CB10006-3 Matemática
Profesora de Teoría: Caroll Cuellar
Profesores de Seminario: Driyette Aliaga,
Roberto Morales, Juan Pedro Ross
Fecha: 29 de Marzo de 2019

Seminario 3: Límite de funciones

3. Estudiar el $\lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0}$ siendo $a_m b_n \neq 0$ y m, n números enteros positivos.

a) $m > n$
b) $m = n$
c) $m < n$

Sol: Para poder resolver esta pregunta pensemos en x^4 vs x^2, y veamos como se comportan para x que sean muy grandes (esto pues estamos analizando cuando $x \to \infty$), la tabla 1 muestra que la potencia 4 empieza a generar números mucho más grandes que la potencia 2. Esto intuitivamente dice que si yo sumo x^4+x^2, el resultado se comportará solo como x^4 (decir 10010000 es prácticamente lo mismo que 10000000), este mismo razonamiento se puede generalizar para $a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_0$ y se puede decir que en el infinito esto se comportará como $a_m x^m$. Con esto concluimos que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m}{b_n} x^{m-n}$$

Luego para terminar notemos que $\lim_{x\to\infty} x^a = \begin{cases} \infty & \text{si } a > 0 \\ 1 & \text{si} a = 0 \\ 0 & \text{si} a < 0 \end{cases}$ (Revise los gráficos de $x^2 y x^{-2}$ para corroborar lo anterior). Con todo esto podemos responder la pregunta.

a) Si $m > n$ entonces $m - n > 0$ y por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} = s(a_m, b_n)\infty$$

, donde $s(a_m, b_n)$ es el signo de la fracción.

b) Si $m = n$ entonces $m - n > 0$ y por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} = \frac{a_m}{b_n} x^{m-n}$$

c) Si $m < n$ entonces $m - n < 0$ y por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} = 0$$

	x^2	x^4	$x^4 + x^2$
10	100	10000	110
100	10000	100000000	10100
1000	1000000	1000000000000	1001000
10000	100000000	10000000000000000	100010000

Cuadro 1: Evaluaciones de dos funciones potencia

4. Utilice lo anterior para determinar

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{x+3}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-4}{2x+1}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4-2x^2}{2x^5+1}$.

Sol: Aplicamos las reglas de la pregunta anterior, miramos los exponentes del numerados y denominador y concluimos

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{x+3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-4}{2x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{2x} = \infty$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4-2x^2}{2x^5+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^2}{2x^5} = 0$.

5. Utilice límites elementales para calcular el valor de los siguientes límites:

a) Hecho en clases.

b) Hecho en clases.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-3}{2x-5}\right)^{3x+4}$

Sol: La idea es formarse un límite elemental (Revisar PPW de la clase) nos damos cuenta que estos se parecen al

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a = \lim_{u\to 0} (1+au)^{\frac{1}{u}}$$

a) Hecho en clases.

b) Hecho en clases.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{-1}$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-3}{2x-5}\right)^{3x+4} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-5+2}{2x-5}\right)^{3x+4} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-5}{2x-5}+\dfrac{2}{2x-5}\right)^{3x+4} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{2x-5}\right)^{3x+4}$.

Trabajar límites muchas veces requiere intuición y práctica, por ejemplo para este caso sale conveniente hacer un cambio de variable, trabajar con $u = \frac{1}{2x-5}$, ¿Cómo se me iba a ocurrir eso? haciendo y haciendo ejercicios. Se tiene que cuando $x \to \infty$ ocurre que $u \to 0$, además si despejamos x entonces $x = \frac{1+5u}{2u} = \frac{1}{2u} + \frac{5}{2}$. reemplazando en lo anterior

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{2x-5}\right)^{3x+4} = \lim_{u\to 0} (1+2u)^{3(\frac{1}{2u}+\frac{5}{2})+4} = \lim_{u\to 0} (1+2u)^{\frac{3}{2u}+19} =$$

$$\lim_{u\to 0} (1+2u)^{\frac{3}{2u}} (1+2u)^{\frac{23}{2}} = \lim_{u\to 0} \left[(1+2u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\frac{3}{2}} (1+2u)^{\frac{23}{2}} = \left[\lim_{u\to 0} (1+2u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\frac{3}{2}} \lim_{u\to 0} (1+2u)^{\frac{23}{2}} =$$

$$[e^2]^{\frac{3}{2}} \cdot 1 = e^3$$