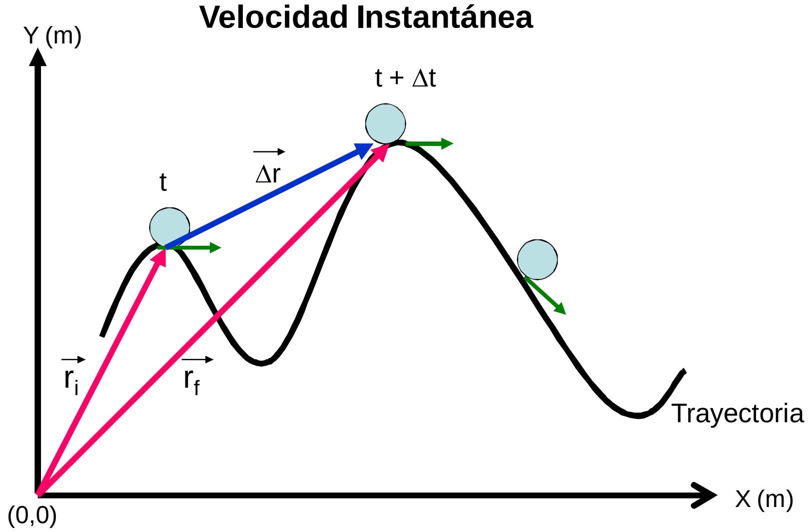
Velocidad Instantánea



Velocidad Instantánea

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{r}_i = r(t)$$

$$\vec{r}_f = r(t+\Delta t)$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

Este límite se llama la derivada de la función r(t)

Se denota por:

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

Ejemplo:

Sea el siguiente vector posición:

$$\boxed{\vec{r}(t) = 5t^2\hat{i}}$$

r(t):metros

t: segundos

$$\boxed{\vec{r}_i(t) = 5t^2\hat{i}} \qquad \boxed{\vec{r}_f(t+\Delta t) = 5(t+\Delta t)^2\hat{i}}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5(t+\Delta t)^2\hat{i} - 5t^2\hat{i}}{\Delta t}}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2)\ \hat{i} - 5t^2\hat{i}}{\Delta t}}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5t^2\hat{i} + 10t\Delta t\hat{i} + 5\Delta t^2\ \hat{i} - 5t^2\hat{i}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{10t\Delta t\hat{i} + 5\Delta t^2\ \hat{i}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} (10t\hat{i} + 5\Delta t\hat{i})$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = 10t\hat{i} \quad \text{m/s}}$$

La **velocidad Instantánea** es la derivada del vector posición, y es un vector cuyas componentes son las derivadas de las componentes del vector posición.

$$\vec{r}(t) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z}$$

Rapidez Instantánea: Es la magnitud o módulo del vector velocidad

$$\boxed{\left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

Recordar que la velocidad instantánea es la derivada del vector posición

Ejemplo:

$$\boxed{\vec{r}(t) = 5t\hat{i} + (10t - 4{,}5t^2)\,\hat{j}}$$

r(t): metros y t: segundos

Calcule la:

a) Velocidad media para el intervalo de tiempo t = 1 seg. a t = 4 seg.

b) Velocidad instantánea para:

i) t = 0 seg.

ii) t = 1 seg.

iii) t = 2 seg.

$$\boxed{\vec{r}(t) = 5t\hat{i} + (10t - 4{,}5t^2)\,\hat{j}}$$

$$\vec{r}(1)_i = 5\hat{i} + (10 - 4{,}5)\,\hat{j} \quad \text{(m)}$$

$$\vec{r}(4)_f = 20\hat{i} + (40 - 72)\,\hat{j} \quad \text{(m)}$$

$$\vec{v}_m = \frac{20\hat{i} - 32\hat{j} - (5\hat{i} + 5{,}5\hat{j})}{3}$$

$$\vec{v}_m = \frac{15\hat{i} - 37{,}5\hat{j}}{3} \quad \text{(m/s)}$$

$$\boxed{\vec{v}_m = 5\hat{i} - 12{,}5\,\hat{j} \ (m/s)}$$

$$\vec{v}(t) = 5\hat{i} + (10 - 9t)\hat{j} \text{ (m/s)}$$

$$\vec{v}(0) = 5\hat{i} + 10\hat{j} \; (m/s)$$

$$\vec{v}(1) = 5\hat{i} + \hat{j} \; (m/s)$$

$$\vec{v}(2) = 5\hat{i} - 8\hat{j} \; (m/s)$$

Tarea:

Calcule la rapidez instantánea para:

a) t = 0 seg.

b) t = 1 seg.

c) t = 2 seg.

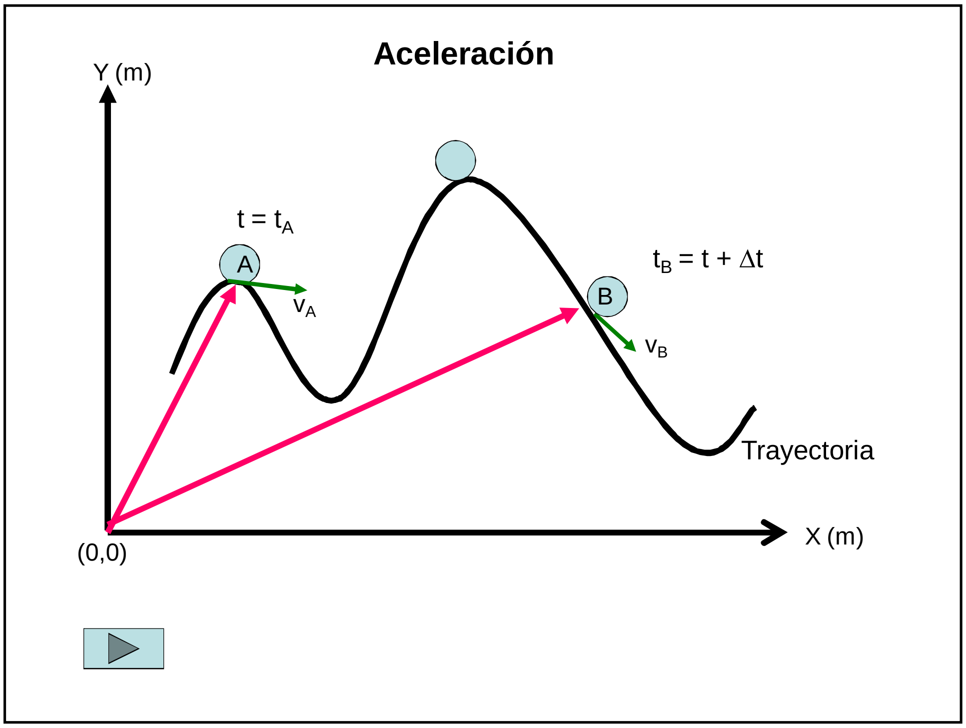
Aceleración Media e Instantánea

Cuando la velocidad de un cuerpo cambia en el tiempo se dice que éste tiene una aceleración, como la velocidad es un vector y se define como el cambio de la velocidad por unidad de tiempo.

Con relación a la Fig. muestra un móvil que a tiempo **$t = t_A$** pasa por el punto **"A"** con una velocidad **$v_A = v(t)$** y que, luego a tiempo **$t = t_B$**, pasa por el punto **"B"** con una velocidad **$v_B = v(t + \Delta t)$.**

Aceleración Media

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$



Aceleración Instantánea

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

La aceleración Instantánea es la derivada de la velocidad

Ejemplo:

Sea $r(t) = 5t^2\,\hat{\imath} + (10t - 3t^2)\,\hat{\jmath}$ donde r(t): metros y t: segundos

Calcule la:

a) Velocidad

b) Aceleración

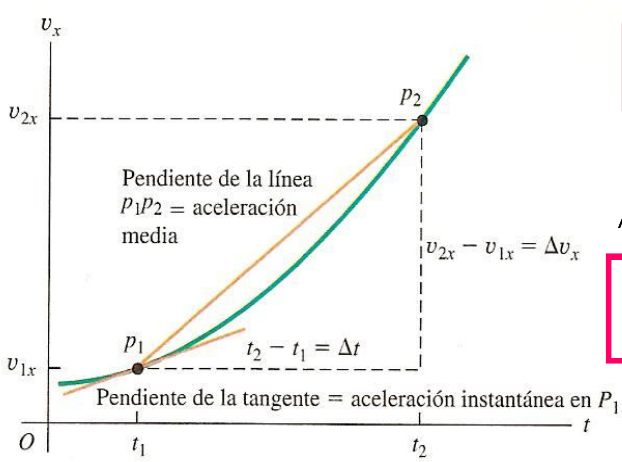
Respuesta:

$$\boxed{\vec{r}(t) = 5t^2\hat{i} + (10t - 3t^2)\hat{j} \; (m)}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = 10t\hat{i} + (10 - 6t)\hat{j} \; (m/s)}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = 10\hat{i} - 6\hat{j} \; (m/s^2)}$$

Aceleración



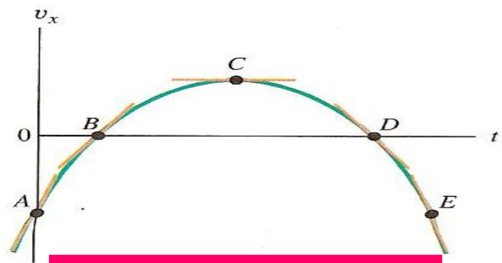
Aceleración Media

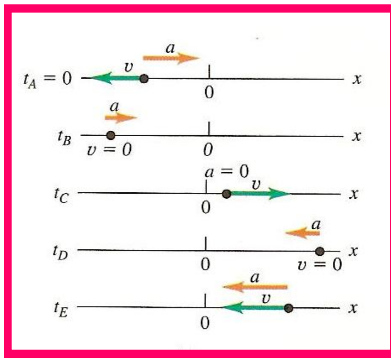
$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}(m/s^2)}$$

Aceleración Instantánea

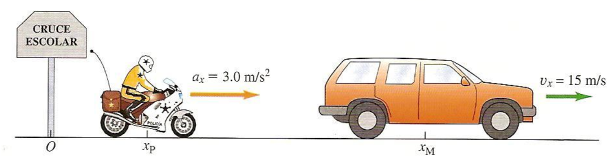
$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}}$$

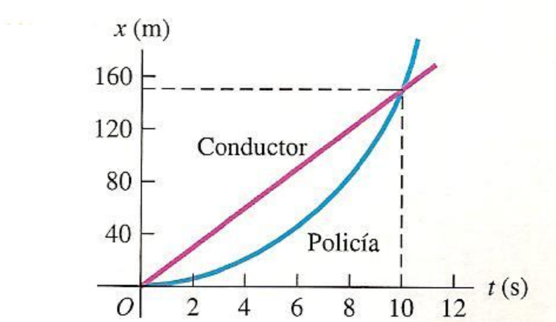
Ejemplo





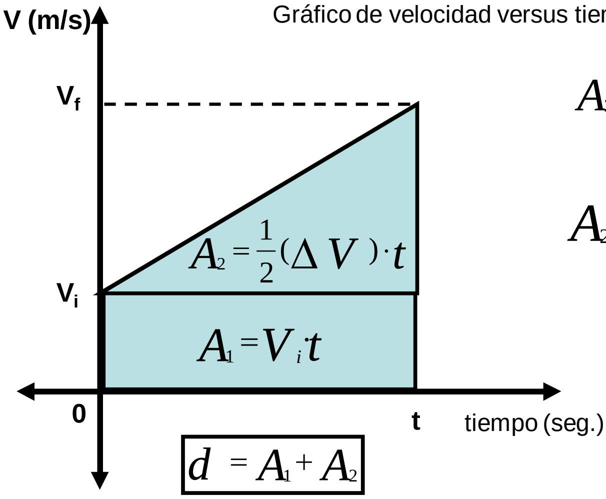
Ejemplo





(b)

Gráfico de velocidad versus tiempo



$$A_2 = \frac{1}{2}(V_f - V_i)\cdot t \cdot \frac{t}{t}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{(V_f - V_i)}{t}\cdot t^2$$

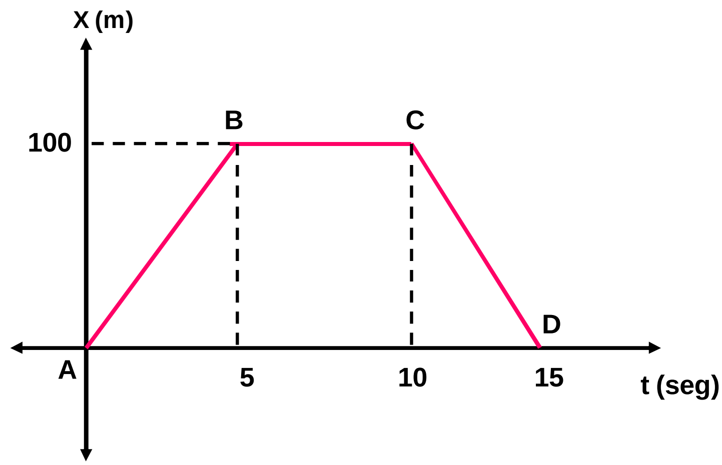
$$\boxed{A_2 = \frac{1}{2} a\, t^2}$$

$$\boxed{d = A_1 + A_2}$$

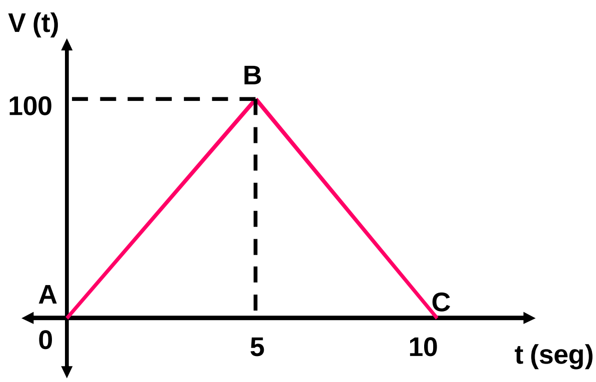
$$\boxed{d = V_i \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2}$$

$$\boxed{y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}\cdot a \cdot t^2}$$

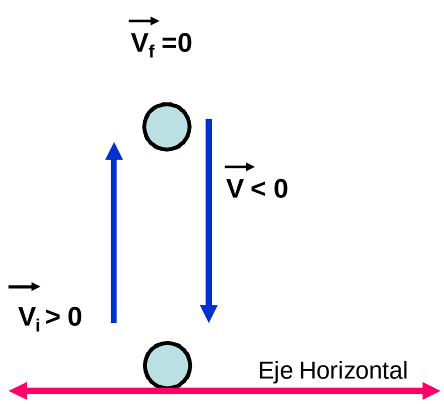
Movimiento Uniforme Rectilíneo



Movimiento Uniforme Acelerado



Lanzamiento Vertical Hacia Arriba



$$V_f = V_i - gt$$

$$t_{máx} = \frac{V_i}{g}$$

$$h_{máx} = V_{prom} \bullet t_{máx}$$

$$h_{máx} = \frac{V_i}{2} \bullet \frac{V_i}{g}$$

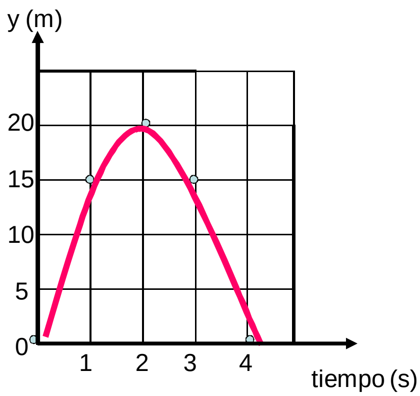
$$\boxed{h_{máx} = \frac{V_i^2}{2g}}$$

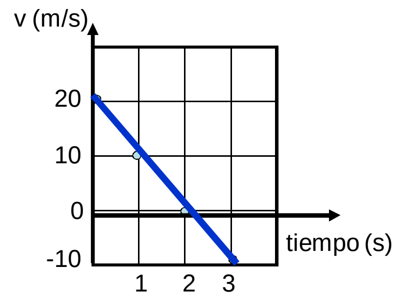
$$\boxed{h = h_0 + V_i \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2}$$

Ejemplo: Movimiento Unidimensional

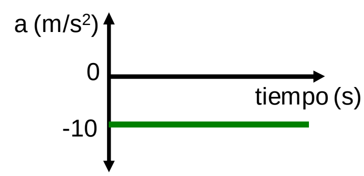
$$v(t) = (20 - 10t)(m/s)$$

$$y(t) = (20t - 5t^2)(m)$$





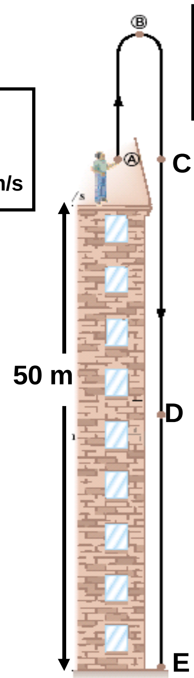
$$a(t) = -10\ (m/seg^2)$$



Ejemplo

A

t = 0 s	
y = 0 m	
v = 20 m/s	



t = 2,04 s	B
y = 20,4 m	
v = 0 m/s	

t = 4,08 s
y = 0 m
v = -20 m/s

t = 5 s
y = -22,5 m
v = -29 m/s

t = 5,83 s
y = - 50 m
v = - 37,1 m/s

Caída Libre

Debido a la acción permanente de la fuerza de gravedad de la tierra, los cuerpos al ser soltados libre en el espacio son atraídos hacia el centro de la tierra, adquiriendo un movimiento acelerado. Si la caída se produce en el vacío, la caída libre de los cuerpos es un movimiento uniforme acelerado (la aceleración de gravedad).

$$V_i = 0$$

$$V_f^2 = V_i^2 + 2gh$$

$$V_f = \sqrt{2gh}$$

$$\boxed{h = \frac{1}{2} g\, t^2}$$

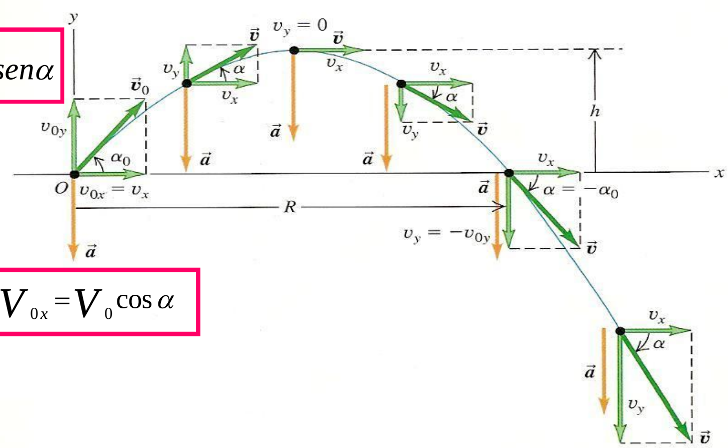
$\vec{g} = -9{,}8\,\hat{\jmath}\ m/s^2$

En la caída de los cuerpos la **resistencia,** aumenta con la velocidad de caída.

Al inicio la resistencia es pequeña y crece con el aumento de velocidad hasta que después de cierto tiempo se hace igual al peso del cuerpo, y la aceleración se hace igual a cero, a partir de ese instante el cuerpo alcanza su **velocidad límite** y continua la caída con **velocidad uniforme**.

Movimiento Parabólico

$$\boxed{V_{0y} = V_0 \, sen\alpha}$$



$$\boxed{V_{0x} = V_0 \cos\alpha}$$

Ecuaciones del Movimiento Parabólico

$$h_{máx.} = V_0 \frac{V_{0y}}{g} - \frac{1}{2} g \frac{V_{0y}^2}{g^2}$$

$$\boxed{h_{máx.} = \frac{1}{2} \frac{V_{0y}^2}{g}}$$

$$\vec{V}_y = (\vec{V}_{0y} - gt)\,\hat{j}$$

$$\boxed{d_{máx.} = V_{0x} \cdot 2t_{máx.}}$$

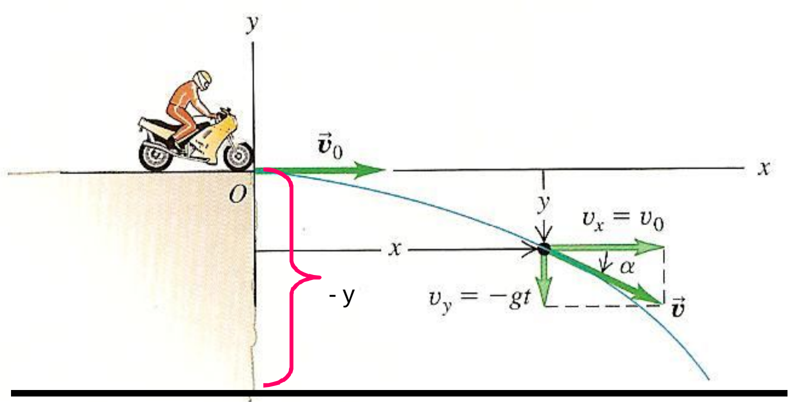
$$\boxed{\vec{V}(t) = \vec{V}_{0x}\,\hat{i} + (\vec{V}_{0y} - gt)\,\hat{j} \,(m/s)}$$

Ejemplo: Un jugar le da un puntapié a una pelota con una velocidad inicial 10 m/seg. en una dirección de 30º. Calcular:

a) El tiempo, cuando la pelota alcanza la altura máxima.

b) La altura máxima.

c) La distancia de alcance máximo.

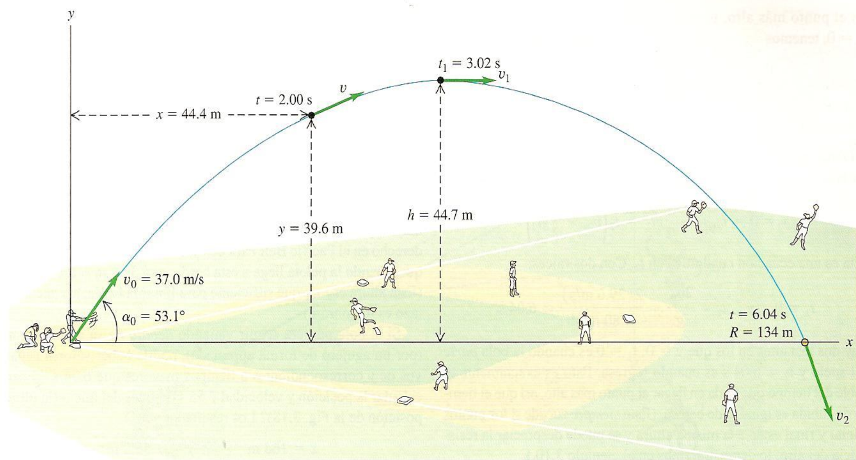


$$\boxed{y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2}$$

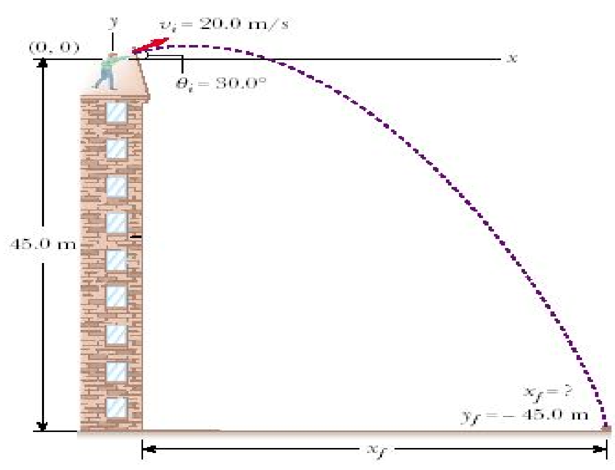
$$v_0 = 0$$
$$y_0 = 0$$
$$a = -g$$

$$-y = \frac{1}{2} - g \cdot t^2$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2} g \cdot t^2}$$


y
t_1 = 3.02 s
v_1
t = 2.00 s
v
x = 44.4 m
h = 44.7 m
y = 39.6 m
v_0 = 37.0 m/s
α_0 = 53.1°
t = 6.04 s
R = 134 m
x
v_2

Tarea:


y
v_i = 20.0 m/s
(0, 0)
x
θ_i = 30.0°
45.0 m
x_f = ?
y_f = – 45.0 m
x_f