índices, nombrando primero la fila y luego la columna.

Se denomina $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las matrices de m-filas y n-columnas cuyos elementos pertencen a los reales. Un caso especial son mas **matrices cuadradas** de $\mathcal{M}_{nn}$, llamadas también de orden-n.

En el caso de matrices cuadradas, distinguiremos la **diagnonal principal** y la **diagonal secundaria**. La principal es aquella que va desde la esquina superior izquierda hacia la inferior derecha, mientras que la secundaria va desde la superior derecha a la inferior izquierda.

Se dice que dos matrices son iguales si y solo si (ssi) cada uno de sus elementos son iguales, es decir,

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \iff a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j \tag{1.2}$$

Algunas matrices de especial interés son la **matriz nula** (todos los elementos son cero), la **matriz diagonal** (que solo tiene valores es su diagonal principal), y la **matriz identidad** (que tiene 1's en la diagonal principal y el resto cero).

La Tabla 1.1, extraída del libro *Essential Mathematics for Political and Social Reserch* muestra propiedades de suma y multiplicación por escalar. Note que en este contexto $conformable$ significa que son matrices que pueden sumarse, es decir, que tiene el mismo nuúmero de filas y columas.

Properties of (Conformable) Matrix Manipulation

Commutative Property	$\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\mathbf{Y}+\mathbf{X}$
Additive Associative Property	$(\mathbf{X}+\mathbf{Y})+\mathbf{Z}=\mathbf{X}+(\mathbf{Y}+\mathbf{Z})$
Matrix Distributive Property	$s(\mathbf{X}+\mathbf{Y})=s\mathbf{X}+s\mathbf{Y}$
Scalar Distributive Property	$(s+t)\mathbf{X}=s\mathbf{X}+t\mathbf{X}$
Zero Property	$\mathbf{X}+\mathbf{0}=\mathbf{X}$ and $\mathbf{X}-\mathbf{X}=\mathbf{0}$

Figura 1.1: Propiedades de la suma de matrices extraída de la Ref. [1].

1.2. Matriz transpuesta

Se obtiene de invertir los elementos fuera de la diagonal, y se puede demostrar que si $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T$ entonces $\boldsymbol{A}$ es una matriz simétrica.

Dicho de otro modo, si los elementos de la matriz A son $a_{i,j}$, los elementos de la transpuesta son $a_{j,i}$. De esta definición se desprende que la transpuesta de un vector vertical de n componentes $v_{1,n}$ es un vector horizontal que denotamos $v_{n,1}$.

1.3. Multiplicación de matrices

Antes de definir la multiplicación es importante notar que solo está definida cuando en número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda, y no es conmutativa, es decir, en general $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

Luego, si $\boldsymbol{A}$ es una matriz de $k\times n$, y $\boldsymbol{B}$ es una matriz de $n\times p$, la multiplicación $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ será una matriz de $k\times p$, cuyo elemento (i,j) es,

$$c_{ij}=a_{i\alpha}b_{\beta j},\quad \text{con } \alpha,\beta\in[1,n]$$

La Tabla 1.2 muestra propiedades de la multiplicacion (extraída de la Ref. [1]).

Desafio 1

Demuestre que si $\boldsymbol{AA}=\mathbf{0}$, entonces el problema no tiene solución única. Es más, existe toda una familia de matrices, llamadas nilpotentes, que cumplen que $\boldsymbol{A}^n=\mathbf{0}$. El siguiente es un ejemplo de matriz nilpotente:

Properties of (Conformable) Matrix Multiplication

Associative Property	$(\mathbf{XY})\mathbf{Z} = \mathbf{X}(\mathbf{YZ})$
Additive Distributive Property	$(\mathbf{X}+\mathbf{Y})\mathbf{Z} = \mathbf{XZ}+\mathbf{YZ}$
Scalar Distributive Property	$s\mathbf{XY} = (\mathbf{X}s)\mathbf{Y}$ $= \mathbf{X}(s\mathbf{Y}) = \mathbf{XY}s$
Zero Property	$\mathbf{X0} = \mathbf{0}$

Figura 1.2: Propiedades de la multiplicación de matrices extraída de la Ref. [1].

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Existen además las matrices idempotentes que cumplen la propiedad $\boldsymbol{X}^n = \boldsymbol{X}$. Un ejemplo de idempotente es:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Definición de matriz inversa

Decimos que $\boldsymbol{A}$ es invertible si y solo si existe una matriz $\boldsymbol{B}$ tal que,

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I} \tag{1.5}$$

donde $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$ se denomina la inversa de $\boldsymbol{A}$.

En el caso de matrices de 2×2 de la forma

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

se tiene la siguiente fórmula para la inversa:

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \frac{1}{det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Desafio 2

Demuestre la fórmula 4.4 dándose una matriz genérica de 2×2 y pidendo que multiplicada por $\boldsymbol{M}$ dé la identidad. Note que naturalmente aparece el determinante de la matriz, definido como $det(M) = ad - bc$.

Corroborando las operaciones entre matrices usando R o una página Web

Para las siguientes matrices $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$,

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Calcule, primero *a mano* y luego en R o en http://matrixcalc.org/es/:

1. $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}$
2. $\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}$
3. $\boldsymbol{X}^T, \boldsymbol{Y}^T$
4. $\det \boldsymbol{X}, \det \boldsymbol{Y}$
5. $\boldsymbol{X}^{-1}, \boldsymbol{Y}^{-1}$ si existen

1.4. Videos

- Mutiplicación de matrices (https://youtu.be/-oCAGxUEQ6Q).
- Inversa de una matriz de 2x2 (https://youtu.be/6Vl_106tg8Q).

Clase 2

Sistemas de ecuaciones lineales y método de Gauss

Esta clase está basada en el apunte de Álgebra lineal de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile [3], en donde se han seleccionado algunas ideas que me parecen importante que aprendan en informática médica.

Lo primero es notar que los sistemas de ecuaciones tienen una representación vectorial, y que existen muchas maneras de resolver sistemas de ecuaciones, siendo uno de ellos el método de Gauss.

Considere como ejemplo el siguiente sistema:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6 \tag{2.1}$$
$$x_2 + x_3 = 4 \tag{2.2}$$
$$x_1 + x_2 = 2 \tag{2.3}$$

Una forma de despejar el valor de x_1, x_2 y x_3 es despejar de 2.2 que $x_2 = 4 - x_3$, y luego usar esto en la Ec. 2.3 para obtener que $x_1 = 2 - x_2 = x_3 - 2$. Finalmente, reemplazando en Ec. 2.1 obtenemos que $x_1 = 2, x_2 = 0$ y $x_3 = 4$.

Una forma mas ordenada de resolver este sistema es multiplicar la Ec. 2.1 por (-1) y sumarla a la Ec. 2.3, en cuyo caso obtenemos una nueva ecuación:

$$x_3 = 4. \tag{2.4}$$

De manera similar, multiplicamos la Ec. 2.2 por (-1) y la sumamos a la Ec. 2.3 obteniendo,

$$x_1 = 2. \tag{2.5}$$

Que son los mismos valores que ya obtuvimos despejando "de manera desordenada". Esta idea de multiplicar una ecuación por un cierto valor y sumarla a otra es la esencia del método de Gauss. En efecto, el sistema de ecuaciones antes descrito puede ser expresado de forma matricial como $\boldsymbol{A}x = b$ con,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Y para resolverlo lo que hacemos es escribir la **matriz aumentada** en donde al lado de $\boldsymbol{A}$ copiamos la matriz identidad,

$$(A|I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y lo que ahora hacemos es realizar operaciones que nos permitan tener una matriz identidad **a la izquierda** de la matriz aumentada. La idea detrás de esto es que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.

2.1. Matrices elementales

Denominaremos matriz elemental $E_{p,q}(\lambda)$ a aquella matriz que es casi la identidad excepto que tiene el número λ en la posición (q,p). Por ejemplo,

$$E_{1,3}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sé que es confuso que la matriz se llame (p, q) y que el elemento distinto de cero esté en el (q, p), pero es una convención de notaciń. Y viene de la idea que la matriz $E_{p,q}(\lambda)$ tiene como efecto multiplicar por λ la fila p y sumársela a la fila q. Esto va a quedar más claro cuando empecemos a aplicar el método de Gauss.

2.2. Método de Gauss

Lo que hacemos es preguntarnos por qué matriz elemental necesitamos pre-multiplicar (multiplicar por la izquierda) la matriz aumentada para acercanos a tener la identidad al lado izquierdo. Una posible solución es aplicar por la izquierda la matriz elemental $E_{1,3}(-1)$. En efecto,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que el orden en que se aplican las matrices elementales es libre, es decir, puede que usted haya decidido eliminar otra fila primero, pero el resultado debe ser el mismo. Ahora, voy a pre-multiplicar por $E_{2,1}(-1)$, obteniendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El lado izquierdo de la matriz aumentada está cada vez más parecido a la identidad. Para "mejorar" la segunda fila aplicamos $E_{3,2}(1)$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al lado izquierdo tenemos casi la identidad excepto por el signo, pero eso es fácil de arreglar multiplicando por (-1) toda esa fila:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De esta forma hemos obtenido que la inversa de $\boldsymbol{A}$ es:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Compruebe que en efecto es la inversa multiplicando $\boldsymbol{A}$ con $\boldsymbol{A}^{-1}$.

2.3. Obtener la solución del sistema a partir del cálculo de la inversa

Puesto que $\boldsymbol{A}x = b$, si la inversa existe, entonces podemos despejar el vector x multiplicando por la izquierda por $\boldsymbol{A}^{-1}$. En efecto, $x = \boldsymbol{A}^{-1}b$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Es decir, recuperamos los valores para $x_1.x_2$ y x_3 obtenidos anteriormente.

El método de Gauss puede parecer muy enredado, pero lo enseño en este curso porque es un clásico en álgebra líneal (al menos como yo la aprendí). En las siguientes clases vamos a aprender una forma mucho más directa de calcular la inversa de una matriz de 3x3.

2.4. Videos

- Ejemplo del método de Gauss (https://youtu.be/kaY5IUOmezI).

Clase 3

Traza y determinante

3.1. Traza

La traza, definida sólo para matrices cuadradas, es la suma de los elementos de la diagonal. Es decir, para una matriz de orden k, $Tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{k} a_{ii}$.

Desafio 1

Demuestre que si tr($\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$) = $\boldsymbol{0}$, entonces $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ para una matriz genérica de rango 2.

Una propiedad contraintuitiva es que la tr($\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$) es igual al cuadrado de cada elemento en la matriz. Considere el siguiente ejemplo:

$$tr\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right] = tr\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} = 15 = 1+1+4+9. \tag{3.1}$$

3.2. Determinante

En la traza sólo consideramos los elementos en la diagonal. En el determinante, en cambio, todos los elementos de la matriz son usados para evaluar la matriz. Recordemos primero el caso de matrices de 2×2,

$$\det(\mathbf{X}) = |\mathbf{X}| = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}.$$

El cálculo es más complejo para matrices cuadradas más grandes y para ello necesitamos introducir el concepto de **submatriz**:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_{[11]} = \begin{bmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_{[24]} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{bmatrix}.$$

Entonces, para una matriz de $n \times n$, se puede definir el determinante de la submatriz $|\boldsymbol{X}_{[ij]}|$ de $(n-1) \times (n-1)$. Además, se debe agregar un co-factor que da el signo de ese elemento: $(-1)^{i+j}|\boldsymbol{X}_{[ij]}|$. Luego, el determinante de una matriz en términos de sus submatrices es, para un valor constante de i,

$$\det(X) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} x_{ij} |\boldsymbol{X}_{[ij]}|$$

En este curso vamos a calcular determinantes de hasta de 3×3, cuya foŕmula es:

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \mathbf{a} \det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - \mathbf{b} \det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + \mathbf{c} \det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

Desafio 2

Demuestre que $\det \boldsymbol{A} = 6$, con $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Interpretación del determinante

Le suena que el cálculo del determinante es igual al producto cruz entre dos vectores de 3 dimensiones?

Lo es: el valor absoluto del determinante es igual al volumen del paralelepípedo definido por los 3 vectores (colocados uno al lado del otro en la matriz). Además, el determinante es nulo si los 3 vectores se encuentran en el mismo plano.

Y que pasa para vectores de dos dimensiones? Se recupera la noción de área?

Ya que sabemos calcular el determinante de matrices de matrices de rango > 2, hay alguna formula sencilla para la inversa en términos del determinante como la tenemos para matrices de 2×2?

Respuesta rápida: No :(

La descomposición de Cayley-Hamilton para matrices de rango 3 establece que:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\left[\frac{1}{2}((\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2 - \mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2\right] \tag{3.2}$$

Y para matrices de rango 4 la expresión es la siguiente:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\left[\frac{1}{6}((\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^3 - 3\,\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2 + 2\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^3)\boldsymbol{I} - \frac{1}{2}\boldsymbol{A}((\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2 - \mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2) + \boldsymbol{A}^2\mathrm{tr}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^3\right] \tag{3.3}$$

Conclusión: agradecer la presencia de los computadores para calcular inversas! Pero es importante haber tenido esta experiencia calculando operaciones a mano para que no se sorprendan de que el computador se demore.

Desafio 3

Considere la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3. Videos

- Ejemplo del cálculo del determinante de 3x3 (https://youtu.be/wW1TnUH8yw8).
- Desafío parte 1 (https://youtu.be/N6nbi4FM5ik)
- Desafío parte 2 (https://youtu.be/dkwErEFIe1Q)

Clase 4

Control 1

4.1. Cohorte 2018

Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \tag{4.1}$$
$$x_2 + x_3 = 1 \tag{4.2}$$
$$x_1 + x_2 = 1 \tag{4.3}$$

a) (*1 punto*) Encuentre la solución por substitución (es decir, despejando una incógnita desde una ecuación y reemplazándola en otra)

b) (*1.5 puntos*) Escriba el sistema de ecuaciones en forma matricial y calcule la inversa usando el método de Gauss.

c) (*2.5 puntos*) Compare su resultado calculando la inversa con Cayley-Hamilton:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\left[\frac{1}{2}((\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2 - \mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2\right]$$

d) (*1 punto*) Usando su resultado para la inversa, partes b) o c), demuestre que recupera el resultado en a) usando $x = \boldsymbol{A}^{-1}b$.

4.2. Cohorte 2020

Pregunta 1 (1.5 puntos)

Usando la siguiente fórmula para la inversa de una matriz:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Calcule la inversa de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Pregunta 2 (1.5 puntos)

Encuentre la solución por substitución del siguiente sistema (es decir, despejando una incógnita desde una ecuación y reemplazándola en otra)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6 \tag{4.4}$$
$$x_1 + x_3 = 2 \tag{4.5}$$
$$x_2 + x_3 = 2 \tag{4.6}$$

Pregunta 3 (1.5 puntos)

Escriba las ecuaciones (1)-(3) como un sistema matricial de la forma **Ax** = **b**, y encuentre la solución para **x** usando la fórmula para la inversa de una matriz de 3x3:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \left[\frac{1}{2}((\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2 - \mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 \right]$$

Pregunta 4 (1.5 puntos)

Demuestre que $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$, con *tr* la traza, para una matriz genérica de rango 2.

Bonus (1 punto extra)

Calcule la inversa de la matriz de la Pregunta 1 usando el método de Gauss.

Clase 5

Valores y vectores propios I

5.1. Definición

Diremos que v es un *vector propio* de $\boldsymbol{A}$ (distinto de cero) si cumple que existe un λ, que se denomina *valor propio*, tal que

$$\boldsymbol{A}v = \lambda v \tag{5.1}$$

- La forma de encontrar v y λ es pedir que el sistema $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})v = 0$ tenga solución no trivial (es decir, $v \neq 0$).
- Lo cual es equivalente a pedir que $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}$ sea no invertible
- Que es lo mismo que decir $det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$

(Estoy buscando formas de demostrarles estas equivalencias)

La última equivalencia nos da la metología para calcular valores propios: por medio del cálculo del determinante (asi que si todavía no aprende, este es el momento). Al igualar el determinante a cero, la ecuación que resulta para λ se llama *polinomio característico* (de grado n, con n la dimensión de la matriz).

Una vez encontrados los valores propios, los vectores propios se encuentran reemplazando cada λ en $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})v = 0$.

Note que los vectores propios no son únicos. Cada valor propio tiene una infinidad de vectores propios que se obtiene de multiplicar un vector propio por una constante (reemplace kv en la Ec. 5.1, con k una constante).

5.2. Ejercicios

(Todos con videos disponibles, y todos los cálculos pueden ser verificados en http://matrixcalc.org/es/vectors.html. Note que la página no es perfecta, pero el 16 de mayo, en la clase 1 de Matemáticas para la

Bioestadística vamos a hacer todos estos cálculos en R!)

1) Demuestre que la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

tiene los valores propios $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 4$, con vectores propios

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

2) Demuestre que M no tiene valores propios reales.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Algunas propiedades

- La suma de los valores propios de la matriz es igual a su traza.
- El producto de valores propios es igual al determinante de la matriz.

Problemas adicionales

Calcule los valores y vectores propios de las siguientes matrices:

1. $M = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
2. $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Desafío

Encuentre el polinomio característico para λ y demuestre que $\lambda_1 = 11$ y $\lambda_2 = 8$ cumplen la ecuación.

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

Trate de encontrar los vectores propios asociados. Por qué es difícil?

5.3. Videos

- Problema 1 (https://youtu.be/_KKJBATpz4Y).
- Problema 2 (https://youtu.be/SWTooGPgEhg).
- Problema adicional 2 (https://youtu.be/3LdPUGcLDvc).
- Desaío (https://youtu.be/NGUlM1P2ZL0).

Clase 6

Valores y vectores propios II

6.1. Procedimiento para calcular valores y vectores propios

1. Calcular el determinante de $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$.
2. Igualarlo a cero y resolver el polinomio característico para λ.
3. Encontrar los vectores propios $\mathbf{v}$ resolviendo $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\mathbf{v} = 0$,

Y podemos además usar la suma de los valores propios es igual a la traza de la matriz, y la multiplicación de valores propios es igual al determinante. Es más, para matrices de $2x2$ la ecuación del polinomio característico tiene la forma:

$$\lambda^2 - traza\,\lambda + determinante = 0.$$

6.2. Interpretación geométrica de los valores y vectores propios

- Uno busca un conjunto de vectores que al aplicarles $\boldsymbol{A}$ mantengan su dirección (aunque pueden cambiar su sentido).
- El valor propio indica cambio en la magnitud del vector.
- Vectores propios distintos son ortogonales (esto puede demostrarse).

Ejercicio 1

Calcule los valores y vectores propios de $\boldsymbol{M}$ y grafíquelos en el plano cartesiano.

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Por favor note que el valor propio $\lambda = 0$ da lugar a vectores propios de la misma manera que lo hace cualquier valor propio. Esto se conoce como el *kernel* de $\boldsymbol{A}$.

Ejercicio 2

Considere la siguiente matriz:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Calcule valores y vectores propios (y grafíquelos). ¿Qué le hace esta matriz a los vectores?

¿Qué pasa si hubiésemos considerado esta otra matriz?

$$\boldsymbol{P}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Ejercicio 3

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Esta matriz se conoce como matriz de reflección. Encuentre la interpretación geométrica, calcule valores y vectores propios y grafíque éstos últmos.

¿Y si hubiesemos considerado la matriz?

$$\boldsymbol{R}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{6.5}$$

¿Cómo se relacionan los valores y vectores propios de estas dos matrices?

Ejercicio 4

¿Y la matriz identidad?

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

En este caso tenemos un solo valor propio $\lambda = 1$ puesto que todos los vectores cumplen que tras aplicar $\boldsymbol{A}$ quedan igual! (la idea de la multiplicación de por una matriz como una operación lineal será explorada en clases sucesivas).

Ejercicio 5

Considere la matriz de rotación. ¿Hay algun vector real que pueda rotar pero mantener su dirección?

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

¿Y los valores y vectores propios de $\boldsymbol{Q}^2$?

6.3. Videos

- Problema 1 (https://youtu.be/wBI6Rz2u-LU).

Clase 7

Interpretación geométrica

7.1. Plano cartesiano

Esta clase tiene por objetivo revisar lo que hemos aprendido hasta ahora y reforzar la interpretación geométrica. Esta idea, de juntar geometría y álgebra, viene desde René Descartes, quien propuso en el siglo XVII la idea del plano cartesiano.

Y es que un vector de números reales en n dimensiones corresponde a un punto en el espacio $\mathbb{R}^n$. Por simplicidad, pensemos en 2 dimensiones y visualicemos el punto (-3,1). Este punto se grafica en el plano (x,y) buscando la coordenada 3 en la dirección negativa de x, y coordenada 1 en la dirección positiva de y. Los signos que toman los puntos dentro del plano cartesiano se muestran en la Figura 7.1.

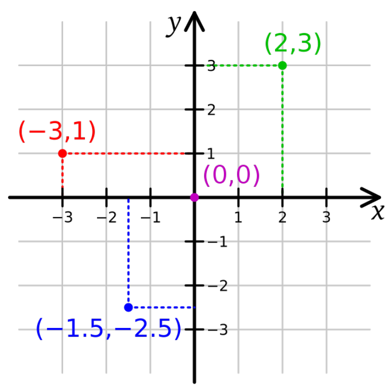

Figura 7.1: Ilustración del plano cartesiano sacada de Wikipedia.

Note además que es común hablar de los cuatro cuadrantes del plano cartesiano, los cuales nombrados en dirección opuesta a las manillas del reloj como I ($x > 0$, $y > 0$); II ($x < 0$, $y > 0$); III ($x < 0$, $y < 0$) y IV ($x > 0$, $y < 0$).

El vector (x_1, y_1) es una fecha que conecta el origen $(0,0)$ con el punto (x_1, y_1). Note que la suma algebraica de vectores (sumar componente a componente) coincide con la idea geométrica de poner un vector detrás de otro y luego unir el origen con la punta de la flecha del último vector que se sumó (dibuje para convencerse!).

7.2. Solución a sistemas de ecuaciones

Muchas de las ideas que siguen fueron tomadas del libro de álgebra lineal de Gilbert Strang [2], que es largo pero es una joya...

Tal como se muestra en la Figura 7.2, la solución a los sistemas de ecuaciones pueden tener solucion única, no tener solución o donde toda la recta cumple ambas ecuaciones. Repita estos gráficos y compruebe las distintas situaciones.

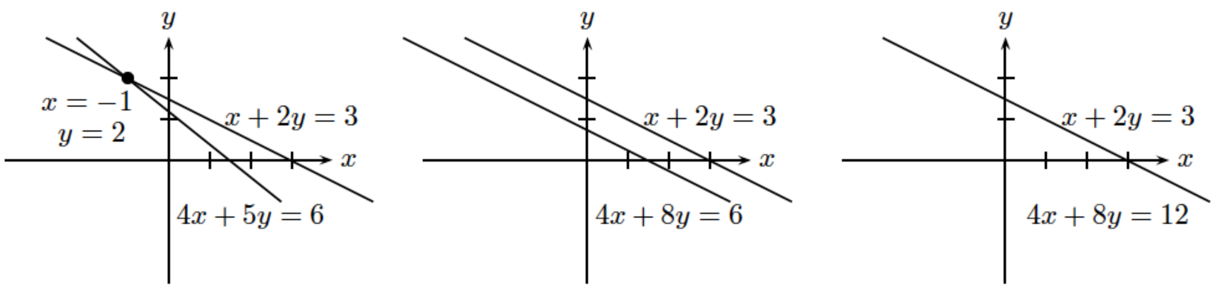

Figura 7.2: Tipos de soluciones a sistemas de ecuaciones. Figura extraída del libro de álgebra lineal de Gilbert Strang [2]

Otro contenido visto en clases y que tiene interpretación geométrica es la forma matricial de un sistemas de ecuaciones, es decir $Ax = b$. Hasta ahora lo hemos visto de esta manera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot2+1\cdot5+6\cdot0 \\ 3\cdot2+0\cdot5+3\cdot0 \\ 1\cdot2+1\cdot5+4\cdot0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

Otra forma de ver un sistema de ecuaciones es por columnas,

$$2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

De lo cual uno puede entender la solución al sistema de ecuaciones como una combinación lineal de las columnas de la matriz. En este caso particular, la solución se compone de dos veces el vector (1,3,1), 5 veces el vector (1,0,1) y 0 veces el vector (6,3,4). Grafique para entender mejor :)

7.3. Vectores ortonormales

Otro interpretación geométrica importante de revisar es la de valores y vectores propios, y cuando lo que hayamos es una base de vectores ortonomales.

Lo primero es decir que un vector normal es aquel que tiene largo 1, donde el largo se calcula de acuerdo al teorema de pitágoras. Como lo muestra la Figura 7.3, la forma de calcular el largo se extiende para dimensiones mayores a dos, teniendo que en $\mathbb{R}^n$ el largo del vector es $||\mathbf{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$, donde las barras verticales dobles significan calcular largo. Realice los cálculos para obtener el largo de los vectores de la Figura 7.3.

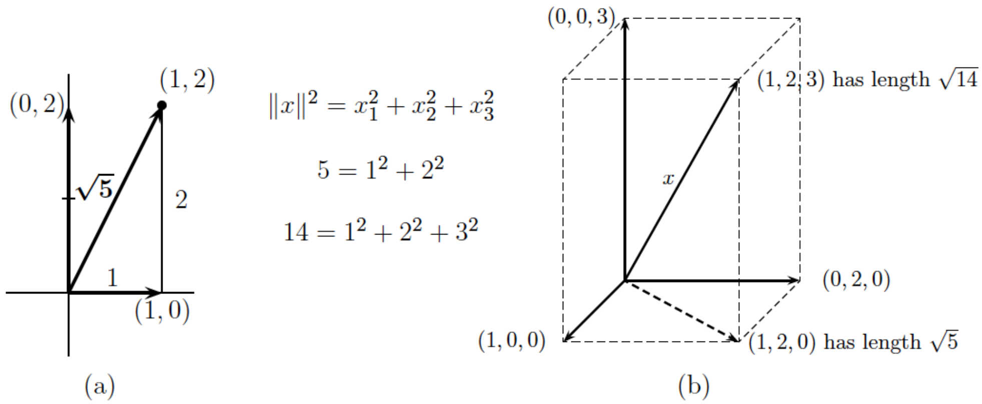

Figura 7.3: Largo de un vector en dos y tres dimensiones. Figura extraída del libro de álgebra lineal de Gilbert Strang [2]

Lo segundo que es necesario precisar es qué son vector ortogonales. La respuesta es que son aquellos que forman un ángulo de 90 grados entre ellos. La figura 7.4 muestra un ejemplo de dos vectores ortogonales.

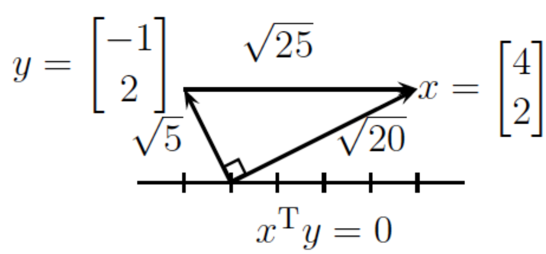

Figura 7.4: Vectores ortogonales (también llamado perpendiculares). Figura extraída del libro de álgebra lineal de Gilbert Strang [2]

Luego, los vectores ortonormales son aquellos vectores ortogonales y que además tienen largo 1.

Una forma operativa de verificar dos vectores son ortogonales es mostrando que su producto punto es igual a cero, en donde el producto punto en n dimensiones se define como:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_n \cdot b_n] \tag{7.3}$$

La demostración de que producto punto igual cero entre vectores es equivalente a decir que son ortogonales es muy bella y haré un video de eso <3

Por otra parte, la forma en que se calcula el producto punto es sospechosamente parecido a la forma es que se multiplican matrices. Por ahora no tengo explicación para eso.

7.4. Valores y vectores propios como un cambio de base

Hay casos que el encontrar valores y vectores propios genera vectores ortonormales rotados un cierto angulo θ con respecto a los ejes cartesianos (también llamados ejes canóninos). La Figura 7.5 muestra un eje x rotado en θ.

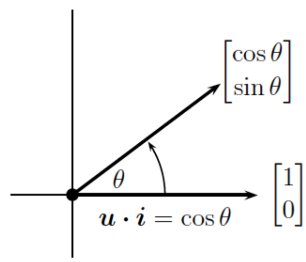

Figura 7.5: Rotación de ejes cartesianos. Figura extraída del libro de álgebra lineal de Gilbert Strang [2]

La forma de calcular las componentes de estos ejes rotados es recordar (o aprender) las definiciones de las funciones trigonométricas (las volveremos a ver en cálculo):

$$\text{seno}(\theta) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \tag{7.4}$$

$$\text{coseno}(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \tag{7.5}$$

$$\text{tangente}(\theta) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\text{seno}(\theta)}{\text{coseno}(\theta)} \tag{7.6}$$

Note que en este caso los ejes $x = (1,0)$ e $y = (0,1)$ pasan a $x' = (\cos\theta, \sin\theta)$ e $y' = (-\sin\theta, \cos\theta)$.

Desafío 1

Verifique que (x', y') es una base ortonomal en $\mathbb{R}^2$.

Desafío 2

Vuelva a revisar los vectores propios de las clases 6 y 7. En qué casos los vectores forman una base ortonormal? Qué características tienen esas matrices?

7.5. Videos

- Rotación de ejes (https://youtu.be/XfBJV3yh7xs).

- Producto punto entre vectores (https://youtu.be/jWpxx2cxHU4).

Clase 8

Control 2

8.1. Cohorte 2018

Considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (*2 puntos*) Calcule los valores y vectores propios de $\boldsymbol{A}$.

b) (*1.5 puntos*) Encuentre los valores y vectores propios de $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{I}$, es decir,

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

¿Cómo se compara su resultado con lo obtenido para $\boldsymbol{A}$?

c) (*1 punto*) Calcule la matriz inversa de A usando la fórmula que indica que si

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

entonces,

$$M^{-1} = \frac{1}{det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Encuentre los valores y vectores propios de $\boldsymbol{A}^{-1}$. ¿Cómo se compara su resultado con lo obtenido para $\boldsymbol{A}$?

d) (*1 punto*) Interprete gráficamente lo que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{A}^{-1}$ hacen sobre vectores cualquiera, indicando además las direcciones en las que apuntan los vectores propios.

e) (*0.5 puntos*) ¿Qué hace $\boldsymbol{B}$ sobre los vectores? (considere vectores *sencillos*).

8.2. Cohorte 2020

Pregunta 1 (5 puntos)

Considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (*0.5 puntos*) Qué le hace esta matriz a los vectores?
Pruebe con vectores fáciles cómo (0,1),(1,0),(1,1),(-1,1),(-1,-1) y grafique sus resultados.

b) (*2 puntos*) Calcule los valores y vectores propios de $\boldsymbol{A}$.

c) (*0.5 punto*) Le hace sentido el resultado que obtuvo en b) a partir de lo que aprendió graficando en la parte a)?

d) (*2 puntos*) Considere la matriz $k\boldsymbol{A}$, con k un número entero cualquiera. Calcule los valores y vectores propios de $k\boldsymbol{A}$. Cómo se comparan con los de $\boldsymbol{A}$?

Pregunta eliminada por error en el enunciado. Lo correcto debió ser:

e) Considere ahora la matriz $A + kA$, con k un número entero cualquiera. Calcule los valores y vectores propios de $A + kA$. Cómo se comparan con los de A?

Siento mucho el error y el tiempo perdido y frustración que les causó. No voy a corregir esa parte de la pregunta y la asignación de los 6 puntos será entre las otras partes de la prueba. De todas maneras se revisará lo realizado, asignando 0.5 puntos de bonus por un correcto intento de resolverlo.

Pregunta 2 (1 punto)

Considere una matriz $\boldsymbol{A}$ genérica de 2x2. Cómo se comparan los valores propios de $\boldsymbol{A}$ y su transpuesta?

Clase 9

Diagonalización de matrices

9.1. Definición

Antes de explicar en que consiste la diagolización, mencionaré qué matrices pueden optar a ella:

- Matrices que tienes todos sus valores propios distintos.
- Valores propios repetidos **podrían** generar vectores propios independientes, en cuyo caso es posible diagonalizar.

Note que al final de esta clase hay una demostración de por qué valores propios distintos producen vectores propios independientes.

Una matriz $\boldsymbol{A}$ diagonalizable puede ser escrita como:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1} \tag{9.1}$$

con $\boldsymbol{P}$ la matriz que tiene en sus columnas los vectores propios de $\boldsymbol{A}$, y $\boldsymbol{D}$ un matriz diagonal cuyos elementos son los valores propios de $\boldsymbol{A}$. Es decir, si λ_i es el i-ésimo valor propio de $\boldsymbol{A}$ (de $n \times n$), que tiene asociado el vector propio $\mathbf{v}_i$, entonces:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Piense en la diagonalización como una forma útil de escribir una matriz, y que esta representacion es sólo para algunas matrices (aquellas que tengan tantos vectores propios distintos como el número de filas de la matriz).

Note que si la matriz $\boldsymbol{A}$ se multiplica por un escalar k en la Ec. 9.1, los vectores propios no cambian pero los valores propios quedan multiplicados por este escalar. Este resultado lo obtuvo en el Control 2!

Ejemplo 1

La matriz $\boldsymbol{A}$ definida por

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

tiene valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 6$, con vectores propios asociados $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivamente. Dado que los valores propios son distintos sabemos que es diagonalizable. De hecho, siguiendo la Ec. 9.1,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{PDP}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Compruebe esa multiplicación de matrices, y note que para calcular la inversa de P hemos usado la fórmula para la inversa de matrices de 2x2.

9.2. Cálculo de las potencias de una matriz a partir de su diagonalización.

La forma diagonal de una matriz permite el cálculo rápido de las potencias de una matriz, puesto que hay una cancelación entre $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{P}^{-1}$ cada vez que se multiplica la matriz por si misma. Es decir,

$$\boldsymbol{A}^n = \underbrace{(\boldsymbol{PDP}^{-1})(\boldsymbol{PDP}^{-1})\cdots(\boldsymbol{PDP}^{-1})(\boldsymbol{PDP}^{-1})}_{\text{n veces}} = \boldsymbol{PD}^n\boldsymbol{P}^{-1} \tag{9.2}$$

De este cálculo se desprenden las siguientes conclusiones (válidas para cualquier valor entero n):

1. Los vectores propios de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{A}^n$ son los mismos ya que su diagonalización tiene una matriz $\boldsymbol{P}$ idéntica.
2. Los valores propios de $\boldsymbol{A}^n$ se obtiene de elevar a n los valores propios de A.
3. Con $n = -1$ se obtiene la matriz inversa.

Las conclusiones antes expuestas pueden ser difíles de entender a la primera, así que dese el tiempo para convencerse.

Esta forma de obtener las potencias de $\boldsymbol{A}$ es muy conveniente puesto que multiplicar matrices es muy costoso computacionalmente hablando.

En el caso de la matriz del Ejemplo 1, su potencia n-ésima es:

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 6^n - 1 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix},$$

De donde se desprende, por ejemplo, que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5/6 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix},$$

Ejercicio

Encuentre, si es posible, la diagnonalización de $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

9.3. Demostración de que valores propios distintos generan vectores propios linealmente independientes

Atención: esta demostración es difícil. No se sienta mal si no la entiende a la primera. La podemos revisar en detalle en la clase!

En general. se dice que $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ son vectores linealmente independientes si

$$a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}, \tag{9.3}$$

entonces necesariamente $a_1 = ... = a_n = 0$. En otras palabras, cuando vectores son linealmente independientes uno de ellos no puede ser obtenido como combinación lineal de los otros.

Considere por ejemplo el caso sencillo de dos vectores: decir que éstos son linealmente independientes equivale a decir que si uno es igual a una constante por el otro, entonces esa constante necesariamente es cero.

Ahora procederemos a demostrar que si una matriz de rango n tiene todos sus valores propios distintos, entonces sus vectores propios $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes. Partiendo de la definición de vectores linealmente independientes, Ec. 9.3, aplicamos la matriz $\boldsymbol{A}$,

$$a_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}. \tag{9.4}$$

La misma Ec. 9.3 la multiplicamos por λ_n,

$$a_1\lambda_n\mathbf{v}_1 + ... + a_n\lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}. \tag{9.5}$$

Restamos Ecs. 9.4 y 9.5 para eliminar el término n-ésimo, igual en ambas expresiones,

$$\underbrace{a_1(\lambda_1 - \lambda_n)\mathbf{v}_1 + ... + a_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)\mathbf{v}_{n-1}}_{n-1 \text{ términos}} = \mathbf{0}. \tag{9.6}$$

Con este procedimiento buscamos eliminar el último término en cada iteración, hasta dejar sólo el término proporcional a $\mathbf{v}_1$. De hecho, aplicando $\boldsymbol{A}$ a la Ec. 9.6,

$$a_1\lambda_1(\lambda_1-\lambda_n)\mathbf{v}_1+...+a_{n-1}\lambda_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_n)\mathbf{v}_{n-1}=\mathbf{0}. \tag{9.7}$$

Y multiplicando la Ec. 9.6 por λ_{n-1},

$$a_1\lambda_{n-1}(\lambda_1-\lambda_n)\mathbf{v}_1+...+a_{n-1}\lambda_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_n)\mathbf{v}_{n-1}=\mathbf{0}. \tag{9.8}$$

Restando Ecs. 9.7 y 9.8,

$$\underbrace{a_1(\lambda_1-\lambda_{n-1})(\lambda_1-\lambda_n)\mathbf{v}_1+...+a_{n-2}(\lambda_{n-2}-\lambda_{n-1})\mathbf{v}_{n-1}}_{n-2\text{ términos}}=\mathbf{0}. \tag{9.9}$$

Aplicando este procedimiento $n-2$ veces obtenemos,

$$a_1(\lambda_1-\lambda_n)(\lambda_1-\lambda_{n-1})...(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)\,\mathbf{v}_1=\mathbf{0} \tag{9.10}$$

Puesto que $\mathbf{v}_1\neq\mathbf{0}$ puesto que es un vector propio, algún término a la izquierda del vector debe ser cero. Puesto que la demostración parte del supuesto que los valores propios son distintos, necesariamente $(\lambda_1-\lambda_n)\neq(\lambda_1-\lambda_{n-1})\neq...\neq(\lambda_1-\lambda_2)\neq 0$, por lo que sólo queda la opción de que a_1 sea cero.

Para demostrar que $a_i=0\,\forall i\in[1,n]$ basta con ir retrocediendo en el proceso. Por ejemplo, de la n-1 iteración obtuvimos que necesariamente $a_1=0$. Luego, usando este resultado en la iteración anterior (que tiene dos términos) se concluye que $a_2=0$. Así sucesivamente mostramos que todos los coeficientes que acompañan a los vectores propios son cero si la suma ponderada es indénticamente nula.

■

Clase 10

Matrices de Markov

10.1. Matrices de Markov o matrices estocásticas

Estas matrices son aquellas en las que la suma de todas sus columnas es igual a 1 y todos sus elementos son positivos [1]. La matriz $\boldsymbol{A}$ es un ejemplo de matriz markoviana[2]:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix}. \tag{10.1}$$

Estas matrices son importantes porque tienen la interpretación de contener las probabilidades de saltar de un estado a otro, y por eso se pide que sus coeficientes sean positivos y menores que 1.

Para ganar intuición, calcule los valores y vectores propios de $\boldsymbol{A}$. Puede hacerlo *a mano* o usando R. Si decide hacerlo a mano, probablemente le conviene calcular los valores y vectores propios de $5\boldsymbol{A}$, y luego usar las propiedades que aprendió en el Control 2.

Ahora si que usando R, calcule los valores y vectores propios de $\boldsymbol{A}^2$.

¿Qué puede notar de estas matrices?

Todas las matrices markovianas cumplen que tienen un valor propio 1 y los demas menores que 1. Y además, que al calcular las potencias de la matriz, los valores propios distintos de 1 se hacen cada vez más pequeños.

10.1.1. ¿Por qué tienen un valor propio 1?

Para hacer la demostración considere la matriz transpuesta a una matriz markoviana. En este caso se cumple que la suma de las filas es igual a 1. Luego, esta matriz tiene como vector propio el vector que tiene solo unos (toma un par de minutos entenderlo. Lo voy a poner en una cápsula para más claridad). En el

[1] http://people.math.harvard.edu/~knill/teaching/math19b_2011/handouts/lecture33.pdf

[2] Note que se habla de una matriz doblemente markoviana (también llamada doblemente estocástica) cuando tanto sus columnas como sus filas suman 1.

Control 2 usted demostró que los valores propios de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{A}^T$ son iguales, por lo tanto, $\boldsymbol{A}$ tiene un valor propio igual a 1.

Note que los valores propios de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{A}^T$ son iguales, no así sus vectores propios. En el ejemplo 10.1, $\boldsymbol{A}$ no tiene un vector propio (1,1), pero si lo tiene $\boldsymbol{A}^T$.

10.1.2. Aplicando sucesivamente una matriz markoviana

¿Qué pasa cuando aplico sucesivas veces la matriz $\boldsymbol{A}$ a un vector $\mathbf{P}$, con valor inicial $\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Lo que usted debería observar es una tendencia al vector propio asociado al valor propio 1, es decir, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Esto no es una particularidad de esta matriz en particular, sino una propiedad de este tipo de modelamiento. Aplicaciones sucesivas de la matriz pueden entenderse como calcular el estado posterior dado un estado inicial. Y lo que sucede es que el sistema tiende al vector propio asociado al valor propio 1. Esto se conoce como el estado estacionario o distribución de equilibrio de la matriz A.

10.2. Ejemplo numérico

Para la generación del 2018 esta fue una tarea evaluada. En U-cursos voy a poner una solución esperada para que le sirva de ejemplo, pero la idea es que antes de mirar la solución intente programar algo, y si tiene que mirar, vaya escribiendo comandos usted. Los conocimientos de R que posee ya son suficientes!

Considere el porcentaje del personal de apoyo disponible en tres pisos equivalentes en un hospital en un tiempo t, que denominaremos $P_1(t)$, $P_2(t)$ y $P_3(t)$, respectivamente. Se sabe que inicialmente la distribución del personal es 40 %, 30 % y 30 %, y que el número de personas se mantiene constante en el tiempo.

Además, cada año se les cambia de piso con la condición de que permanezca el 80 % en el mismo piso y que el 10 % se mueva a los otros dos pisos (pensemos esto como querer mantener la mayor parte del personal para no empezar todo de nuevo, pero si inyectar gente nueva a los pisos).

1. ¿Cuál es la proporción de personal en cada piso después de un año? ¿Después de dos años? ¿Qué pareciera estar ocurriendo?
2. ¿Se le ocurre otra situación (distinta a la del hospital) donde podría tener una situación como la descrita (donde la evolución temporal del sistema se describa de esta manera)?
3. ¿Cuál es la distribución para tiempos muy largos?

   Conteste estas preguntas apoyándose en cálculos numéricos que haga en R y sus conocimientos teóricos.

10.3. Videos

- Matrices markovianas (https://youtu.be/Wzfku55XL1U).

Clase 11

Rango de una matriz y formas cuadráticas

11.1. Rango de una matriz

El rango de una matriz nos dice cuanto espacio es generado por esa matriz, y da cuenta de la independencia entre las columnas que la forman.

Considere como ejemplo la siguiente matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11.1}$$

El rango es 1 puesto que las columnas se repiten, o dicho de otra manera, la segunda columna se obtiene de multiplicar por uno la primera. Y dado que el rango es menor a 2, el espacio donde esta matriz vive, diremos que $\boldsymbol{A}$ es no-invertible (lo que es facilmente comprobable puesto que tiene determinante cero).

Sin embargo, es importante notar que esta matriz SI es diagonalizable! En efecto, tiene valores propios $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$, con vectores propios asociados $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, y $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, es decir, valores propios distintos y vectores propios linealmente independientes. Y comprobamos que en efecto $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PDP}^{-1}$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{PDP}^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{11.2}$$

Que una matriz $\boldsymbol{A}$ sea invertible significa que el sistema de ecuaciones $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única para $\mathbf{x}$. Acabamos de mostrar que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PDP}^{-1}$, con $\boldsymbol{P}$ una matriz compuesta de vectores linealmente independientes, luego $\boldsymbol{P}$ es invertible. El problema se origina en la matriz $\boldsymbol{D}$, que por tener un valor propio 0, tiene una de sus filas igual a cero, y por tanto no genera el espacio $\mathbb{R}^2$. Es decir, se puede entender que $\boldsymbol{A}$ sea no-invertible puesto que $\boldsymbol{D}$ no lo es. Esto sucederá cada vez que exista un valor propio igual a 0. En otras palabras, que $\boldsymbol{D}$ tenga una fila de ceros implica que el determinante de la matriz es cero, y por tanto no es invertible.

Moraleja: el cálculo del rango de la matriz permite saber si la matriz es invertible. Si el número de columnas linealmente independientes es igual a la dimensión del espacio, entonces se dice que tiene rango completo y es por tanto invertible. Una matriz puede ser no-invertible aún cuando es diagonalizable.

11.2. Multiplicidad geométrica y algebraica de valores propios

La multiplicidad geométrica (MG) del valor propio λ asociado a la matriz $\boldsymbol{A}$, $\gamma_A(\lambda)$, se define como el número de vectores propios independientes asociados a λ. Equivalentemente, la MG es la dimensión del espacio creado por $Ker(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})$, en donde Ker indica las soluciones de esa ecuación igual a cero, también conocido como espacio propio. Y se tiene el siguiente teorema:

Una matriz de $n \times n$ es diagonalizable si y solo si la ***suma*** *de sus multiplicidades geométricas es igual a n.*

Se denomina multiplicidad algebraica (MA) $\alpha_A(\lambda)$ al número de repeticiones del valor propio λ. Dicho de otro modo, es la máxima potencia de resolver el polinomio característico $det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}) = 0$, es decir, $(x-\lambda)^\alpha$.

Para un valor propios λ_0 de $\boldsymbol{A} \in M_{nn}$ se cumple,

$$1 \leqslant \gamma_A(\lambda) \leqslant \alpha_A(\lambda) \leqslant n \tag{11.3}$$

Corolario: Una matriz $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable si $\gamma_A(\lambda) = \alpha_A(\lambda)$

Ejercicio 3

Demuestre que MG=1 y MA=2 en

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11.4}$$

Ejercicio 4

¿Es la siguiente matriz diagonalizable? Conclúyalo del cálculo de MG y MA.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{11.5}$$

11.3. Matrices simétricas reales

En el caso particular de matrices simétricas reales, $\boldsymbol{S} \in M_{nn}(\mathbb{R})$, se tienen las siguientes propiedades:

1. n valores propios reales y los vectores propios /emphpueden ser escogidos ortonormales (cuando los vectores son independientes pero no ortogonales se puede generar una base de vectores ortogonales usando el método de Gram-Schmidt, el cual no vemos en este curso por falta de tiempo).

2. Su diagonalización es de la forma $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^{T}$. Es decir, $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^{T}$. Note que para que esto sea cierto, los vectores propios tienen que estar normalizados. La normalizaciń se obtiene calculando el largo o norma del vector usando teorema de pitágoras y luego dividiendo al vector por ese largo, tal como se hizo con los vectores de la Ec. 11.2.

Espectro de una matriz

Usamos la letra $\boldsymbol{Q}$ cuando hacemos la describir la matriz que cumple la diagonalización $\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^{T}$ porque tradicionalmente se usa esa letra para hablar de espectros.

Y lo enunciado al comienzo de esta sección se conoce como **teorema espectral**, y establece que cualquier matriz cuadrada simétrica con coeficientes reales es ortogonalmente diagonalizable (es decir, que sus vectores propios pueden ser escogidos tal que forman un ángulo de 90 grados)[1].

La noción del espectro se puede extender de matrices a operadores (vamos a ver un poco de eso en el curso de cálculo), e incluso existe la teoría espectral, que estudia las propiedades de los espectros para determinados operadores. Por ejemplo, se usa mucho la diagonalización de matrices en mecánica cuántica.

Ejercicio 5

Calcule los valores y vectores propios y diagonalización de la siguiente matriz:

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{11.6}$$

11.4. Formas cuadráticas

Lo último que veremos en el curso de álgebra es formas cuadráticas, que permite entender de manera geométrica lo que ocurre con matrices simétricas con valores propios positivos. Para esta sección es necesario que repase qué es una elipe, y lo hablaremos en más detalle en la clase presencial.

Puesto que $\boldsymbol{S}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, multiplicando por $\mathbf{x}^T$ por la izquierda,

$$\mathbf{x}^T\boldsymbol{S}\mathbf{x} = \lambda, \tag{11.7}$$

y se dice que una matriz es *definida positiva* si $\mathbf{x}^T\boldsymbol{S}\mathbf{x} > 0$, es decir, cuando todos sus valores propios son positivos.

En el caso de $M_{22}(\mathbb{R}^2)$,

[1] https://es.wikipedia.org/wiki/Matriz_diagonalizable

$$
\begin{aligned}
x^T \boldsymbol{S}\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= ax^2 + 2bxy + cy^2
\end{aligned}
\tag{11.8}
$$

La elipse

La ecuación de la elipse centrada en el origen es $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$. La descomposición *espectral* nos permite encontrar la forma de esta cónica a partir del cáculo de valores y vectores propios. De hecho, considere como ejemplo la siguiente elipse:

$$
5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1 \tag{11.9}
$$

¿En qué ejes esta rotada esa elipse?

Lo primero es determinar la matriz $\boldsymbol{S}$ asociada,

$$
5x^2 + 8xy + 5y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{11.10}
$$

Que tiene valores propios 9 y 1, y vectores propios asociados $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, respectivamente.

Por lo tanto, la forma cuadrática puede ser escrita como:

$$
x^T \boldsymbol{S}\mathbf{x} = (x^T \boldsymbol{Q})\boldsymbol{D}(\boldsymbol{Q}^T \mathbf{x}), \tag{11.11}
$$

que en este caso particular equivale a,

$$
x^T \boldsymbol{S}\mathbf{x} = 9\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1. \tag{11.12}
$$

Redefiniendo los ejes como $\mathbf{X} = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2$ e $\mathbf{Y} = \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2$, la elipse es escribe como:

$$
9\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 = 1, \tag{11.13}
$$

Y considerando que la ecuación de una elipse de semiejes a y b se escribe como:

$$
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{11.14}
$$

podemos reescribir la Ec. 11.15 como:

$$\frac{\mathbf{X}^2}{3^2} + \frac{\mathbf{Y}^2}{1^2} = 1, \tag{11.15}$$

que corresponde a una elipse orientada en los ejes **X** y **X**, con semiejes 3 y 1, respectivamente. Es más, no es coincidencia que la forma final tenga como semiejes $\sqrt{9}$ y $\sqrt{1}$, que son las raices de valores propios de la matriz. En general, una elipse se distingue por tener $(x^T \boldsymbol{Q})\boldsymbol{D}(\boldsymbol{Q}^T \mathbf{x}) = 1$, y que puede ser graficada en sus ejes principales **X** y **Y**, que son sus vectores propios, donde sus semiejes son $1/\sqrt{\lambda_1}$ y $1/\sqrt{\lambda_2}$.

Bibliografía

[1] Gill, Jeff. Essential mathematics for political and social research. Cambridge University Press, 2006.

[2] http://math.mit.edu/~gs/linearalgebra/
Introduction to Linear Algebra, Gilbert Strang. Fifth Edition (2016)

[3] http://docencia.dim.uchile.cl/algebra_lineal/material/ma1102_utf8.pdf
Apunte curso Algebra Lineal MA1102 2017, FCFM, U. Chile