APUNTE DE CÁLCULO

Magister en Informática Médica,

Universidad de Chile

Preparado por Jocelyn Dunstan Escudero
Versión 1.0

Santiago de Chile
Otoño 2018

Índice general

Clase 1

Preliminares

1.1. Números reales

Los números reales ($\mathbb{R}$) son aquellos que pueden ser representados en la recta real. Sobre este cuerpo pueden definirse propiedades:

- Algebraicas: suma (y resta) y multiplicación (división, excepto por cero).
- Orden: puede establecerse desigualdades entre números.
- Completitud: entre dos números reales siempre es posible encontrar otro (por ejemplo el promedio de ambos).

Todas las propiedades en los números reales pueden demostrarse a partir de **axiomas**, que son proposiciones que no requieren demostración. Uno de los axiomas, por ejemplo, indican la conmutatividad de las operaciones de suma/multiplicación o la existencia de un elemento neutro para las operaciones. El conjunto de todos los axiomas hace que podamos decir que $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado completo.

Dentro de los números reales encontramos los enteros, los racionales y los irracionales. Los números racionales son aquellos que pueden escribirse como una fracción p/q con $q \neq 0$. Aquí podemos distinguir entre fracciones que dan lugar a decimales finitos y aquellas que resultan en decimales periódicos. En los irracionales esto no es posible y los decimales hasta cierto punto dejan de ser conocidos (π o $\sqrt{2}$ por ejemplo).

Además, vimos que los intervalos en la recta real pueden ser abiertos o cerrados, y se indican con (a, b) o $[a, b]$, respectivamente. Y resolvimos ecuaciones con desigualdades.

Valor absoluto

Se define como el número sin signo. Es decir, $|x| = x$ si x es positivo, o $|x| = -x$ si x es negativo. Y resolvimos ecuaciones con valor absoluto en ellas.

Distancia entre puntos

En una dimensión, la distancia entre dos números p y q se determina a partir del valor absoluto de la resta de sus coordenadas, es decir, $|p-q|$. En un plano, la distancia usando la métrica Euclideana se define a partir del teorema de Pitágoras:

$$d(p,q) = \sqrt{(p_1-q_1)^2 + (p_2-q_2)^2}. \tag{1.1}$$

Esta métrica Euclideana puede extenderse a $\mathbb{R}^n$,

$$d(p,q) = \sqrt{(p_1-q_1)^2 + ... + (p_n-q_n)^2}. \tag{1.2}$$

Note que aún en el plano en dos dimensiones es posible definir otras métricas. Un ejemplo de ello es la métrica del taxista (o Manhattan) que calcula la distancia entre dos puntos considerando que se avanza por calles. Esta métrica tiene una definición formal, y la métrica de Minkowski es una generalización de la distancia Euclideana y de Manhattan.

Además, cuando el espacio es curvo el teorema de pitágoras deja de ser cierto, es decir, $x^2 + y^2 \neq c^2$, en cuyo caso se trabaja con la geometría de Riemann. Un ejemplo de esto es que sobre una esfera la distancia más corta entre dos puntos no es la linea recta, sino la *geodésica*.

1.2. Funciones reales

En $y = f(x)$ se dice que y es la variable dependiente y x la independiente. Para que sea una función, $f(x)$ debe asignar un único valor a x.

Todos los posibles valores que puede recibir la función se conoce como **dominio**, mientras que el **recorrido** es el conjunto de valores $f(x)$. Una función se dice biyectiva si para cada número en el dominio existe un valor único en el recorrido.

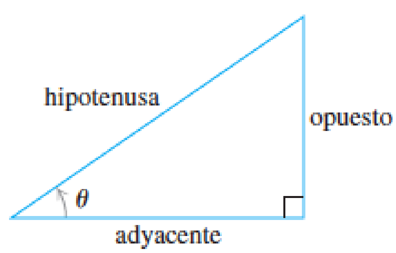
Además, vimos que una función puede representarse gráficamente en el plano $x - y$.

Las funciones pueden clasificarse en pares e impares. Además mencionamos que las funciones pueden sumarse y componerse, por ejemplo, f(g(x)).

1.3. Funciones trigonómetricas

Medir ángulo en grados es arbitrario, y en general preferiremos medirlos en radianes, que se define como el arco que subtiende un ángulo θ en un círculo de radio 1 (lo sé, suena más dificil que decir 360°!). Dado que el perímetro de un círculo es 2π, 360° = 2π, es decir, π radianes = 180°.

Las funciones trigonométricas pueden ser definidas en el triángulo rectángulo como lo muestra la Fig. 1.3



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$
$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$
$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

Figura 1.1: Funciones trigonómetricas. Figura tomada del libro Cálculo de Thomas y Finney [1].

La Tabla 1 muestra los valores de las funciones trigonométricas para ángulos *fáciles* [1] .

Las funciones seno y coseno son 2π-periódicas, es decir, comienzan a repetirse, lo cual tiene sentido a partir de su definición en el círculo.

Grados	-180	-135	-90	-45	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
θ (radianes)	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen θ	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos θ	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tan θ	0	1		-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0		0

1.3.1. Identidades trigonométricas

A partir de $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, que no es más que el teorema de pitágoras en un círculo de radio 1, es posible deducir identidades tales como $1 + \tan^2\theta = sec^2\theta$.

Además, se tienen las siguientes formulas para la suma de ángulos:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) \tag{1.3}$$
$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\operatorname{sen}(b) \tag{1.4}$$

De las cuales se desprenden las fórmulas para el ángulo doble:

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta) \tag{1.5}$$
$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) \tag{1.6}$$

1.3.2. Funciones trigonométricas inversas

Puesto que las funciones trigonométricas son $2\pi-$periódicas, es necesario restringir el dominio para garantizar biyectividad [2].

Arcoseno

Función inversa de $\operatorname{sen}(x)$ definida tal que $y = arcsen(x)$ ssi $x = sen(y)$. El dominio y el recorrido de esta función son arcsen: $[-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$.

Arcocoseno

De manera análoga, la inversa de $\cos(x)$ se define $y = arccos(x)$ con $x = cos(y)$. El dominio y el recorrido de esta función son arc cos: $[-1,1] \to [0,\pi]$.

Arcotangente

Finalmente, la arcotangente se define como $y = arctan(x)$ con $x = tan(y)$, con arc tan: $\mathbb{R} \to [-\partial/2, \partial/2i]$.

Desafío

Muestre que la ecuación $\operatorname{sen}(2x) + \cos(x) = 0$ tiene soluciones $x = 2k\pi \pm \pi/2$ y $x = k\pi + (-1)^k(-\pi/6)$, con k un número entero (página 125 en el apunte de cálculo de la FCFM [2]),

Clase 2

Sucesiones

2.1. Axiomas de los reales

Los axioma son proposiciones que no requieres ser demostradas, y sobre las cuales se basan propiedades.

En este caso, enunciaremos los axiomas de los reales desde los cuales se demuestran todas las propiedades de los números reales. A pesar de que fueron mencionados brevemente en la clase pasada, es necesario volver a ellos para poder introducir el **axioma del supremo**, el cual es esencial para poder distinguir entre números racionales e irracionales.

Axiomas de cuerpo

1. Conmutatividad de la suma y la multiplicación.
2. Asociatividad de la suma y la multiplicación.
3. Distributividad de la multiplicación sobre la suma.
4. Existencia de un elemento neutro para la suma, y de un elemento neutro para el producto.
5. Existencia de elementos inversos (opuesto en el caso de la suma, recíproco en la multiplicación).

Axiomas de orden

6. Tricotomía (o un número es estrictamente positivo, o su inverso lo es, o es cero)
7. Clausura (si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x + y \in \mathbb{R}$ y $x \cdot y \in \mathbb{R}$).

Axiomas del supremo

8. Todo conjunto no vaciío y acotado superiormente posee un supremo.

2.2. Sucesiones

Una sucesión real es una función desde los naturales a los reales, i.e, f: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Y se aceptará que un número finito de términos no existan o no pertenezcan a los naturales. Piense por ejemplo, $s_n = \sqrt{n^2 - 9}$.

2.2.1. Convergencia de series

Diremos que una serie converge a l si dado cualquier intervalo $[l-\epsilon, l+\epsilon]$, sólo una cantidad finita de términos queda fuera de este intervalo. l se conoce como el límite de la sucesión. Además, cuando el límite existe es único.

La definición formal de covergencia estable que una sucesión converge a l si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0)\ s_n \in [l-\epsilon, l+\epsilon].$$

<u>Desafío</u>

Demuestre que la sucesión definida por $s_n = \frac{1}{n}$ tiende a cero.

2.2.2. Teorema del Sandwich

Sean u_n, v_n, w_n sucesiones reales. Si u_n y w_n convergen al real l y ademas

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0)\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n,$$

entonces v_n también converge a l.

Clase 3

Límites

3.1. Definición

Diremos que una función f tiende a $l \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a $\bar{x}$ si para toda sucesión x_n que converge a $\bar{x}$, entonces se cumple que las imágenes $f(x_n)$ convergen a l.

Esta definición permite conectar el límite de sucesiones con el de funciones. Es más, la unicidad del límite de funciones se desprende de la unicidad en las sucesiones: Si una función f tiene un límite cuando $x \to \bar{x}$, entonces dicho límite es único.

3.2. Álgebra de límites

Sean dos funciones f y g tales que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$, entonces:

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = L \pm M$
2. $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$
3. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, con $M \neq 0$
4. $\lim_{x\to x_0} kf(x) = kL$
5. $\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{m/n} = L^{m/n}$ cuando $L^{m/n}$ es real.

Demuestre:

1. $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5} = 0$
2. $\lim_{x\to -2} \sqrt{4x^2-3} = \sqrt{13}$
3. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$
4. $\lim_{x\to -1} \sqrt{x}$ no existe en los reales

3.2.1. Ejemplo de aplicación del teorema del sandwich

Si se sabe que: $1 - \frac{x^2}{4} \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2}$ para $x \neq 0$, $\lim_{x\to 0} u(x) = 1$ puesto que ambas funciones que la delimitan tienden a 1.

Una aplicación interesante del teorema del sandwich es demostrar:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{3.1}$$

Desafío

Usando el límite 3.1 demuestre:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}. \tag{3.2}$$

Hint : Use la fórmula del ángulo doble e identidad trigonométricas vistas la primera clase.

3.3. Derivadas por definición

Se dice que una función es derivable en x_0 ssi el siguiente límite existe:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{3.3}$$

En tal caso el límite se denotará la derivada de f y se denotará como f'.

Ejercicios

Usando la definición de derivada dada en 3.3 calcule la derivada de las siguientes funciones:

1. k (función constante)
2. x^2
3. $\sin x$
4. $\cos x$

3.3.1. Derivada de potencias

1. Si n es un número entero positivo,

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1} \tag{3.4}$$

Esto se puede demostrar de varias maneras. Una es demostrándolo por inducción y otra es usando la fórmula del binomio de Newton.

2. También se puede demostrar que $\frac{d}{dx} \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}$.

3. Se puede demostrar que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1} \tag{3.5}$$

Para lo cual se requiere usar la definición de una potencia real en términos de la función exponencial y logaritmo natural,

$$a^x = \exp[\ln(a)] \tag{3.6}$$

Clase 4

Derivadas

4.1. Álgebra de derivadas

Usando el álgebra de límites se puede demostrar que si f y g sos funciones diferenciables en x_0, con $g(x_0) \neq 0$, y $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$
2. $\alpha f' = \alpha f'$
3. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
4. $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Desafío

Vea como demuestro la regla para el cuociente de funciones. Luego vea si puede demostrar la del producto. Para ganar confianza, haga la de la suma también.

4.2. Derivada de composición de funciones

Sea f diferenciable en x_0, y g diferenciable en $y_0 = f(x_0)$, entonces:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \tag{4.1}$$

En notación de Leibniz, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \tag{4.2}$$

Ejercicios

Usando la regla de composición de funciones, calcule las siguientes derivadas:

1. $(x^2 - 1)^2$
2. $\sin(x^3)$
3. $\frac{1}{3x-2}$

4.3. Derivación implicita

Supongamos que deseamos calcular el valor de la pendiente de la recta tangente a un círculo de radio 5 en el punto (3,-4).

Primero hay que notar que el círculo esta formado por dos funciones: entre $(0,\pi)$ $y_1 = \sqrt{25-x^2}$, mientras que en $(\pi, 2\pi)$ es $y_2 = -\sqrt{25-x^2}$. El punto donde queremos evaluar la derivada esta en cuarto cuadrante, por lo cual debemos derivar y_2:

$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}, \tag{4.3}$$

Por lo que evaluando en $x = 3$ se obtiene que la pendiente de la recta tangente es $\frac{3}{4}$.

Otra forma de obtener la derivada de y con respecto a x es aplicar la derivada en la ecuación del círculo,

$$\frac{dx^2}{dx} + \frac{dy^2}{dx} = \frac{d25}{dx}, \tag{4.4}$$

de donde se desprende que $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. En general será así como derivaremos implicitamente: aplicando derivada a ambos lados de la ecuación.

Ejercicio

Demuestre que si $2y = x^2 + \sin y$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2-\cos y}$.

4.4. Derivadas de orden superior

La segunda derivada se calcula como la derivada de la primera derivada, es decir:

$$(f')'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = f''(x). \tag{4.5}$$

En general, definiremos la n-ésima derivada como:

$$f'^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h} \tag{4.6}$$

4.5. Regla de L'Hôpital

Si $\lim_{x\to B} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ y $\lim_{x\to B} f(x) = \lim_{x\to B} g(x) = 0$, entonces:

$$\lim_{x\to B} \frac{f(x)}{g(x)} = l \tag{4.7}$$

Use esta regla para demostrar que $\lim_{x\to B} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

4.6. Máximos, mínimos, monotonía, convexidad y puntos de inflexión

1. Si $\bar{x}$ es un mínimo o máximo local de una función derivable f, entonces $f'(x_0) = 0$.

2. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y derivable tal que $f'(x) \geq 0 x \in (a,b)$, entonces se dice que la función es creciente en ese intervalo. Análogamente se define ser decreciente si $f' \leq 0$.

3. Si $f''(x_0) < 0$ entonces es cóncava hacia abajo y se trata de un máximo local.

4. Si $f''(x_0) > 0$ entonces es cóncava hacia arriba y es un mínimo.

5. Se dice que x_0 es un punto de inflexión si la concavidad cambia en ese punto, es decir, $f''(x_0) = 0$.

Note que la primera y segunda derivadas tiene la aplicación física de corresponder a la velocidad y aceleración de una partícula.

Ejercicios

Gráfique y calcule las siguientes funciones y sus derivadas:

1. $\sin(x), x \in (0, \pi/2)$.

2. $x^3 - x^2$.

3. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$.

4. $x^4 - 4x^3 + 10$ (pagina 270 del libro de Cálculo de Thomas).

Clase 5

Función exponencial y logaritmo natural

5.1. Función exponencial

Se puede demostrar que $\forall x \in \mathbb{R}$ la sucesión $s_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ es creciente y acotada superiormente, por lo tanto, converge (la demostración se encuentra en la página 183 de la Ref. [2]).

La función exponencial se define mediante la siguiente expresión:

$$\exp(x) = e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n. \tag{5.1}$$

Y posee las siguientes propiedades:

1. $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$.
2. $\exp(x) > 0$.
3. Si $x < y$ entonces $\exp(x) < \exp(y)$.
4. $\forall p \in \mathbb{N}, \exp(px) = (\exp x)^p$.
5. $\forall p \in \mathbb{N}, \exp\left(\frac{x}{p}\right) = \sqrt[q]{\exp(x)}$.
6. $\lim_{n\to\infty} \exp(-n) = 0$.
7. $\lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.

En particular, $e^1 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818...$, que es el número de Euler (irracional).

5.2. Función logaritmo natural

Se define como la inversa de la función exponencial:

$$\ln(x) = \exp^{-1}(x). \tag{5.2}$$

Su dominio es $(0,\infty)$ y el recorrido los reales. A partir de su definición es posible demostrar que:

$$\ln(xy) = \ln(x)+\ln(y), \quad \ln(x/y) = \ln(x)-\ln(y) \tag{5.3}$$

5.3. Definición de exponente irracional

Sean $a \in (0, \infty)$ y $x \in \mathbb{R}$,

$$a^x = \exp(x \ln a) \tag{5.4}$$

Y desde su definición se desprenden las siguientes propiedades:

1. $\ln(a^x) = x \ln a$.
2. $a^{x+y} = a^x a^y$.
3. $(a^x)^{-1} = a^{-x}$.
4. $(a^x)^y = a^{xy}$.

5.4. Derivadas de la función exponencial y logaritmo natural

Para calcular estas derivadas por defínción necesitamos hacer uso de los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{5.5}$$

Las derivadas de estas funciones pueden calcularse a partir de la definición de derivada, obteniendo:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}. \tag{5.6}$$

5.5. Polinomios de Taylor

Para f tal que $f^{(k)}$ existe, se define el polinomio de Taylor en torno a x_0,

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{5.7}$$

Ejercicios

Demuestre:

1. El polinomio de Taylor para $\sin(x)$ de orden 4 en torno a π es: $p(x) = -(x-\pi) + \frac{(x-\pi)^3}{3!}$.
2. El polinomio de Taylor para $\exp(x)$ de orden k en torno a $0i$ es: $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^k}{k!}$.

Clase 6

Primitivas

6.1. Derivada de función inversa

En el cálculo de primitivas aparecerán las derivadas de funciones inversas, es por esto que necesito enseñar esto ahora. Considere por ejemplo las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, las cuales cumplen $f(g(x)) = g(f(x)) = x$. La fórmula para la derivada de la función inversa indica:

$$g' = (f^{-1})' = \frac{1}{f'(g(x))} \tag{6.1}$$

En este caso, $(f^{-1})' = \frac{1}{2x}$. En notación de Leibniz, $\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dx} = 1$.

Desafío

Calcule la derivada de las siguientes funciones:

1. $\arcsin(x) = \sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $\mathrm{arc}\cos(x) = \cos^{-1}(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $\arctan(x) = \tan^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$

6.2. Definición de primitiva

Una función F se dice que es primitiva de f si $F' = f$, teniendo en cuenta que $\hat{F} = F + c$ es también una primitiva, con c una constante. El conjunto de todas las primitivas se denota $\int f$:

$$\int f = F + c \tag{6.2}$$

Algunas primitivas que conviene recordar son:

1. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln(|x|) + c$
3. $\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + c$
4. $\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + c$
5. $\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$

6. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + c$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + c$

Note que lo uno hace es preguntarse que función derivada da lugar a la primitiva en cuestión. Y para verificar que se encontró la primitiva, uno deriva el lado derecho y comprueba que en efecto es la función al lado izquierdo.

6.2.1. Potencias de funciones trigonométricas

Para primitivas con $\sin^2(x)$ o $\cos^2(x)$ podemos usar la identidad trigonométrica $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ y la fórmula del ángulo doble $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$. De ese modo,

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2},$$

desde donde se obtiene:

$$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c \tag{6.3}$$

$$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + c \tag{6.4}$$

Además, podemos usar que $\tan^2(x)(1+\cos^2(x)) = 1$, para obtener:

$$\int (\sec(x) + \tan(x))^2\,dx = 2\tan(x) + 2\sec(x) - x + c \tag{6.5}$$

6.2.2. Completar cuadrado

Considere la siguiente primitiva:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{8x - x^2}} \tag{6.6}$$

El término dentro de la raíz puede ser escrito como $16 - (x-4)^4$, y definiendo $a = 4$ y $u = x - 4$ tenemos que:

$$I = \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + c = \arcsin\left(\frac{x-4}{4}\right) + c \tag{6.7}$$

Desafío

1. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}} = \arctan(\sqrt{x^2+2x}) + c$

Fracciones parciales

Considere por ejemplo la siguiente expresión:

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} \tag{6.8}$$

El denominador puede ser descompuesto es $(x+1)$ y $(x-3)$. Luego planteamos como incógnita los valores A y B tal que:

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}, \tag{6.9}$$

obteniendo $A = 3$ y $B = 2$. Por lo tanto,

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3} = 3\int \frac{dx}{x-3} + 2\int \frac{dx}{x+1} = 3\ln(|x-3|) + 2\ln(|x+1|) + c \tag{6.10}$$

Desafío

Demuestre:

1. $\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\, dx = 6\ln|x+2| + \frac{5}{x+2} + c$
2. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2(x^2+1)} + c$

La figura 6.1 entrega un resumen de las tácticas disponibles para encontrar primitivas.

PROCEDIMIENTO	EJEMPLO
Sustituir para simplificar	$\frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,dx = \frac{du}{\sqrt{u}}$
Completar el cuadrado	$\sqrt{8x-x^2} = \sqrt{16-(x-4)^2}$
Usar una identidad trigonométrica	$(\sec x + \tan x)^2 = \sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x$ $= \sec^2 x + 2\sec x\tan x + (\sec^2 x - 1)$ $= 2\sec^2 x + 2\sec x \tan x - 1$
Eliminar una raíz cuadrada	$\sqrt{1+\cos 4x} = \sqrt{2\cos^2 2x} = \sqrt{2}\,\lvert\cos 2x\rvert$
Reducir una fracción impropia	$\frac{3x^2-7x}{3x+2} = x - 3 + \frac{6}{3x+2}$
Separar una fracción	$\frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$
Multiplicar por una forma de 1	$\sec x = \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$ $= \frac{\sec^2 x + \sec x\tan x}{\sec x + \tan x}$

Figura 6.1: Tácticas útiles para la obtención de primitivas (copiado del libro Cáculo de Thomas y Finney [1]).

6.3. Cambio de variable

Esta técnica consiste en renombrar una expresión dentro de la primitiva, y darse cuenta que al diferenciar esta nueva variable se simplifica el cáculo de la anti-derivada. Veamos ejemplos!

Ejemplo 1

$$I_1 = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx \tag{6.11}$$

Aquí notamos que si hacemos el cambio de variable (c.v.),

$$u = \sin(x), \qquad du = \cos(x)\,dx. \tag{6.12}$$

Esta *diferenciación* a ambos lados que hemos hecho para du es equivalente a calcular $du/dx = \cos(x)$. Reemplazando este c.v. en I_1,

$$I_1 = \int \frac{1}{u}\,du = \ln(|u|) + c = \ln(|\sin(x)|) + c \tag{6.13}$$

Ejemplo 2

$$I_2 = \int (ax+b)^n\,dx \tag{6.14}$$

Haciendo el c.v.,

$$u = (ax+b), \qquad du = a\,dx. \tag{6.15}$$

$$I_2 = \frac{1}{a}\int u^n\,du = \frac{1}{a}\frac{u^{n+1}}{n+1} + c = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \tag{6.16}$$

No se preocupe si no se le hubiese ocurrido, a mi tampoco... pero una vez visto el truco uno puede aplicarlo en otra ocasiones!

Desafío

Demuestre que:

1. $\int \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,dx = \arctan(\sin(x)) + c$
2. $\left(\frac{\exp(\arctan(x))}{1+\sin^2(x)}\right)dx = \arctan(\sin(x)) + c$
3. $\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,dx = 2\sqrt{x^2-9x+1} + c$

En general lo que hemos hecho es notar que en la primitiva aparece la expresión:

$$I = \int f(g(x))g'(x)\,dx$$

Y substituyendo $u = g(x)$ y $du = g'(x)\,dx$,

$$I = \int f(g(x))g'(x)\,dx$$

Una vez encontrada la primitiva se vuelve a la variable original x.

6.4. Integración por partes

Usando la expresión para la derivada de la suma de funciones se puede demostrar que:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx \tag{6.17}$$

La ecuación anterior puede ser escrita de manera compacta como:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{6.18}$$

donde $dv = v'(x)\,dx$ y $du = u'(x)\,dx$. La ecuación 6.18 puede ser leída: *un día vi una vaca vestida de uniforme* :D

Ejemplo 1

$$I_1 = \int x e^x\,dx \tag{6.19}$$

En este caso nos conviene usar el hecho de que la derivada de la función exponencial es ella misma, por lo tanto, si $u = x$, entonces $du = dx$, y $dv = e^x\,dx$ implica $v = e^x$. Por lo tanto,

$$I_1 = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c \tag{6.20}$$

Desafío

Usando integración por partes, calcule las siguientes primitivas:

1. $\int \ln(x)\,dx = x\ln x - x + c$
2. $\int x^n \ln(x)\,dx = \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c$

Clase 7

Integrales

7.1. Motivación desde las ecuaciones de movimiento

- ¿Podría estimar la distancia recorrida por un vehículo que se mueve a velocidad constante v sabiendo el tiempo t que ha transcurrido?

  Si. La distancia es $d = vt$, y corresponde al área bajo la curva en un gráfico de velocidad vs. tiempo.

- ¿Qué pasa si el movimiento es uniformemente acelerado (partiendo con $v_0 = 0$)?

  En ese caso $d = \frac{1}{2}at^2$.

- ¿Y si la velocidad cambia en el tiempo?

  La distancia sigue siendo el área bajo la curva en el gráfico velocidad vs. tiempo.

7.2. Cálculo del área bajo la curva

Considere la función $f(x) = x^2$. Calcule el área bajo la curva entre 0 y L dividiendo el intervalo en N segmentos iguales. Calcule el área que se obtiene de considerar los rectángulos inscritos y los circunscritos en la curva. ¿Puede tomar el límite cuando $N \to \infty$?

7.3. Integral de Riemann

En el caso anterior consideramos una partición del intervalo a integrar equiespaciada, pero lo que sigue puede demostrarse para una partición P cualquiera. De todas maneras vamos a siempre querer tomar el límite en que las bases de los rectángulos son muy pequeñas.

Dada una función f y una partición P, denominaremos el área que se obtiene de considerar los rectángulos inscritos como $s(f,P)$, y la de los rectángulos circunscritos como $S(f,P)$.

Diremos que una función es **Riemann-integrable** ssi:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]}) \quad S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$

Se puede demostrar que en el límite de partición muy pequeña ($|P| \to 0$), y cuando la función es continua,

$$\int_a^b f = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i \tag{7.1}$$

Que motiva la notación de Leibnitz (también escrito Leibniz)

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx$$

7.4. Propiedades de la integral

1. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
2. $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
3. $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$
4. Si $f(x) \leqslant g(x) \forall x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$
5. $|\int_a^b f| \leqslant \int_a^b |f|$

7.5. Teorema Fundamental del Cálculo

- El primer teorema fundamental del cálculo establece que si f es una función continua en un intervalo int(I), entonces G, definida como:

$$G(x) = \int_a^x f \tag{7.2}$$

  es derivable y además $G' = f$ en int(I).

- El segundo teorema dice que si f es una función integrable, y si F es una función continua y derivable en (a,b) tal que $F' = f$ en (a,b), entonces:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \tag{7.3}$$

Desafío

Calcule las siguientes integrales:

1. $\int_a^b x^2$
2. $\int_0^\pi \sin(x)$

Bibliografía

[1] Thomas y Finney. Cálculo en una variable, novena edición. Pearson, 2006.

[2] http://docencia.dim.uchile.cl/calculo/material/ma1001_2017.pdf
Apunte curso Introducción al Cálculo MA1001 2018, FCFM, U. Chile.