FACULTAD DE MEDICINA
UNIVERSIDAD DE CHILE

Función Exponencial

Unidad de Biomatemática
Profesora Caroll Cuellar G.

Logros de Aprendizaje

- Reconoce distintos tipos de crecimientos según situación dada. Calcula constante de crecimiento y decrecimiento según contexto.

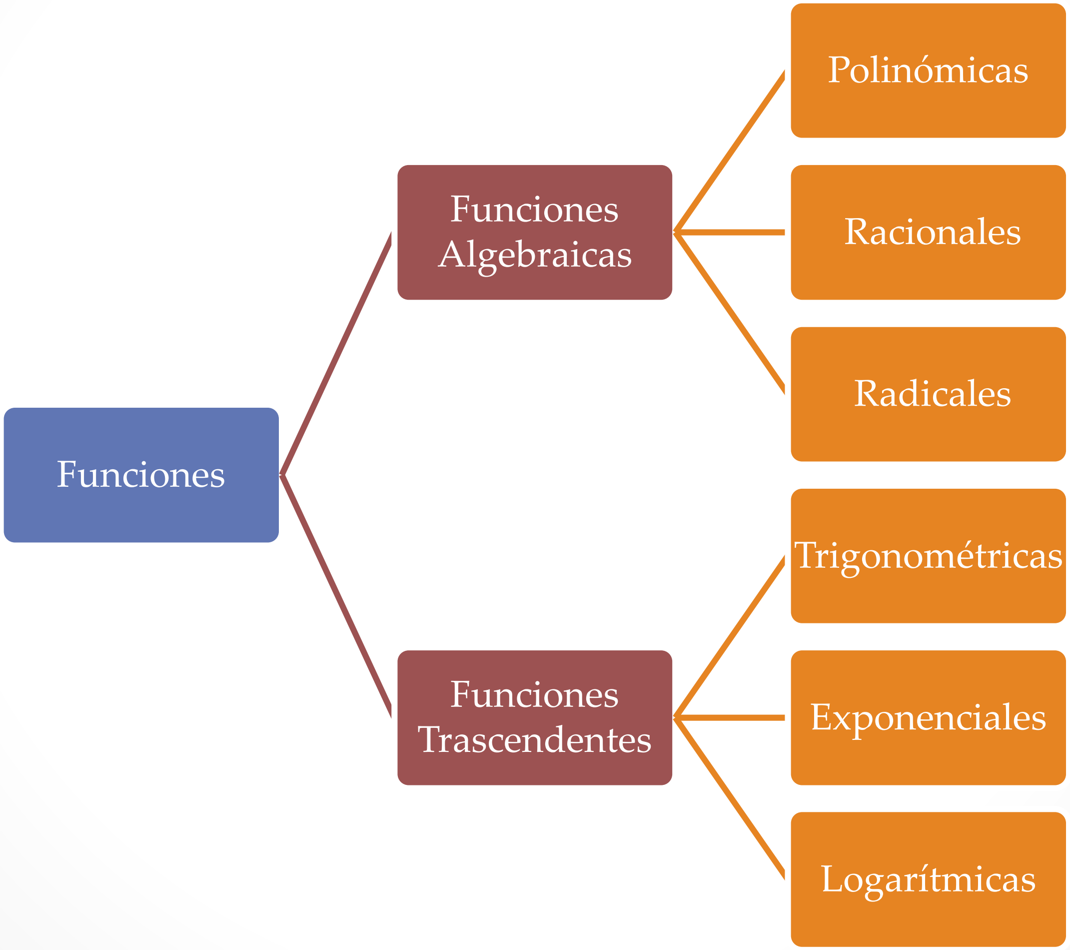
- Reconoce modelos de crecimiento y decrecimiento que involucran factor limitante dada su estructura algebraica.

- Obtiene modelos de crecimiento y decrecimiento a partir de datos

Contenidos

1. Función Exponencial.
2. Crecimiento y decaimiento Exponencial. Modelo Logístico
3. Ajuste de datos

Introducción



El número de Euler

Al número e se le conoce como Número de Euler o Constante de Napier.

"e" fue reconocido y utilizado por primera vez por el matemático escocés John Napier, quien introdujo el concepto de logaritmo en el cálculo matemático.

El número "e" al igual que el número "pi" es un número trascendente, es decir, que no puede ser obtenido mediante la resolución de una ecuación algebraica con coeficientes racionales. Además, es un irracional, no expresable por el cuociente de dos enteros; o bien, no puede ser expresado con un número finito de cifras decimales o con decimales periódicos.

Leonhard Euler, matemático suizo, fue quien le dio el nombre al número e.

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000
5	2.48832
10	2.59374
100	2.70481
1000	2.71692
10,000	2.71815
100,000	2.71827
1,000,000	2.71828

Su valor aproximado es:

e ≈ 2,71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 69995...

Función Exponencial

Función Exponencial

Función de la forma:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^{x} \quad \text{con} \quad a > 0\,, a \neq 1$$

$$\boldsymbol{a} \rightarrow Base$$

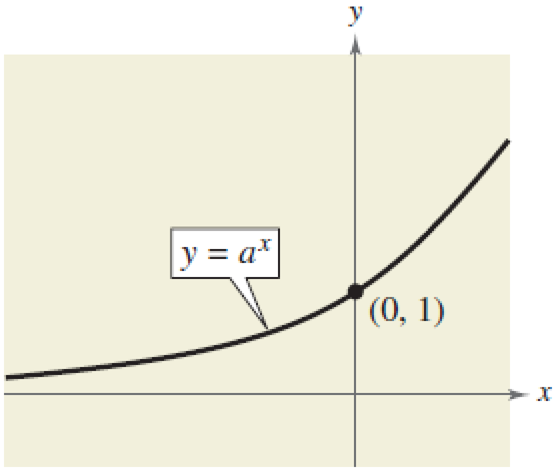
$$\boldsymbol{x} \rightarrow Argumento\ o\ exponente$$

Bases especiales

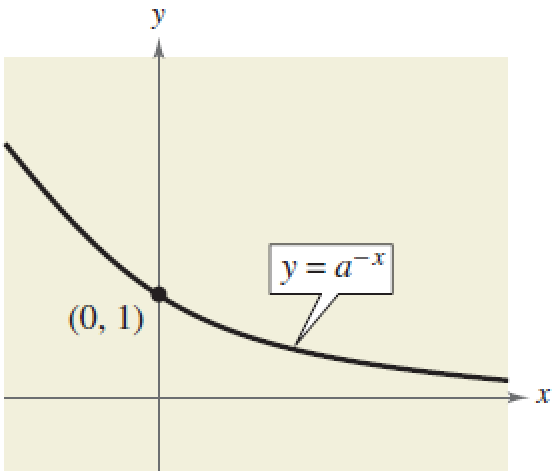
$$\boldsymbol{Base\ 10}$$

$$\boldsymbol{Base\ e}$$

Función Exponencial



- *Gráfica de* $y = a^x$, $a > 1$
- Dominio: $(-\infty, \infty)$
- Rango: $(0, \infty)$
- Intersección con el eje y: $(0, 1)$
- Creciente
- El eje x es una asíntota horizontal ($a^x \to 0$ cuando $x \to -\infty$).
- Continua

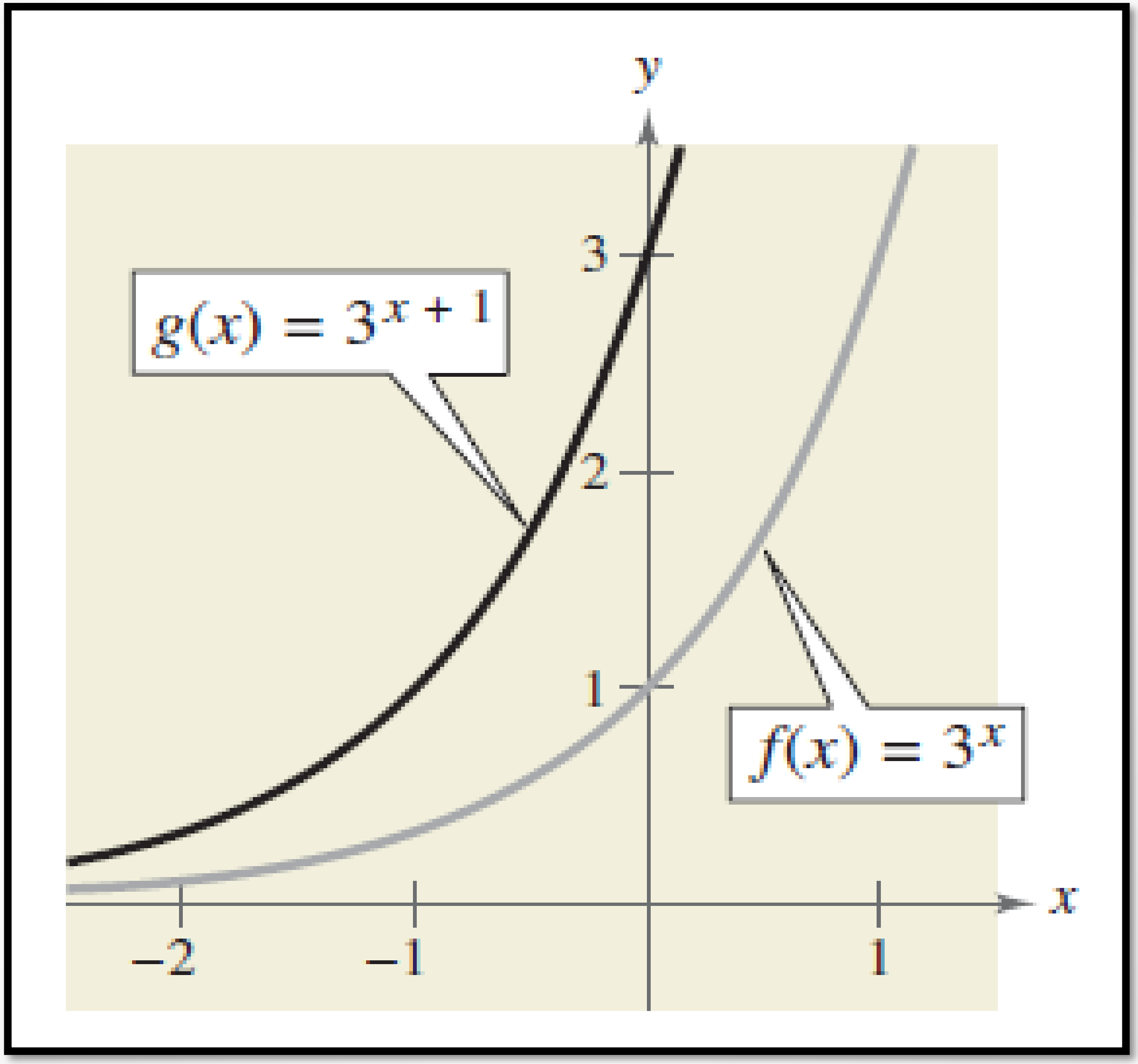


Gráfica de $y = a^{-x}$, $a > 1$

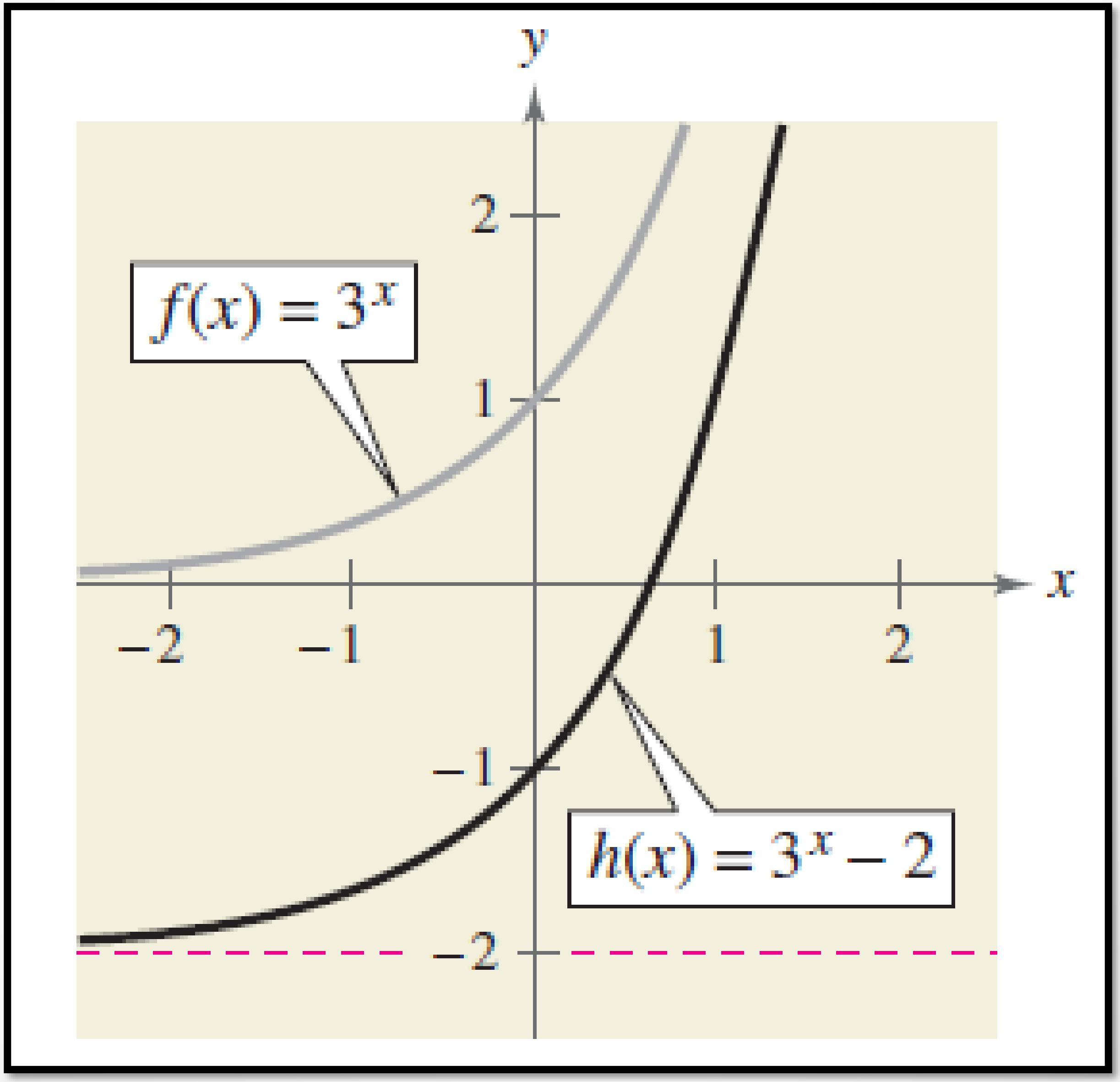
- Dominio: $(-\infty, \infty)$
- Rango: $(0, \infty)$
- Intersección con el eje y: $(0, 1)$
- Decreciente
- El eje x es una asíntota horizontal ($a^{-x} \to 0$ cuando $x \to \infty$).
- Continua

Transformación de gráficas Exponenciales

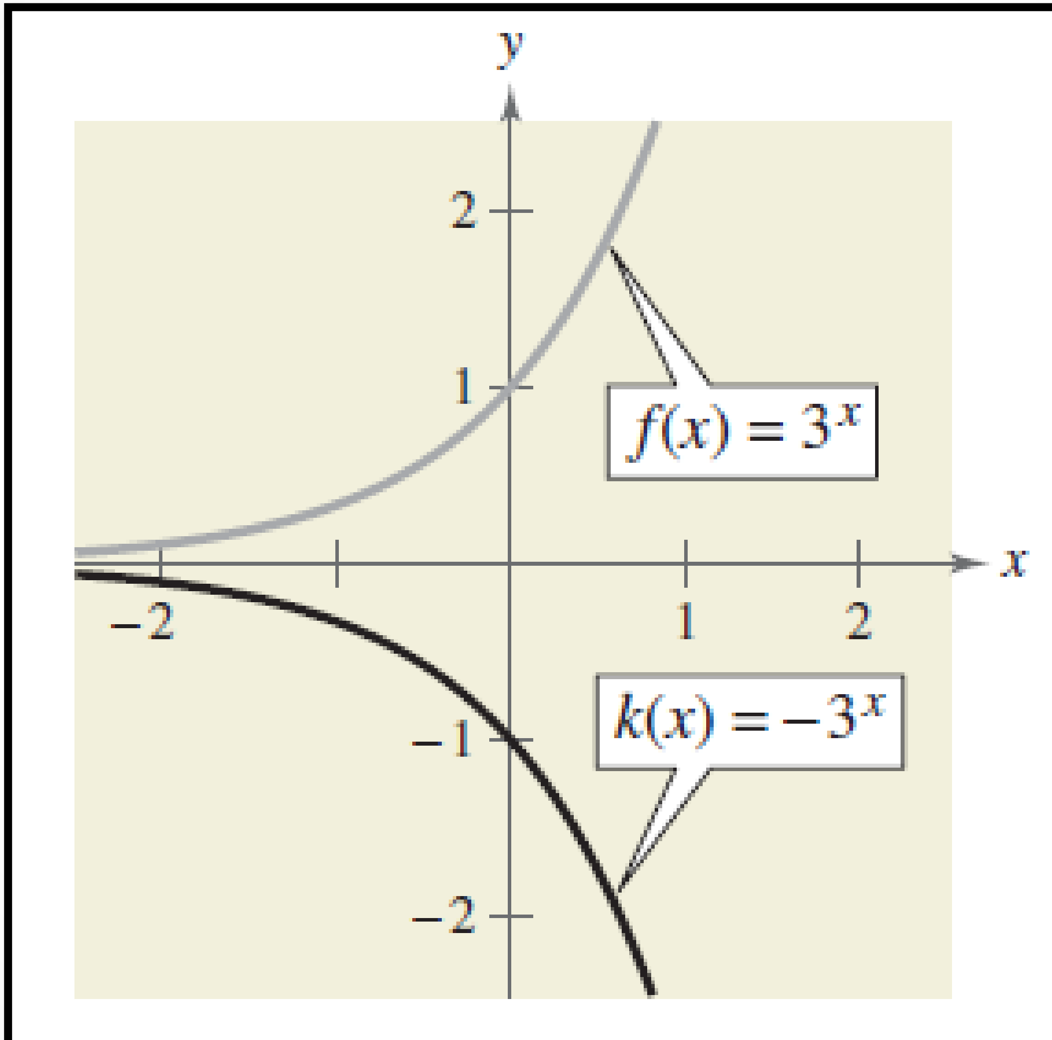
Desplazamiento Horizontal



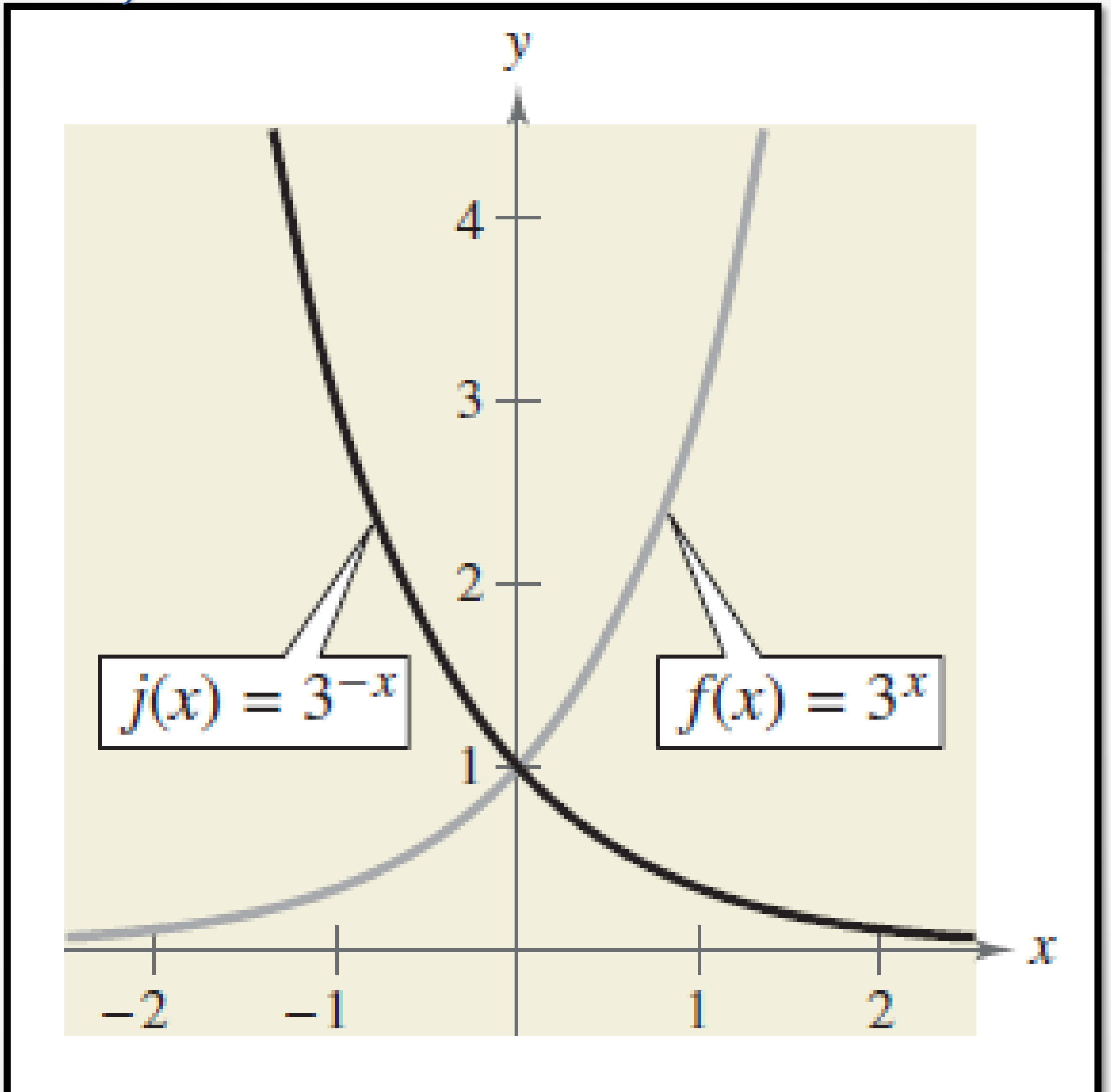
Desplazamiento Vertical



Reflexión eje X



Reflexión eje Y



Leyes de los exponentes

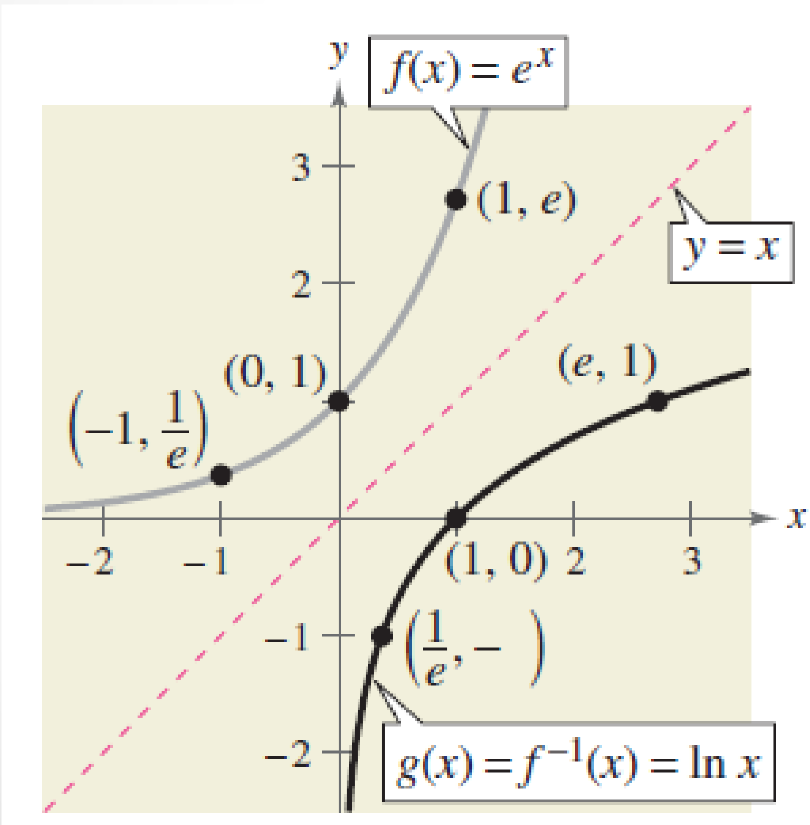
$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

Funciones Logarítmicas y Exponenciales de base *e*



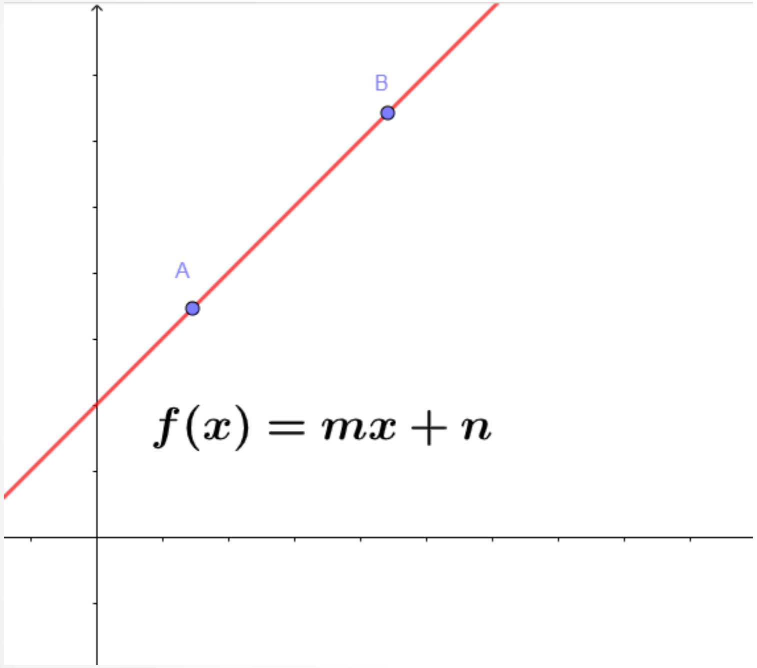
$$e^{\ln(x)} = x \qquad (x > 0)$$

$$ln(e^x) = x \quad (\forall x)$$

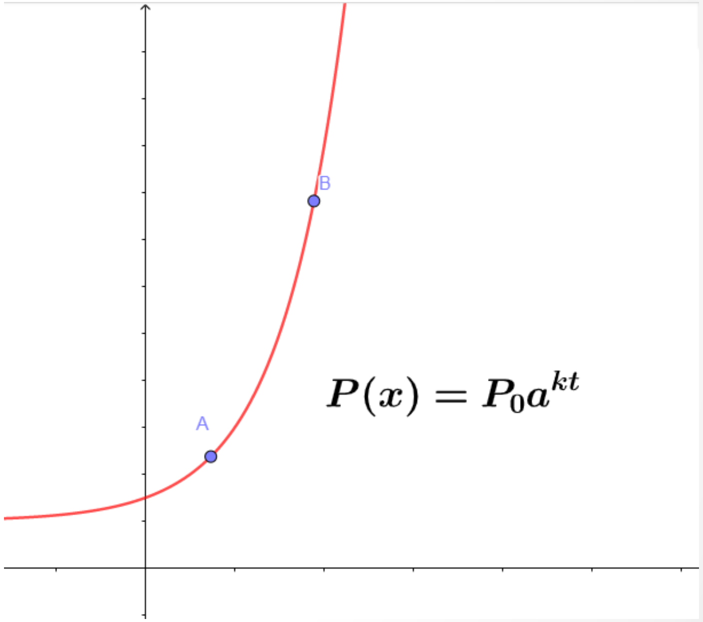
Descanso

Modelos de Crecimiento y Decaimiento Exponencial. Modelo Logístico

Modelo Lineal



Modelo Exponencial



Modelo de Crecimiento

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

$$N_0 = Cantidad\ inicial$$

$$N(t) = Cantidad\ en\ cualquier\ instante\ t$$

$$k = Constante\ de\ crecimiento$$

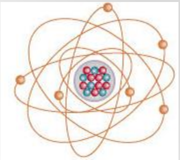
Modelo de Decrecimiento

$$Q(t) = Q_0 e^{-kt}$$

$$Q_0 = Cantidad\ inicial$$

$$Q(t) = Cantidad\ en\ cualquier\ instante\ t$$

$$k = Constante\ de\ decrecimiento$$



Ejemplo: Decaimiento Radioactivo

Suponga que un material radioactivo es pesado en los tiempos $t_1 = 2$ horas y $t_2 = 5$ horas y sus respectivos pesos son 25 y 10 gramos. Considere un modelo exponencial.

Determinar:

a) El valor de la constante k.

b) Vida media del material radioactivo.

c) ¿Cuánto material habrá en el instante $t = 0$?.

Ejemplo:
Decaimiento Radioactivo

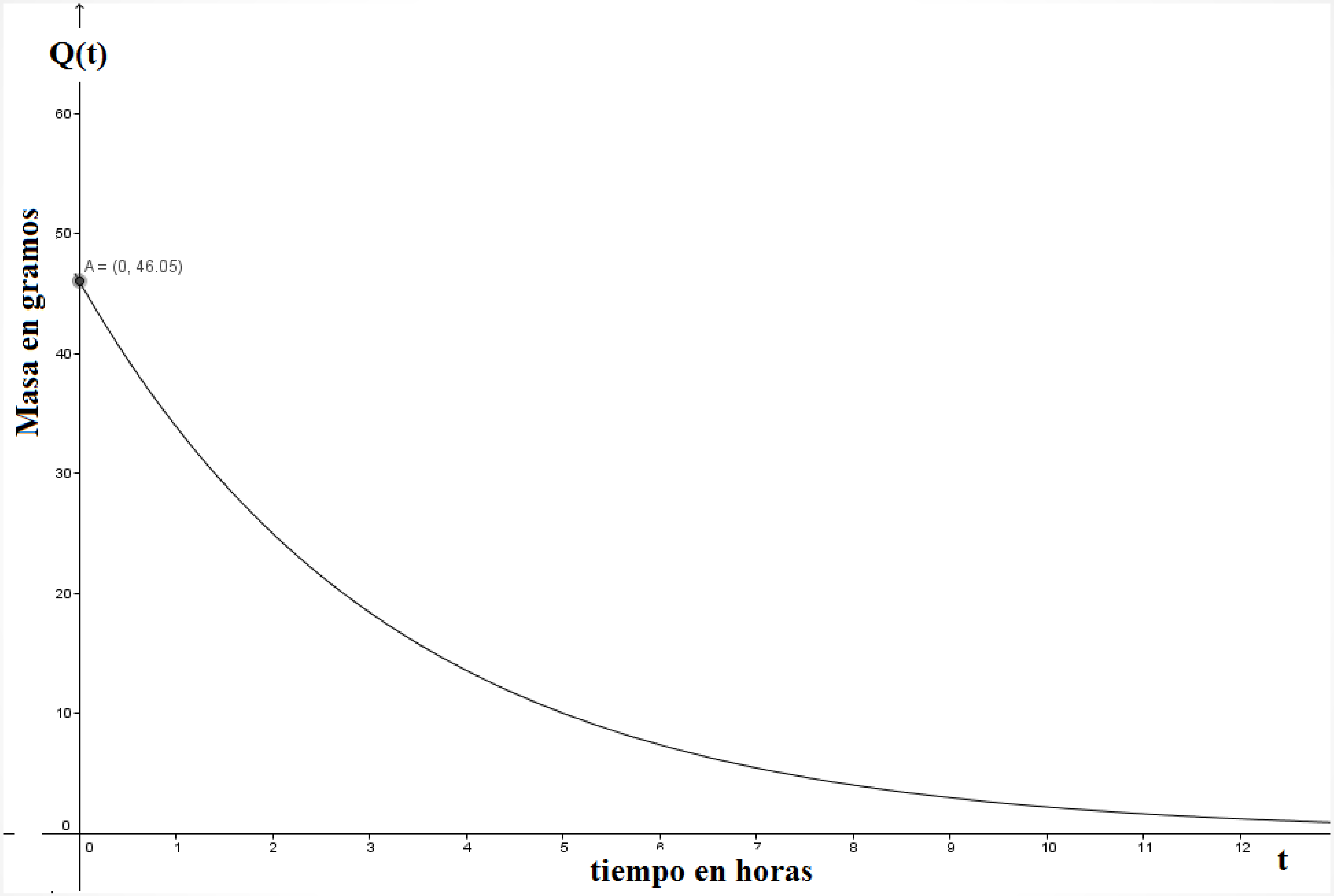
a) El valor de la constante k.

Ejemplo:
Decaimiento Radioactivo

b) Vida media del material radioactivo.

Ejemplo:
Decaimiento Radioactivo

c) ¿Cuánto material habrá en el instante $t = 0$?.



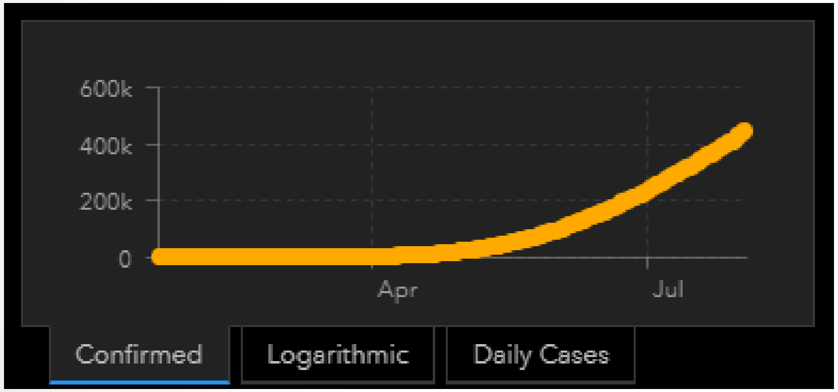
Q(t)
Masa en gramos
A = (0, 46.05)
60
50
40
30
20
10
0
0
1
2
3
4
5
8
9
10
11
12
t
tiempo en horas

Modelos de Covid-19

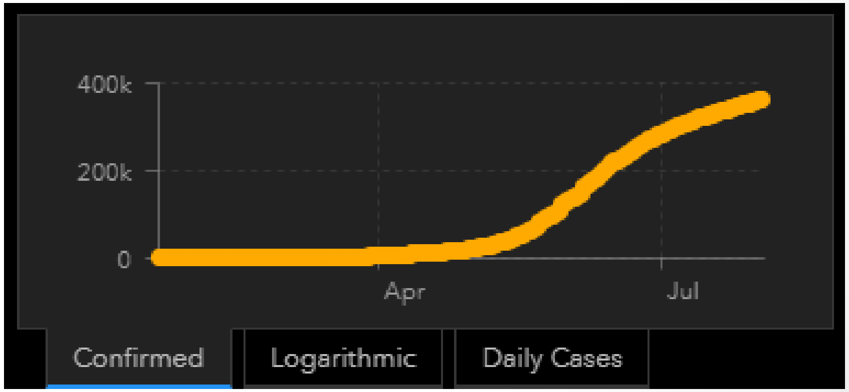
Centro Recursos Coronavirus Universidad de Johns Hopkins

https://coronavirus.jhu.edu/map.html

México



Chile



MODELO LOGÍSTICO

La función que expresa este crecimiento es:

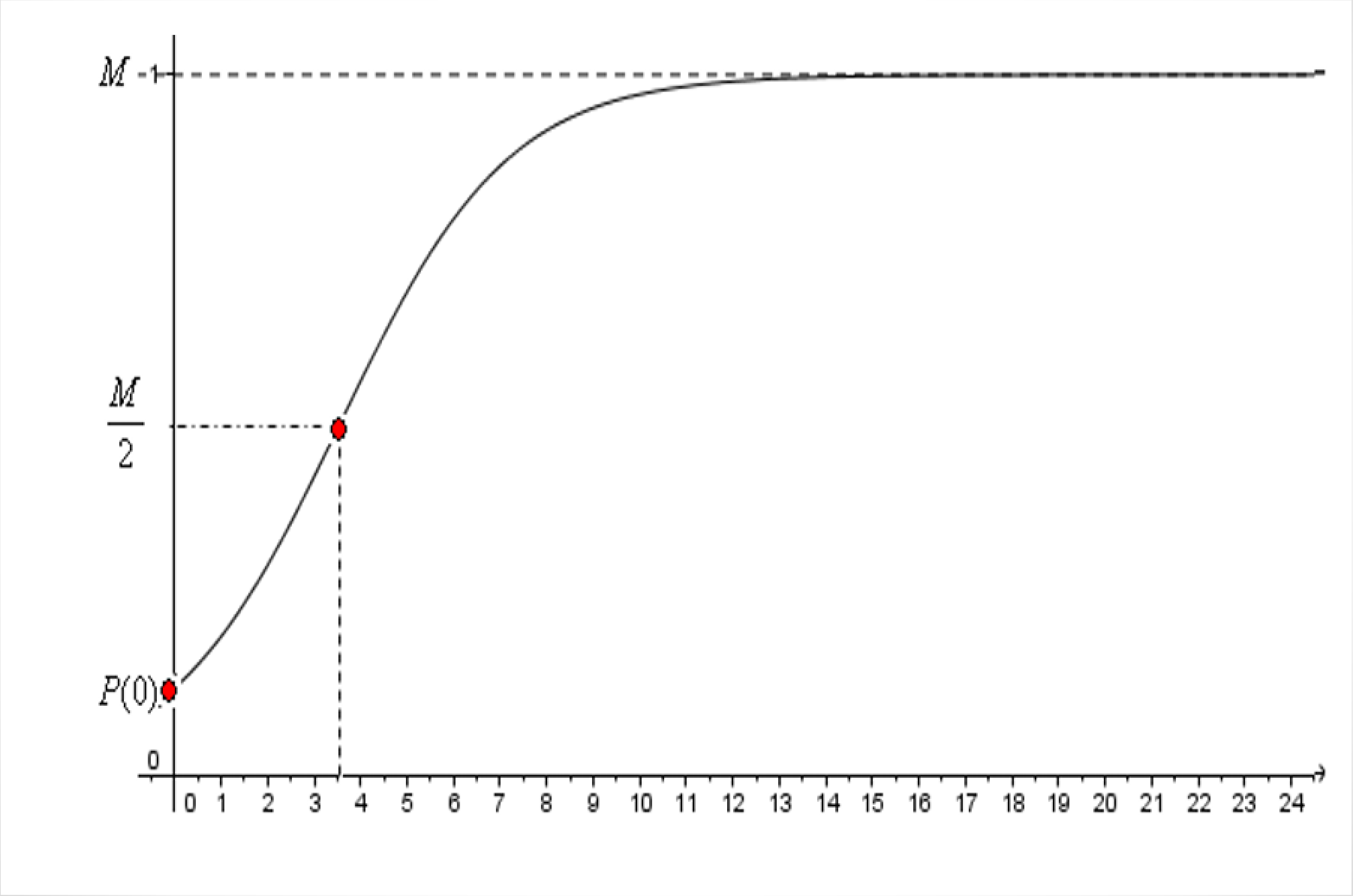
$$P(t) = \frac{M}{1 + Ce^{-kt}}$$

M: Es la capacidad límite de la población en estudio. (asíntota horizontal).

C: Es una constante del modelo (c>0).

K: Es la constante de crecimiento o propagación de una enfermedad (k>0).

GRAFICAMENTE



Modelo Exponencial para la propagación de un virus

Una enfermedad infecciosa empieza a propagarse en una ciudad pequeña de 10.000 habitantes. Después de t días, el número de personas que han sucumbido al virus está modelado por la función :

$$v(t) = \frac{10.000}{5 + 1.245 \cdot e^{-0,97 \cdot t}}$$

a) ¿Cuántas personas infectadas hay inicialmente?
b) ¿Cuántas personas hay infectadas al cabo de cinco días?
c) ¿En que instante el número de personas infectadas es de 1.995?

Solución

a) ¿Cuántas personas infectadas hay inicialmente?

$$t = 0 \rightarrow v(0) = \frac{10.000}{5 + 1.245 \cdot e^{-0,97 \cdot 0}} = 8$$

Hay 8 personas infectadas inicialmente.

b) ¿Cuántas personas hay infectadas al cabo de cinco días?

$$t = 5 \rightarrow v(5) = \frac{10.000}{5 + 1.245 \cdot e^{-0,97 \cdot 5}} = 678{,}13$$

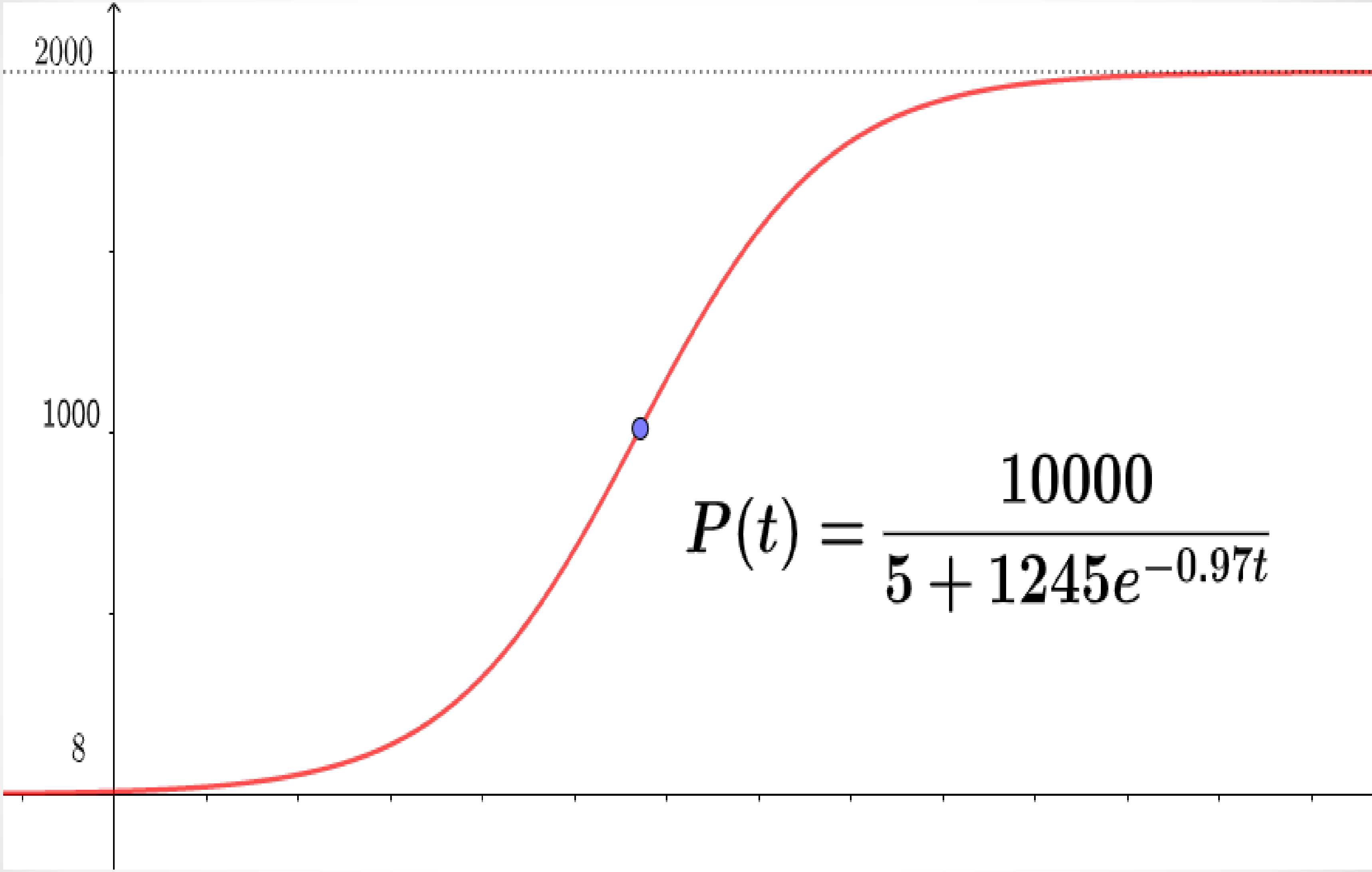
Hay 678 personas aproximadamente al cabo de 5 días.

Solución

c) ¿En qué instante el número de personas infectadas es de 1.995?

Se pide “t” tal que $v(t) = 1.995$

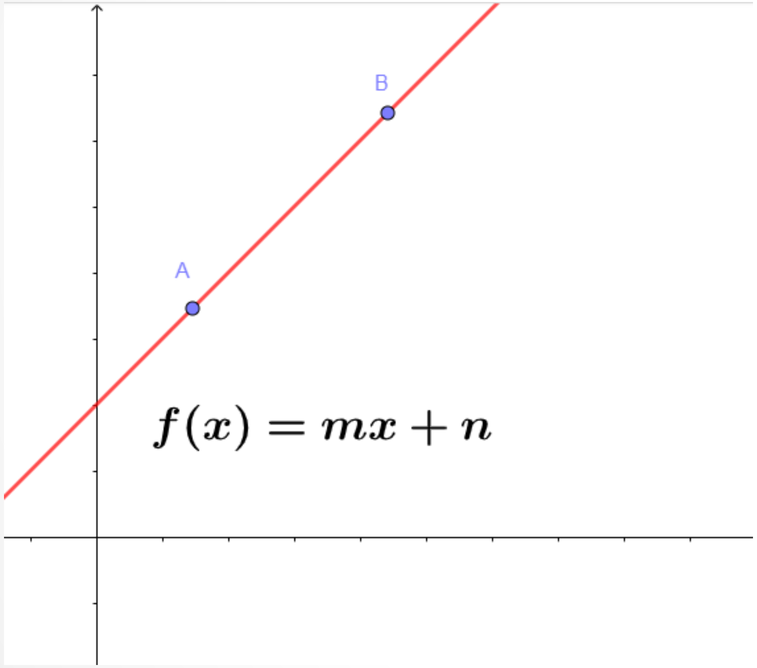
$$\frac{10.000}{5+1.245 \cdot e^{-0,97 \cdot t}} = 1.995 \Rightarrow t = 11,9\ días$$


2000
1000
8
$P(t) = \dfrac{10000}{5 + 1245e^{-0.97t}}$

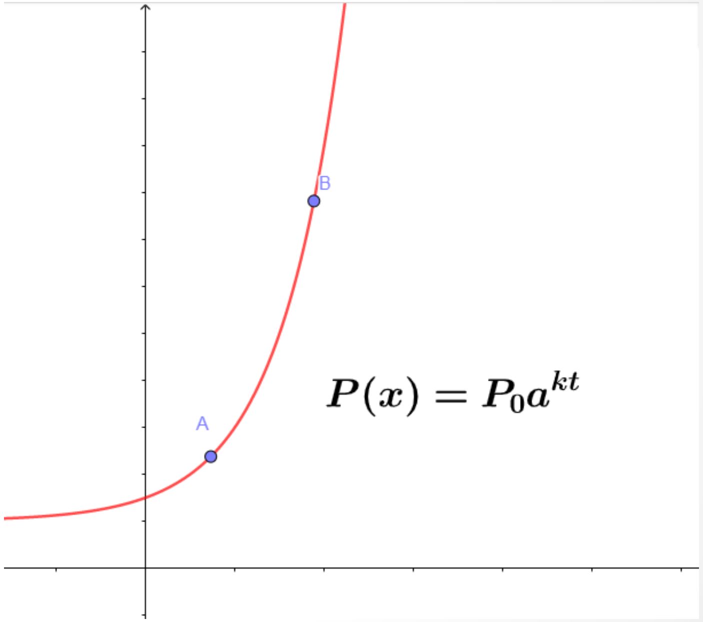
Descanso

Ajuste de Datos

Modelo Lineal

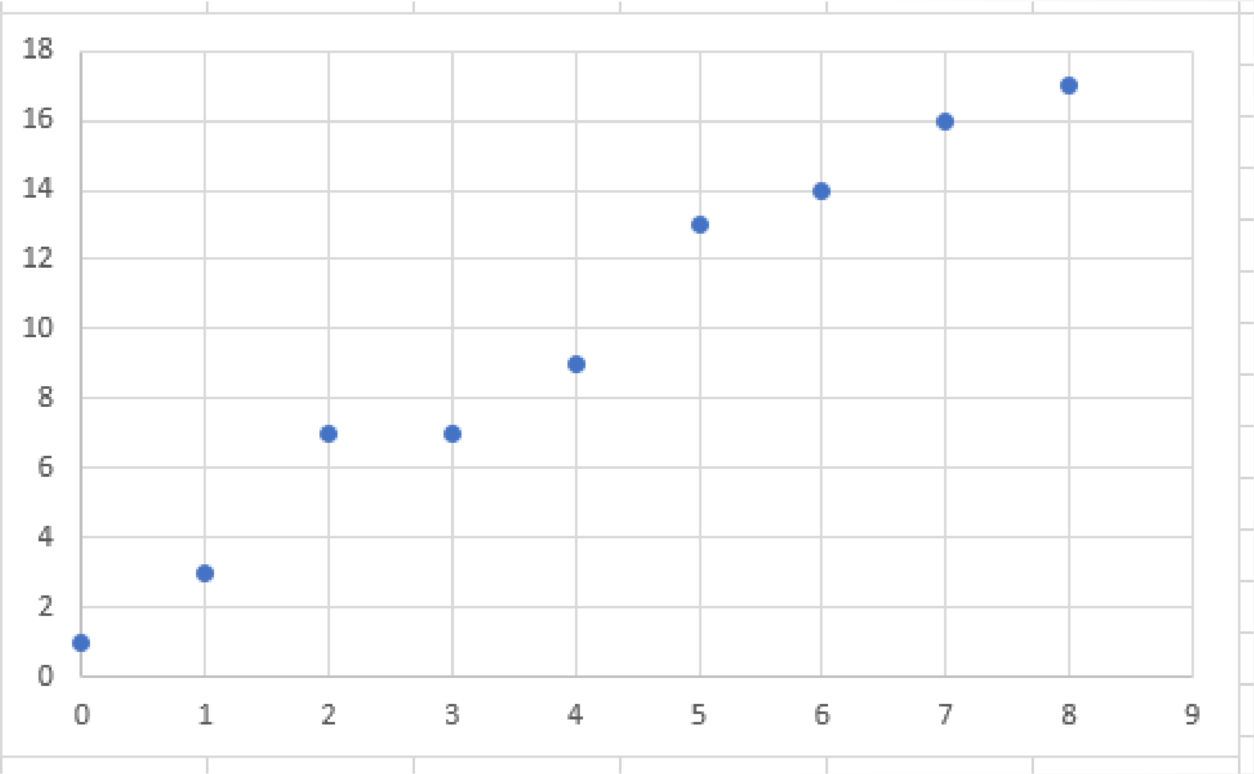


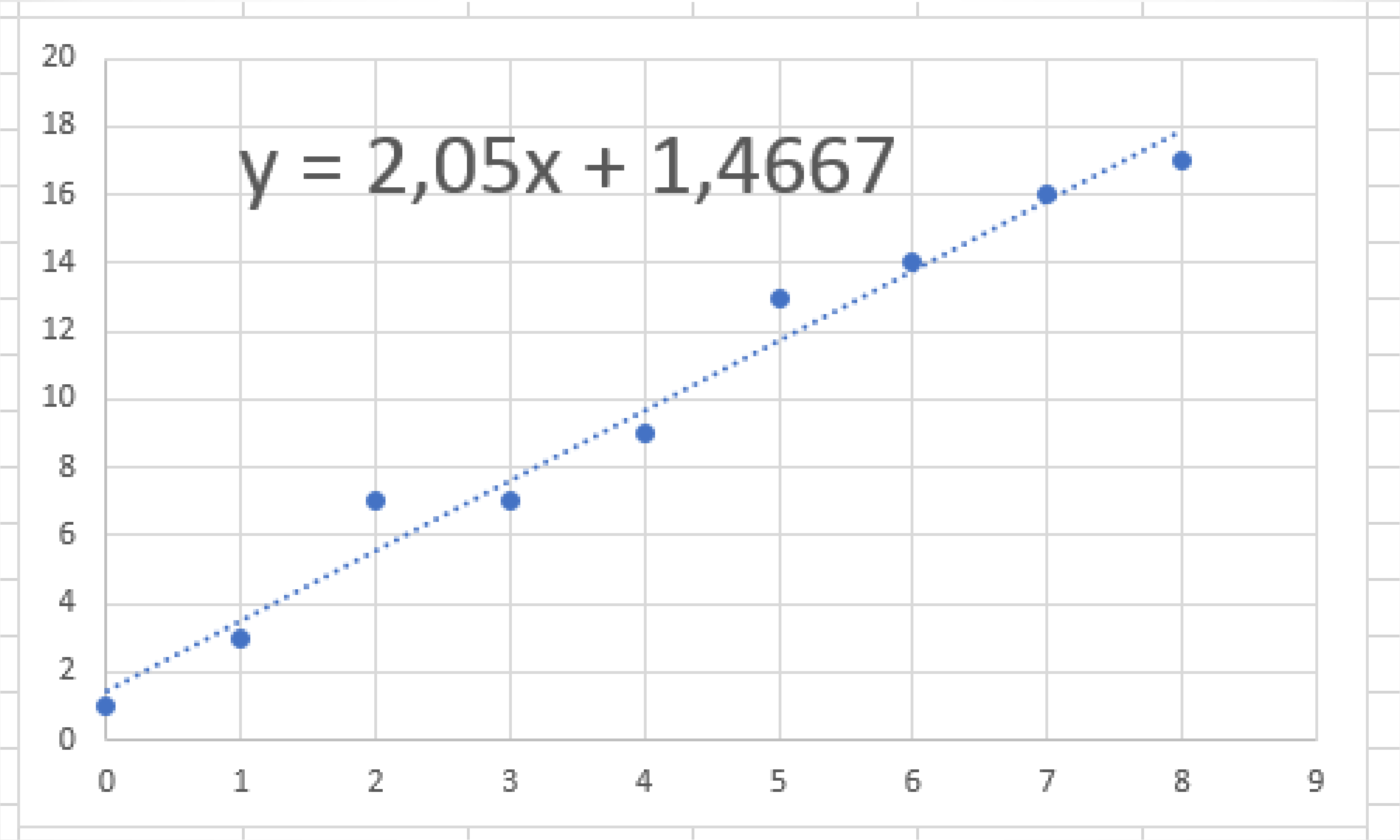
Modelo Exponencial



Ajuste de datos modelo lineal

x	y
0	1
1	3
2	7
3	7
4	9
5	13
6	14
7	16
8	17

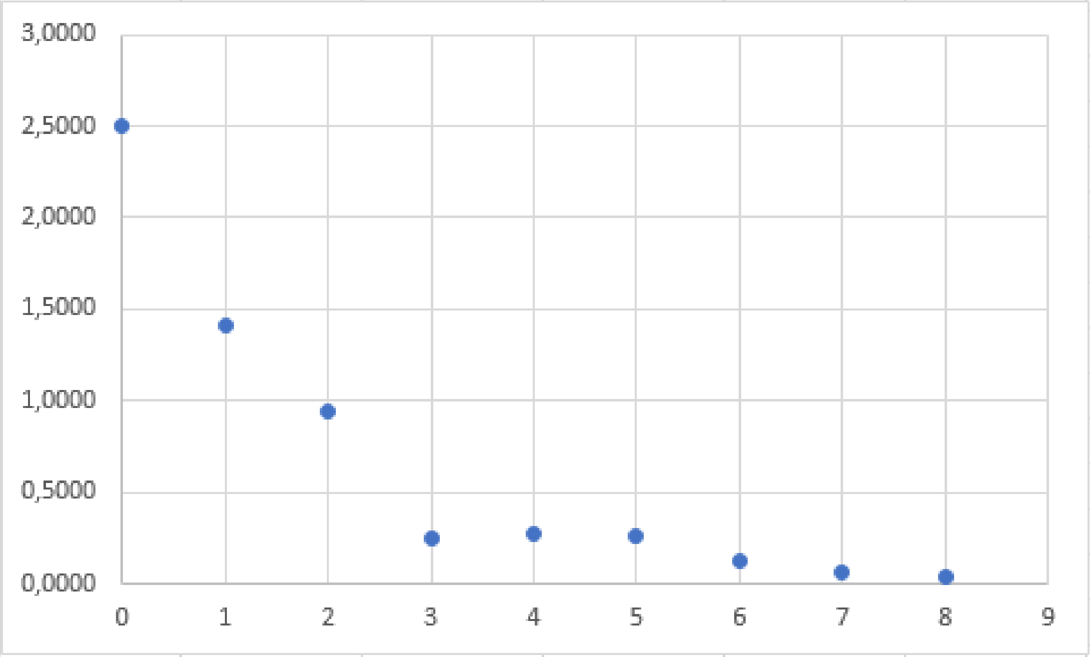


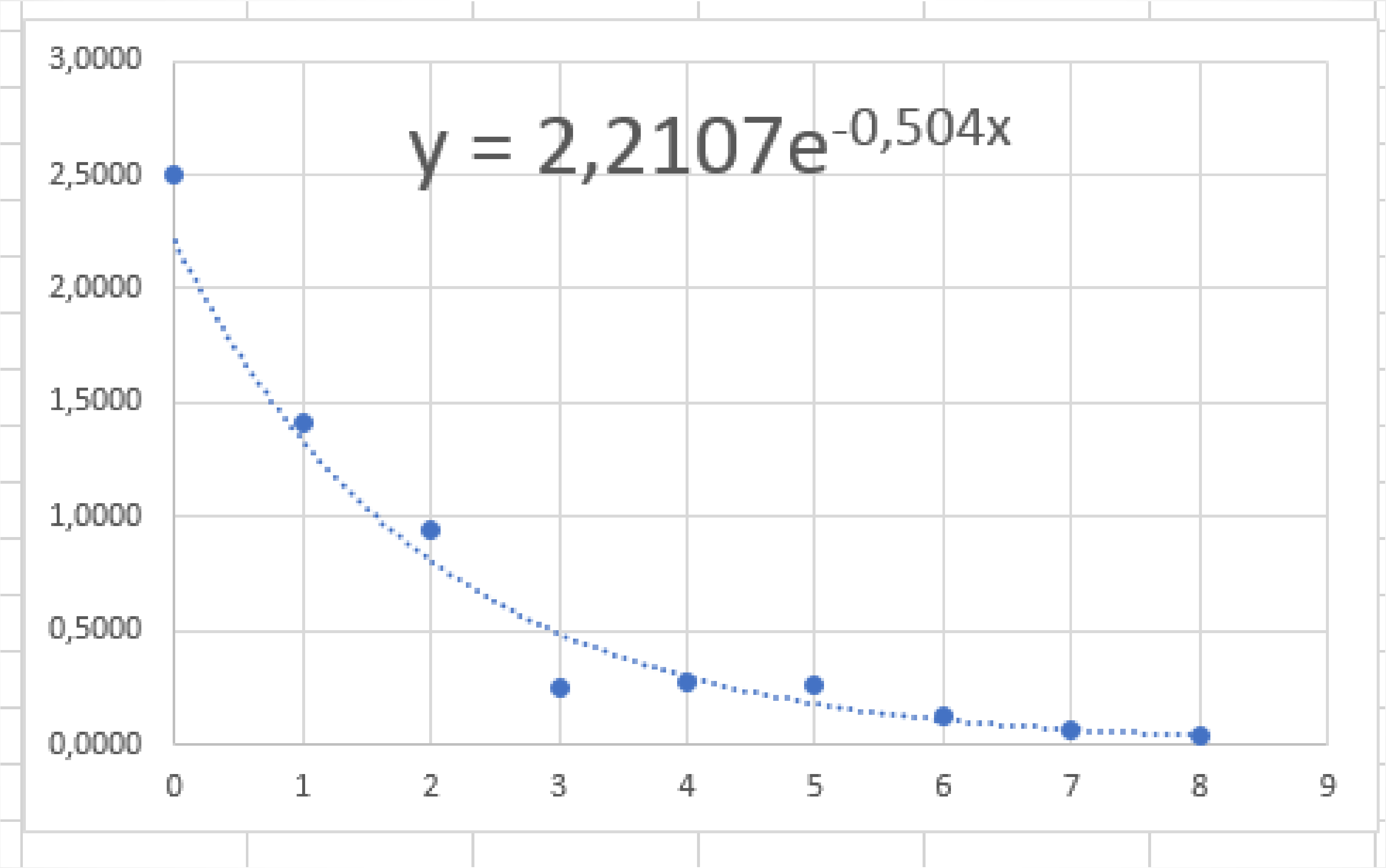


y = 2,05x + 1,4667
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Ajuste de datos modelo exponencial

x	y
0	2,5000
1	1,4131
2	0,9358
3	0,2463
4	0,2707
5	0,2642
6	0,1296
7	0,0604
8	0,0366





y = 2,2107e-0,504x
3,0000
2,5000
2,0000
1,5000
1,0000
0,5000
0,0000
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Fin