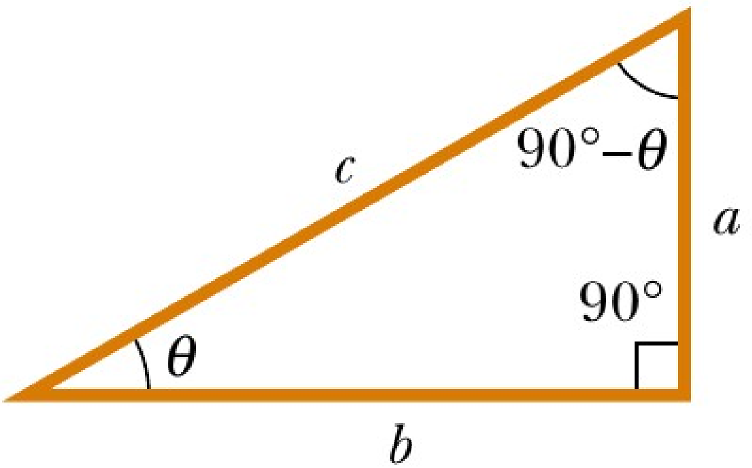
Trigonometría

Relaciones entre lados y ángulos de

un triángulo rectángulo, es decir,

que tiene un ángulo recto.

a = opposite side
b = adjacent side
c = hypotenuse



$$\sin\,\theta \equiv \frac{\text{side opposite } \theta}{\text{hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\,\theta \equiv \frac{\text{side adjacent to } \theta}{\text{hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

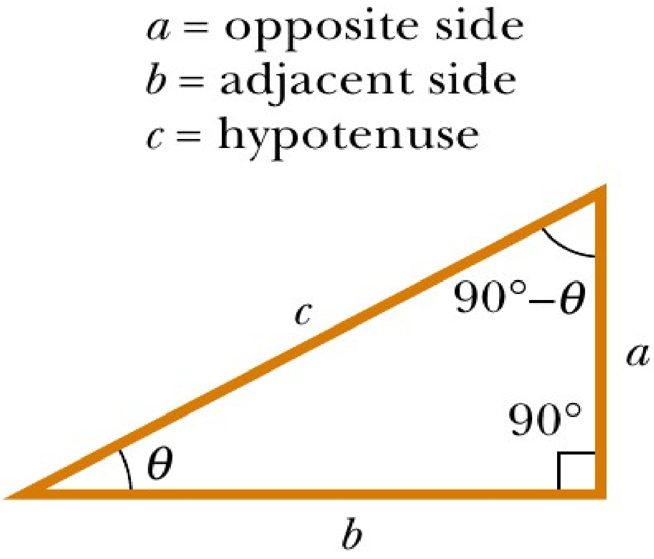
$$\tan\,\theta \equiv \frac{\text{side opposite } \theta}{\text{side adjacent to } \theta} = \frac{a}{b}$$

Trigonometría

El teorema de Pitágoras relaciona

los lados del triángulo:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



y permite concluir que:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

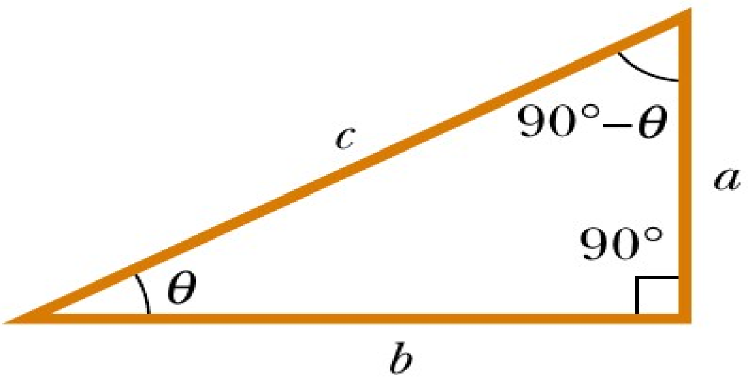
Trigonometría

$$\sin\theta \equiv \frac{\text{side opposite } \theta}{\text{hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta \equiv \frac{\text{side adjacent to } \theta}{\text{hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\theta \equiv \frac{\text{side opposite } \theta}{\text{side adjacent to } \theta} = \frac{a}{b}$$

a = opposite side
b = adjacent side
c = hypotenuse



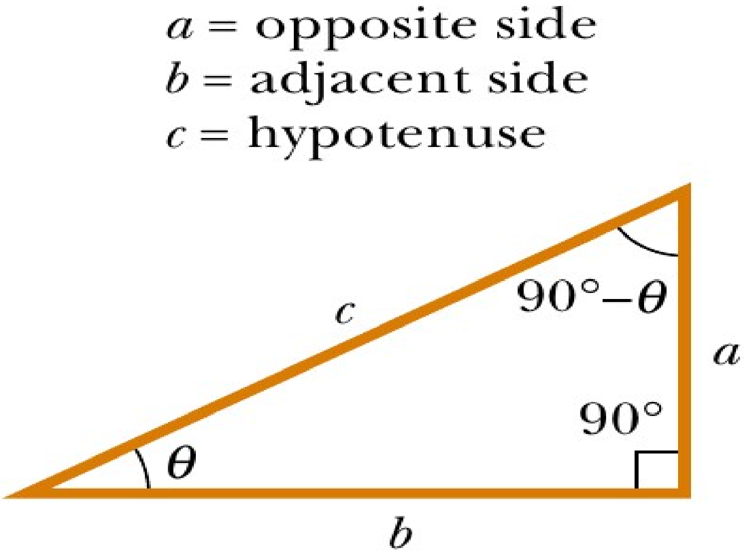
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Se definen las funciones cotangente, secante y codecante:

$$\csc\theta \equiv \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta \equiv \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta \equiv \frac{1}{\tan\theta}$$

Trigonometría

De la figura se deducen tambien:



$$\sin\,\theta = \cos(90^\circ - \theta)$$

$$\cos\,\theta = \sin(90^\circ - \theta)$$

$$\cot\,\theta = \tan(90^\circ - \theta)$$

Otras propiedades:

$$\sin\,(-\theta) = -\sin\,\theta$$

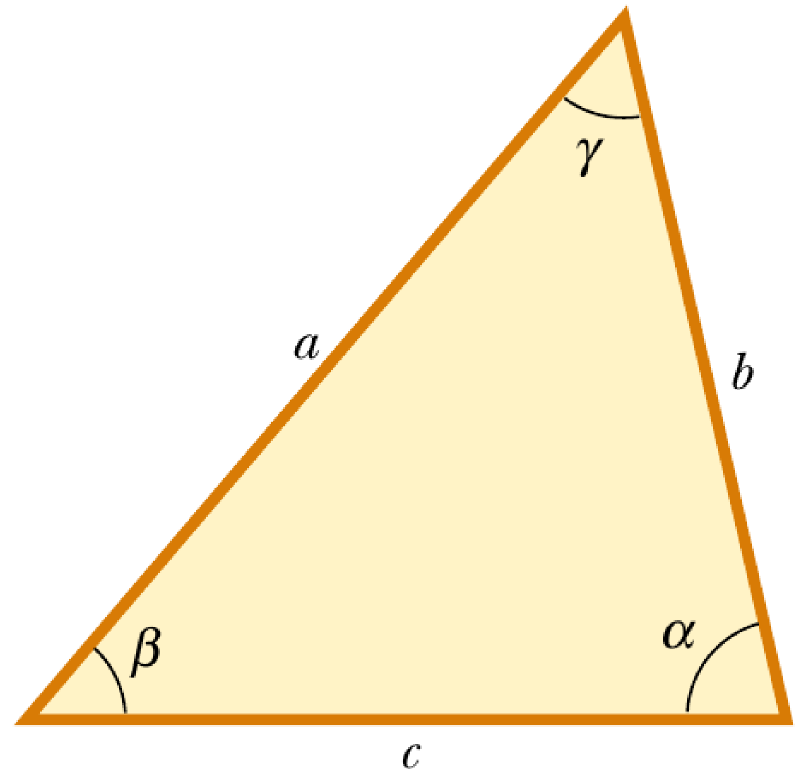
$$\cos\,(-\theta) = \cos\,\theta$$

$$\tan\,(-\theta) = -\tan\,\theta$$

Trigonometría

Para un triángulo cualquiera, el Teorema

del Coseno, ó Pitagoras generalizado:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

y el Teorema del seno:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Trigonometría

Identidades trigonométricas:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$$

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \tfrac{1}{2}(1 - \cos\theta)$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \tfrac{1}{2}(1 + \cos\theta)$$

Trigonometría

Identidades trigonométricas:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

Trigonometría

Identidades trigonométricas:

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

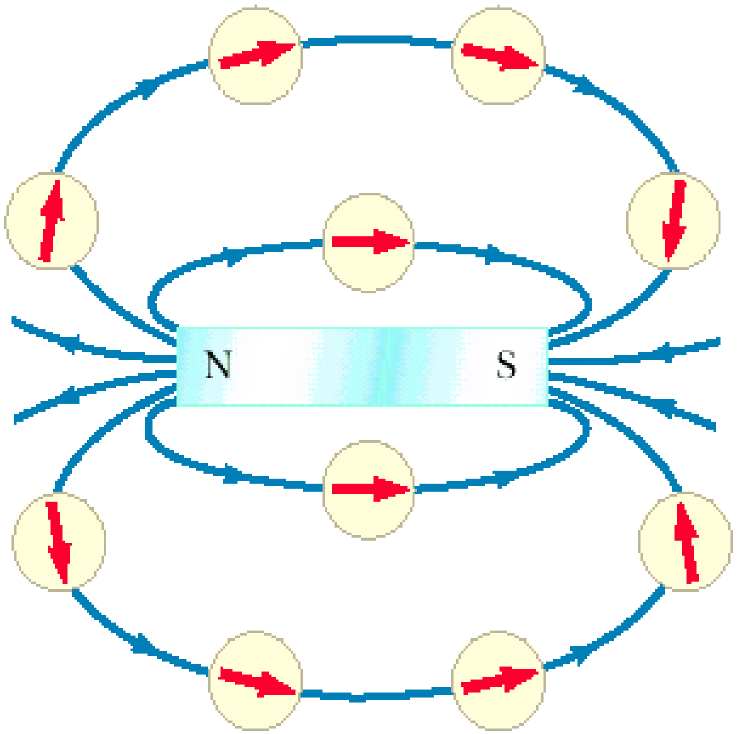
Magnetismo

- 1819 Oersted observó que la corriente en un alambre puede desviar la aguja de una brújula.

- Ampere (1775-1836) formuló ley para calcular la fuerza de un alambre llevando corriente sobre otro.

- 1820 Faraday y Henry formularon conexiones entre la Electricidad y el Magnetismo.

Magnetismo



- Adicional al campo eléctrico, la región en torno a una carga en movimiento, contiene un campo magnético.
- Un campo magnético también rodea a cualquier substancia magnética.

Magnetismo

- Podemos definir el Campo Magnético en un punto del espacio, en términos de la fuerza F_B que el campo ejerce sobre un objeto de “prueba”, que en este caso será una partícula cargada moviéndose con velocidad v.
- Condiciones adicionales:
  - No existe Campo Eléctrico.
  - No existe Campo Gravitacional.

Magnetismo

- Experimentos con diversas cargas arrojan los siguientes resultados:
- La magnitud de F_B del campo magnético ejercido sobre la partícula es proporcional a la carga q y a la velocidad v de la partícula.
- La magnitud y dirección de F_B depende de la velocidad de la partícula y de la magnitud y dirección del campo magnético B.
- Cuando una partícula cargada se mueve paralela al Campo Magnético B, la fuerza magnética F_B es cero.
- Cuando la velocidad de la partícula forma un ángulo cualquiera $\Theta \neq 0$ con el campo magnético, la fuerza magnética actúa en una dirección perpendicular a v y B, es decir, F_B es perpendicular al plano formado por v y B.

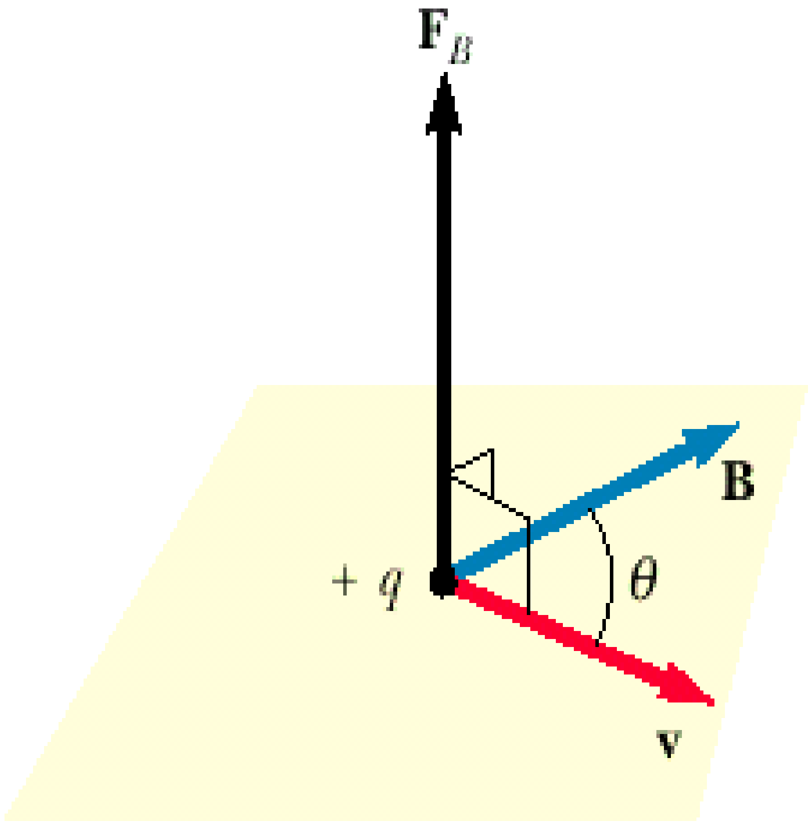
Magnetismo

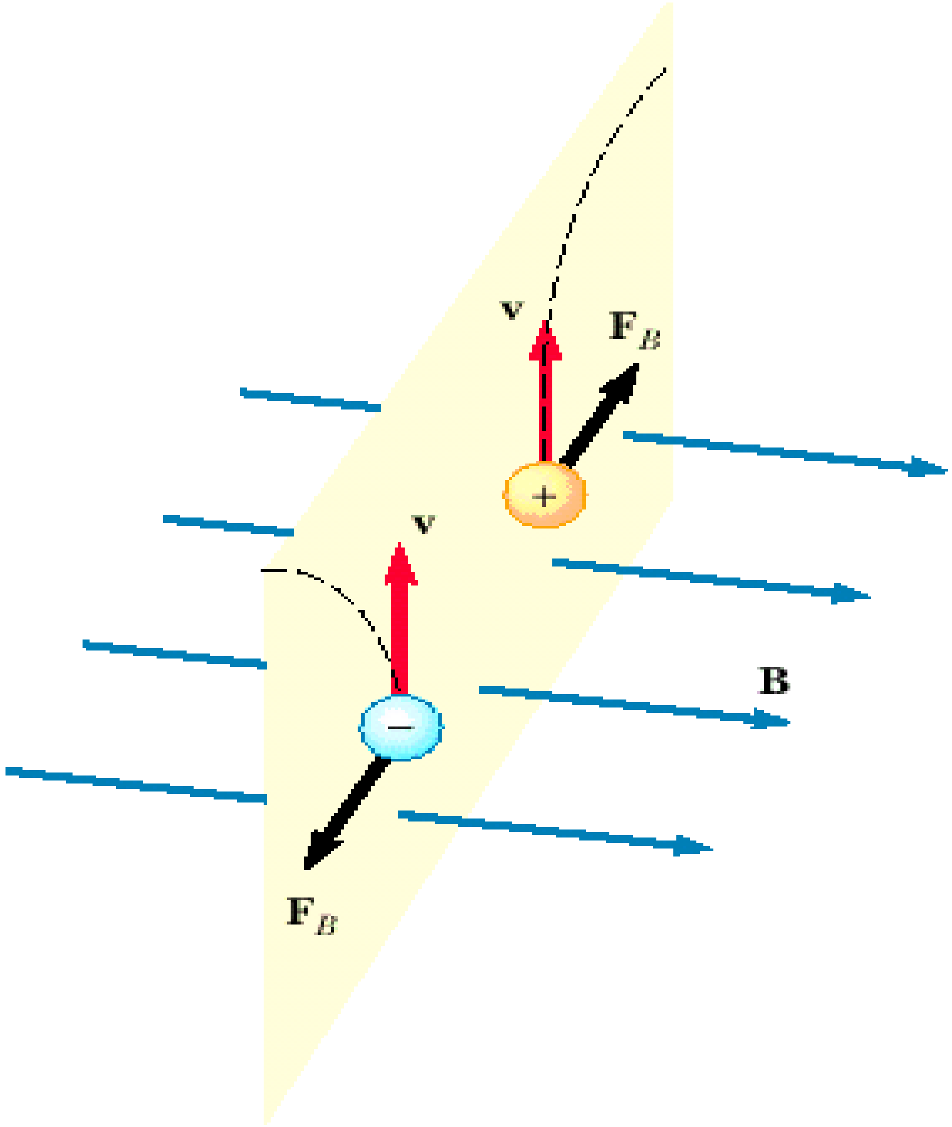
- La fuerza magnética ejercida sobre una carga positiva es en dirección opuesta a la dirección de la fuerza magnética ejercida sobre una carga negativa que se mueve en la misma dirección. .
- La magnitud de la fuerza magnética ejercida sobre una carga en movimiento a proporcional a sen(ϴ), donde ϴ es el ángulo entre el vector v velocidad de la partícula y el vector campo magnético B.

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Magnetismo

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$





Magnetismo

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad F_B = |q|vB\sin\theta$$

- La fuerza eléctrica siempre está en la dirección del campo eléctrico, en cambio la fuerza magnética es perpendicular al campo magnético.
- La fuerza eléctrica actúa sobre una partícula cargada, independiente de su velocidad, en cambio la fuerza magnética sólo actúa si la partícula tiene alguna componente de velocidad perpendicular al campo magnético.

Magnetismo

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad F_B = |q| vB \sin\theta$$

- La fuerza eléctrica efectúa trabajo al desplazar una carga, en cambio la fuerza magnética no hace trabajo cuando actúa sobtre una carga.
- Lo anterior surge del hecho que la fuerza magnética es perpendicular a la velocidad, y por ende al desplazamiento.
- CONCLUSIÓN: Una fuerza magnética sólo puede variar la dirección del vector velocidad, pero no su magnitud, por lo tanto "no cambia" la Energía Cinética de la partícula.

Magnetismo

- La unidad SI del campo magnético es el “weber por metro cuadrdo” (Wb/m^2), llamado también Tesla (T).
- Una carga de 1[C] que se mueve a través de un campo de 1[T] con velocidad 1[m/s] experimenta una fuerza de 1[N]

Magnetismo

- Otra unidad usada es el gauss (G), cuya equivalencia es: $1[T] = 10^4\ [G]$

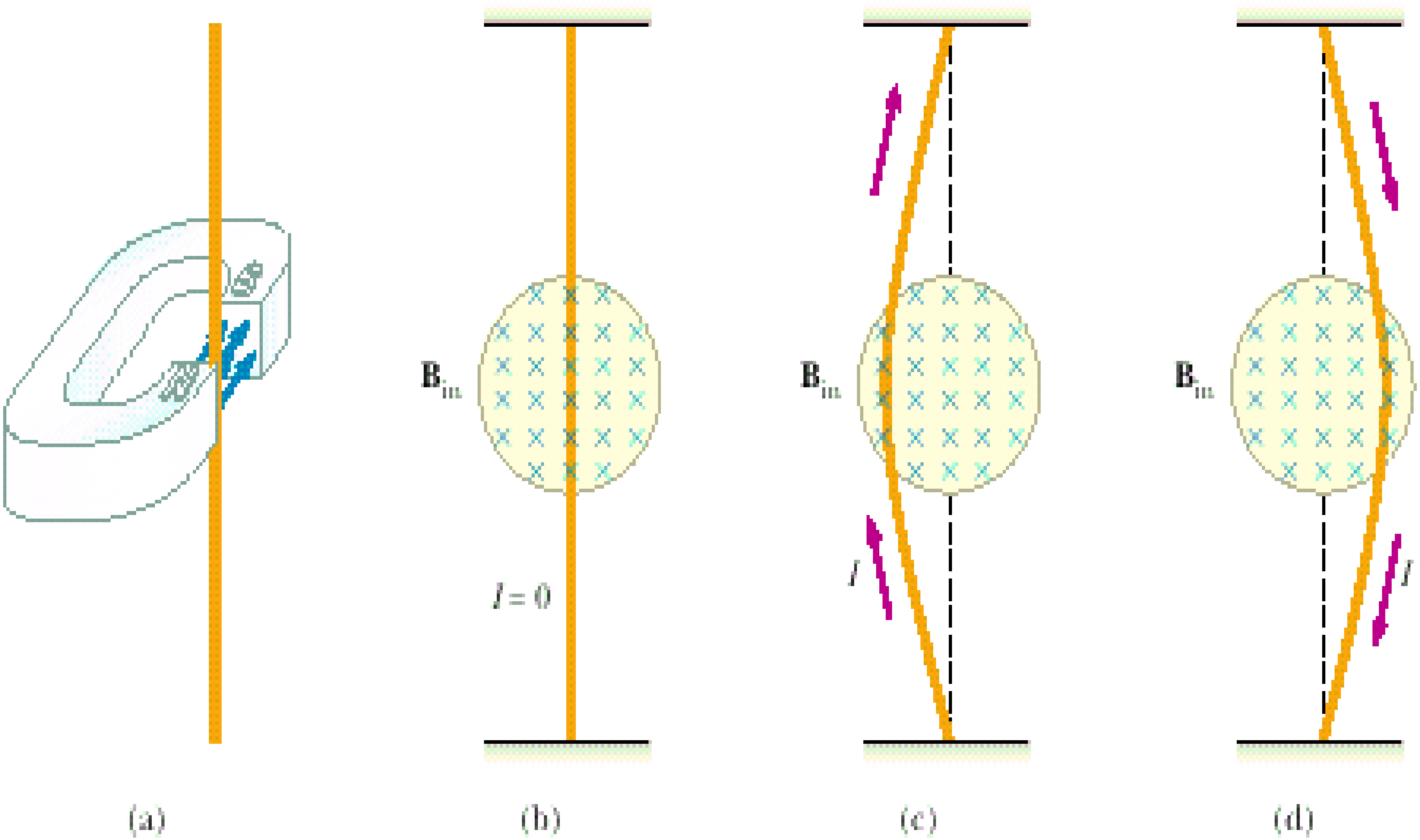
$$1\,T = \frac{N}{C \cdot m/s} \qquad 1\,T = 1\,\frac{N}{A \cdot m}$$

Magnetismo

TABLE 29.1 Some Approximate Magnetic Field Magnitudes

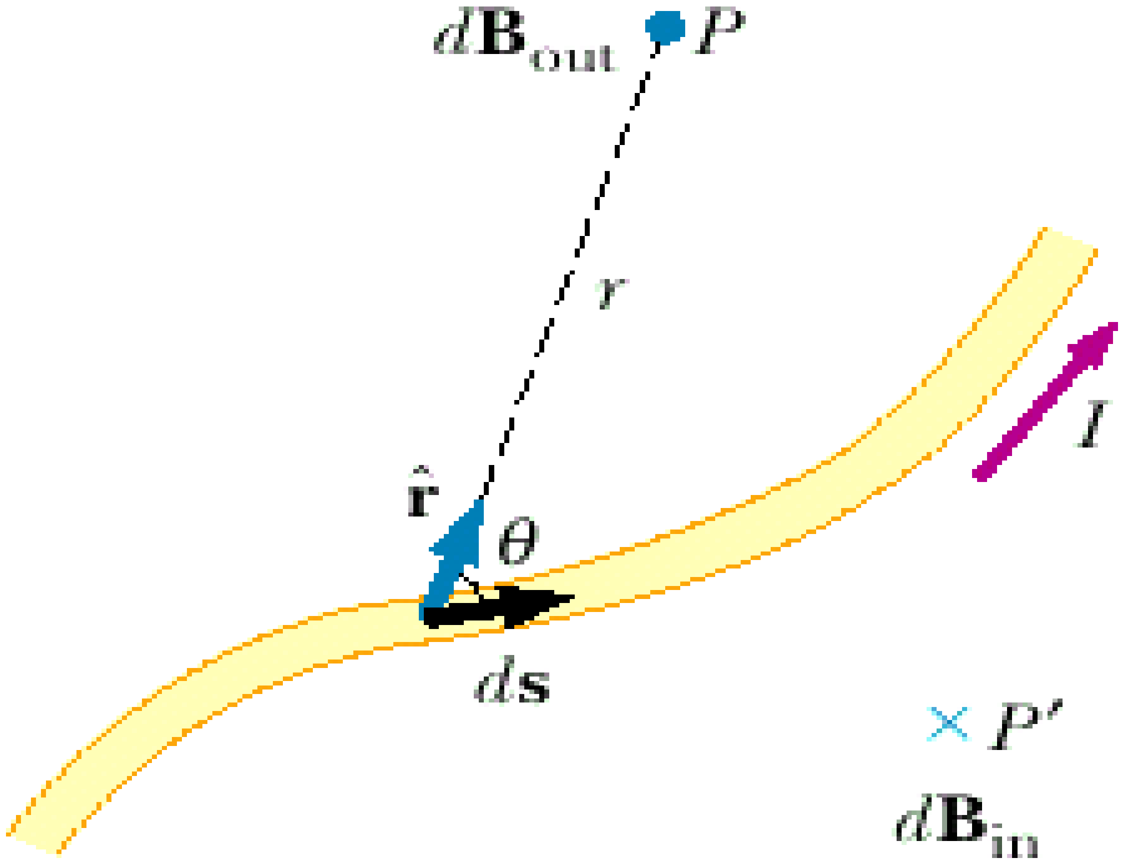
Source of Field	Field Magnitude (T)
Strong superconducting laboratory magnet	30
Strong conventional laboratory magnet	2
Medical MRI unit	1.5
Bar magnet	10^{-2}
Surface of the Sun	10^{-2}
Surface of the Earth	0.5×10^{-4}
Inside human brain (due to nerve impulses)	10^{-13}

Magnetismo



Ley de Biot-Savart

- Cálculo del campo magnético en un punto P a una distancia r del elemento de corriente ds.



(a)

Ley de Biot-Savart

- Mediciones experimentales de Jean Baptiste Biot y Felix Savart concluyeron que:

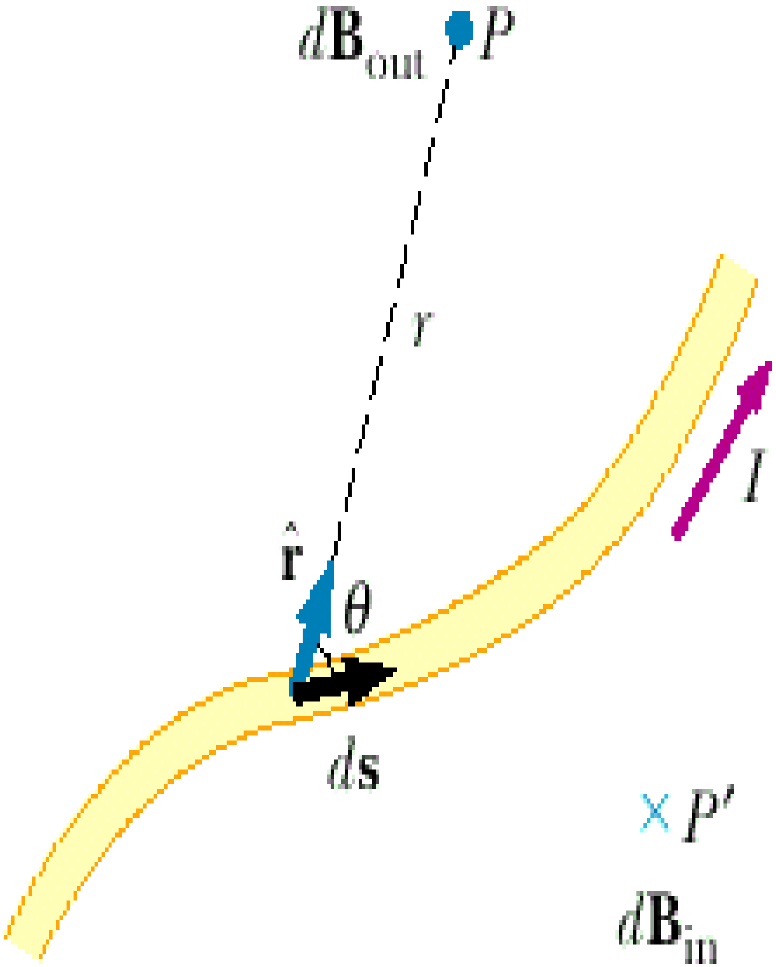
  - El vector dB es perpendicular tanto a ds (que es un vector que tiene unidades de longitud y está en la dirección de la corriente) y también al vector “r unitario”, dirigido del elemento de corriente al punto P donde quiero medir el campo magnético.

  - La magnitud de dB es inversamente proporcional a r^2, donde r es la distancia del elemento de corriente al punto P.

Ley de Biot-Savart

- Mediciones experimentales de Jean Baptiste Biot y Felix Savart concluyeron que:
  - La magnitud de dB es proporcional a la corriente y a la longitud ds del elemento de corriente.
  - La magnitud de dB es proporcional a senΘ, donde Θ es el ángulo entre los vectores ds y “r unitario”.

Ley de Biot-Savart



(a)

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A}$$

Ley de Biot-Savart

- Es importante destacar que la ecuación anterior solamente entrega el valor de un diferencial de campo magnético (dB), producido a su vez por un elemento diferencial de corriente ds. Para encontrar el campo magnético total B producido por un conductor de tamaño finito, debemos integrar la ecuación anterior:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

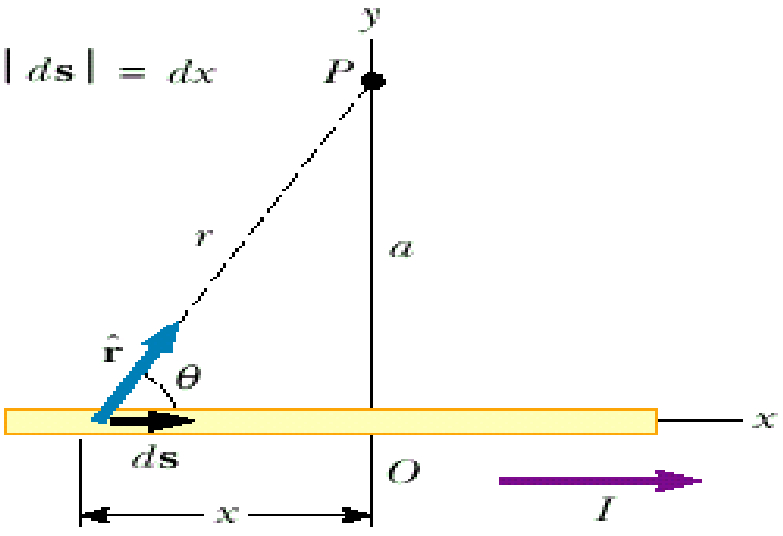
Comparación Ley de Biot-Savart y Ley de Coulomb

- Un elemento de corriente produce un campo magnético, una carga puntual produce un campo eléctrico.

- La magnitud del campo magnético varía con el cuadrado inverso de la distancia desde el elemento de corriente, de igual modo varía el campo eléctrico de una carga puntual.

- Sin embargo, las direcciones de los campos son “muy diferentes”; el campo eléctrico es radial, el campo magnético es perpendicular el elemento de corriente y al vector que une este elemento con el punto de observación (P).

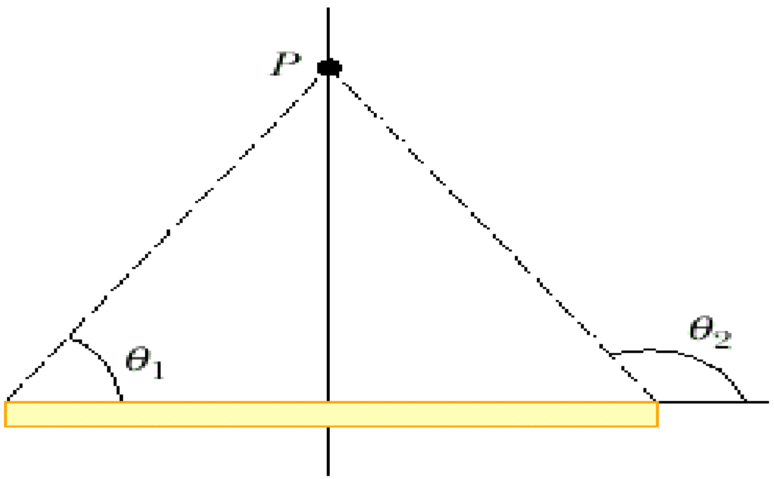
Ley de Biot-Savart



(a)

$$d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{k} \left| d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}} \right| = \mathbf{k}(dx \sin \theta)$$

$$d\mathbf{B} = (dB)\,\mathbf{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \sin \theta}{r^2}\,\mathbf{k}$$



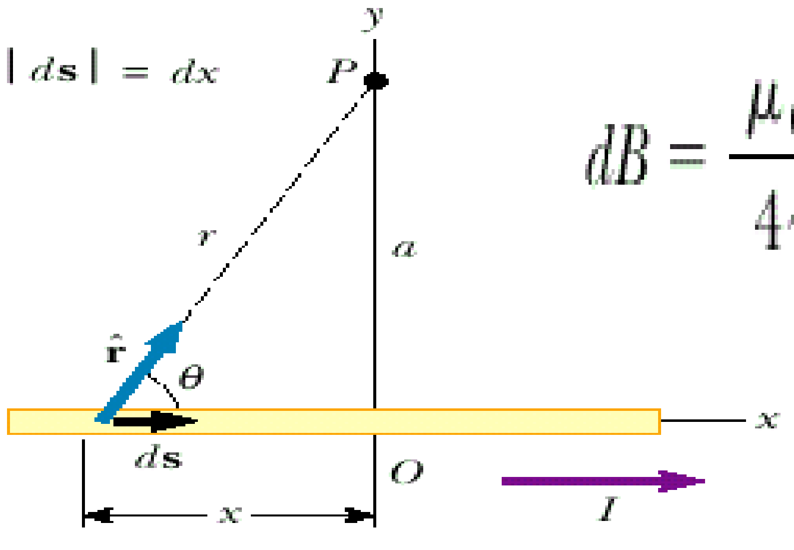
(b)

$$r = \frac{a}{\sin \theta} = a \csc \theta$$

$$x = -a \cot \theta$$

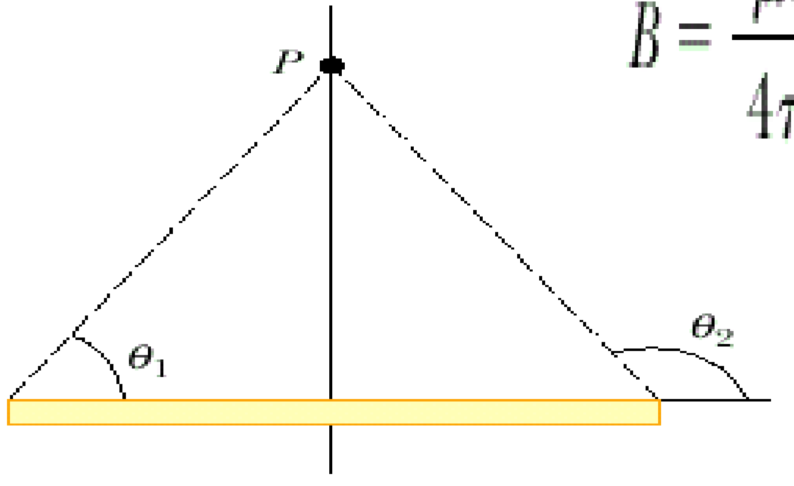
$$dx = a \csc^2 \theta \, d\theta$$

Ley de Biot-Savart



(a)

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a\csc^2\theta\sin\theta\, d\theta}{a^2\csc^2\theta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\sin\theta\, d\theta$$



(b)

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

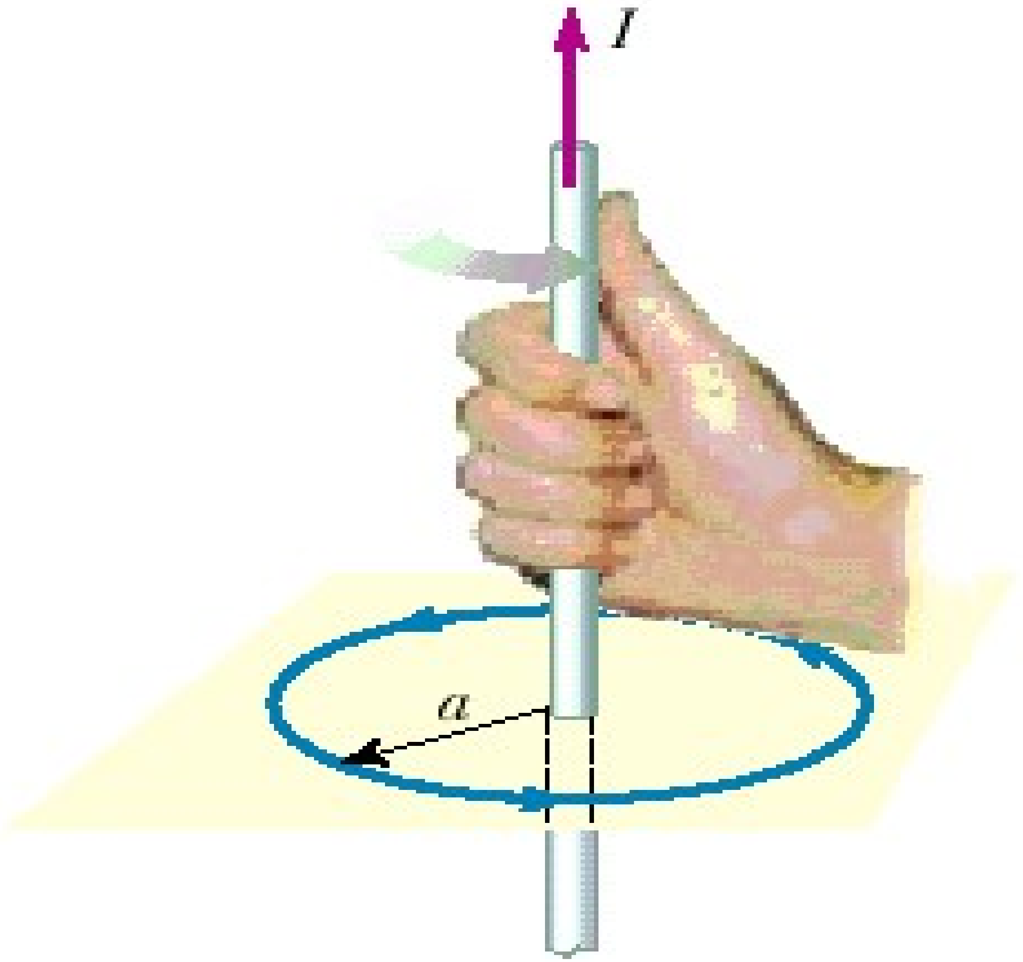
Alambre

“infinito”:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

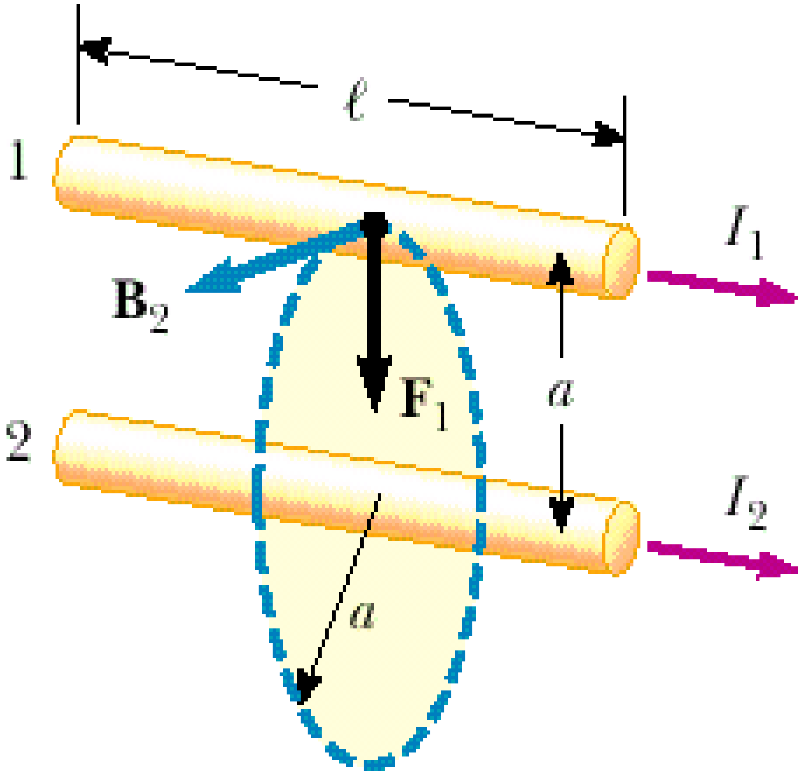
Ley de Biot-Savart

- Campo magnético producido por un alambre con corriente:



Fuerza entre 2 conductores paralelos:

$$F_1 = I_1 \ell B_2 = I_1 \ell \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \ell$$



$$\frac{F_B}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

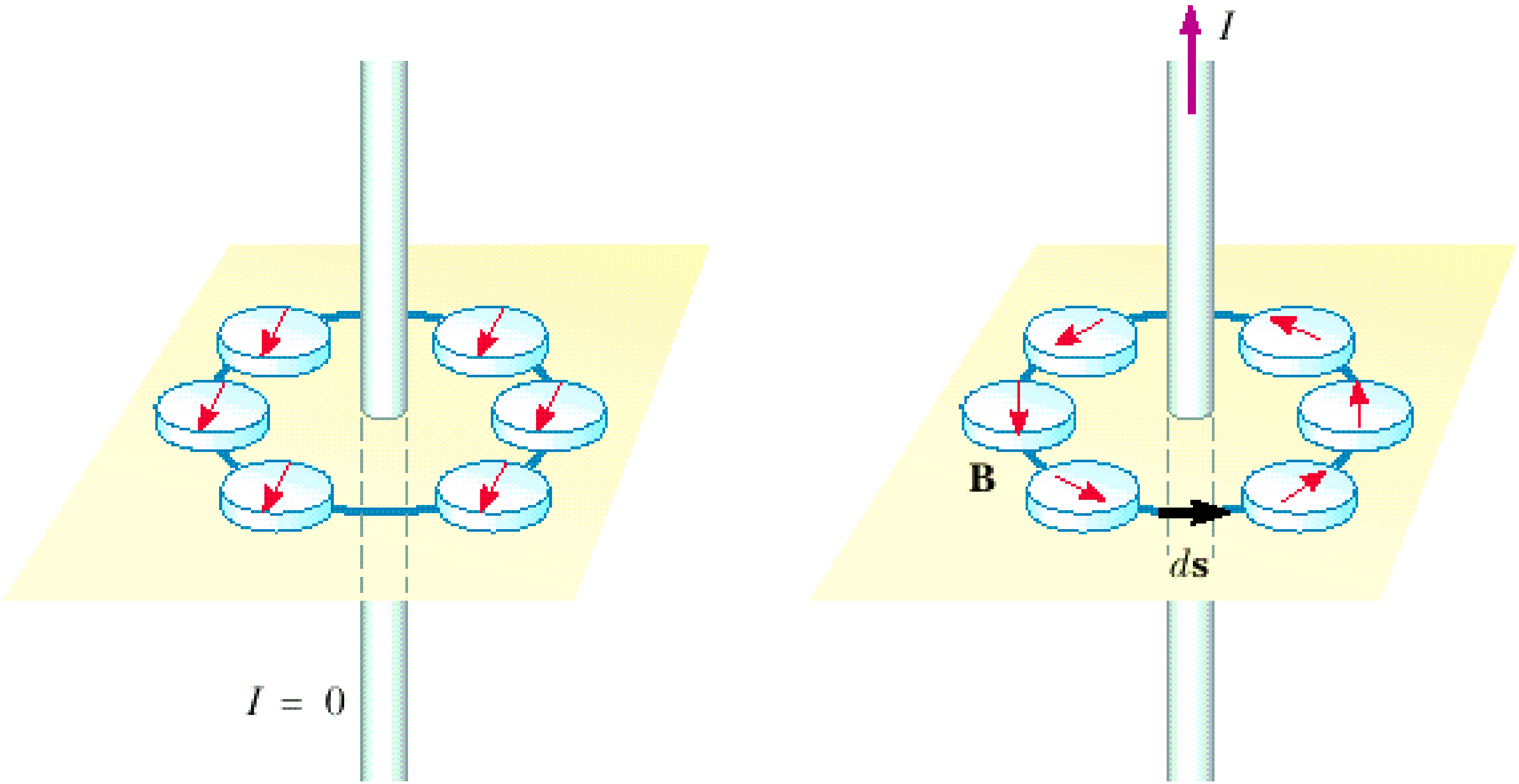
Corrientes mismo sentido: Atracción

Corrientes distinto sentido:

Repulsión

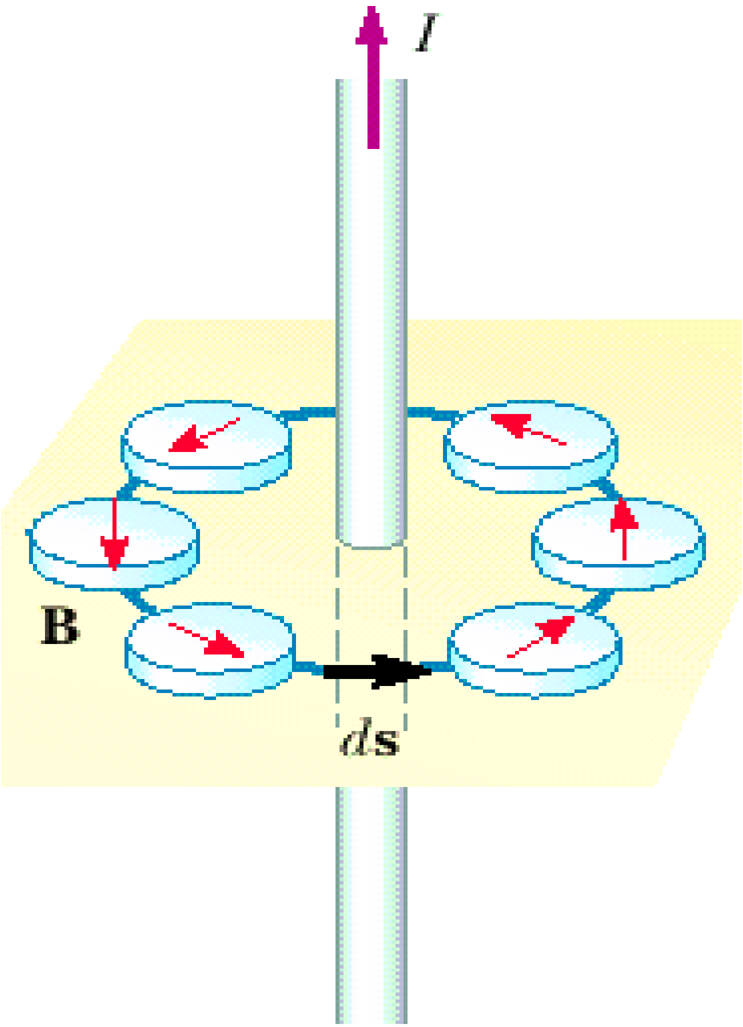
Ley de Ampere

- Experimento de Oersted (1820):



Ley de Ampere

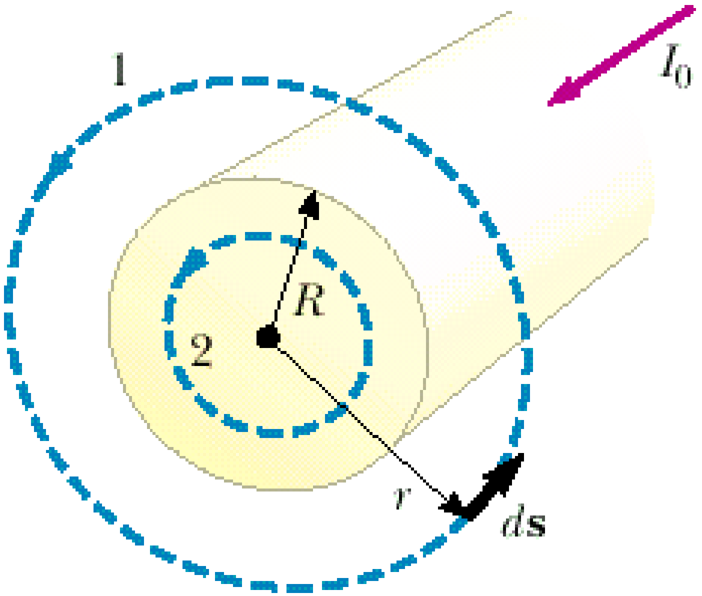
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B \oint ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(2\pi r) = \mu_0 I$$



La integral de linea de B.ds alrededor de cualquier trayectoria cerrada es $\mu_0 I$ donde I es la corriente encerrada por la trayectoria.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

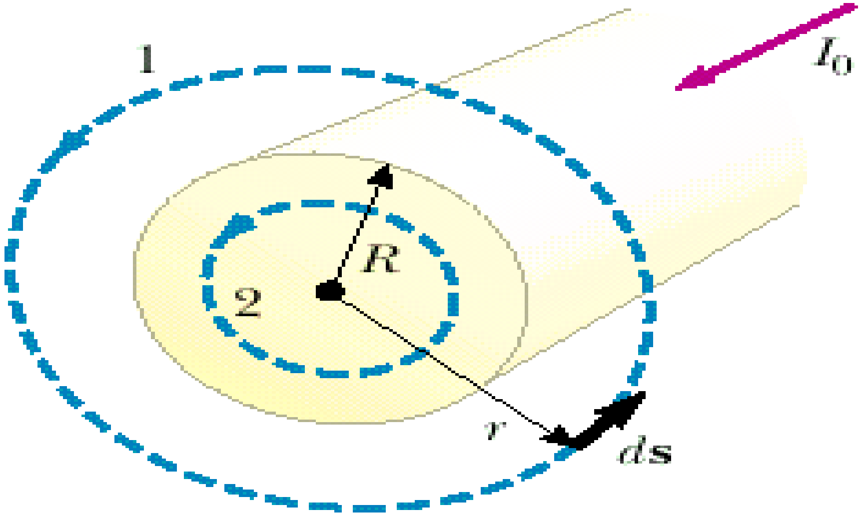
Ley de Ampere



$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B \oint ds = B(2\pi r) = \mu_0 I_0$$

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \qquad (\text{for } r \geq R)$$

Ley de Ampere



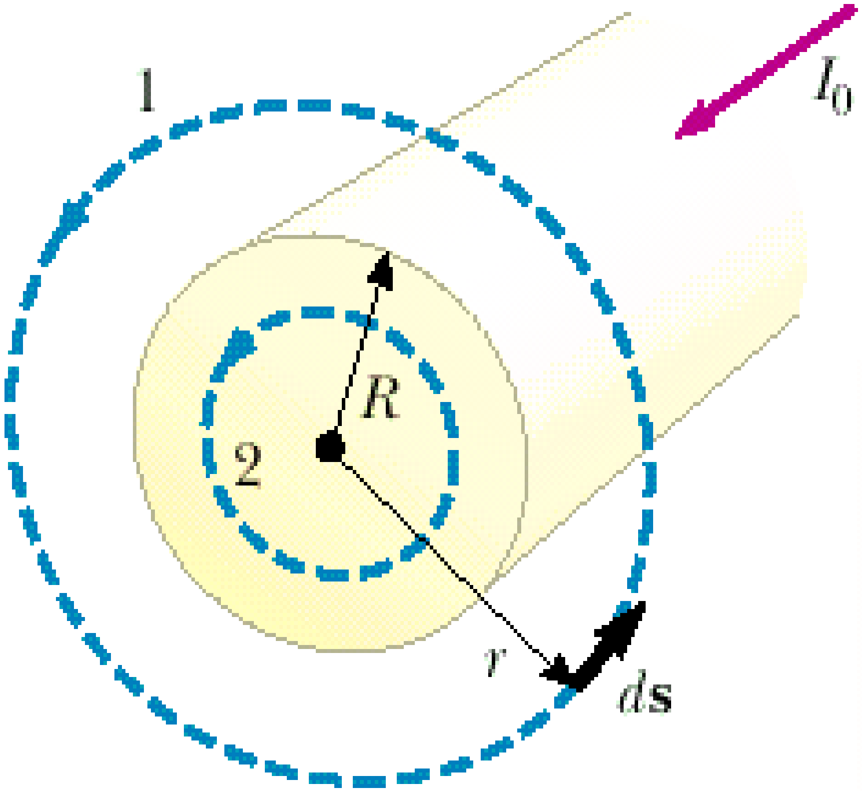
$$\frac{I}{I_0} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

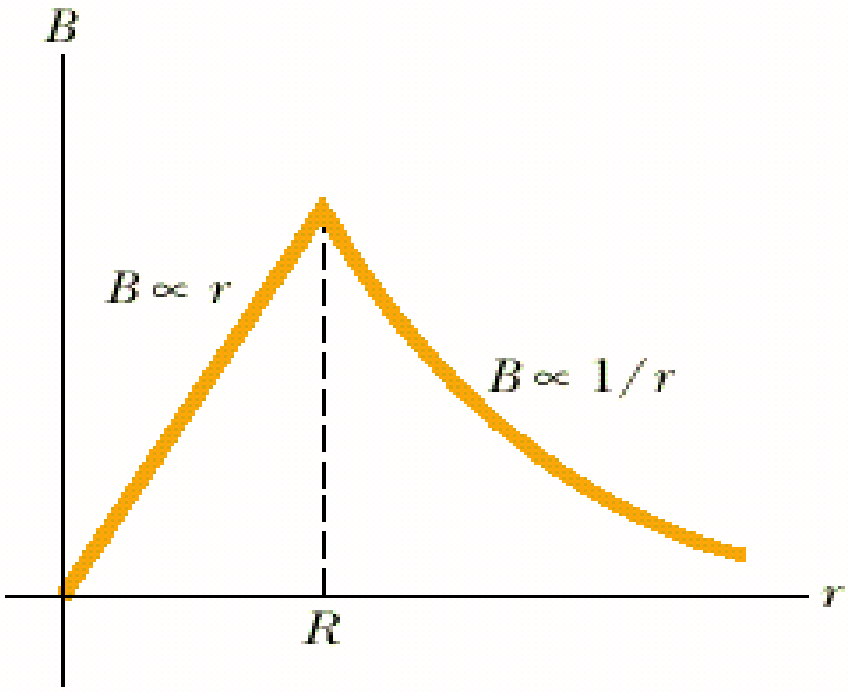
$$I = \frac{r^2}{R^2} I_0$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B(2\pi r) = \mu_0 I = \mu_0 \left(\frac{r^2}{R^2} I_0 \right)$$

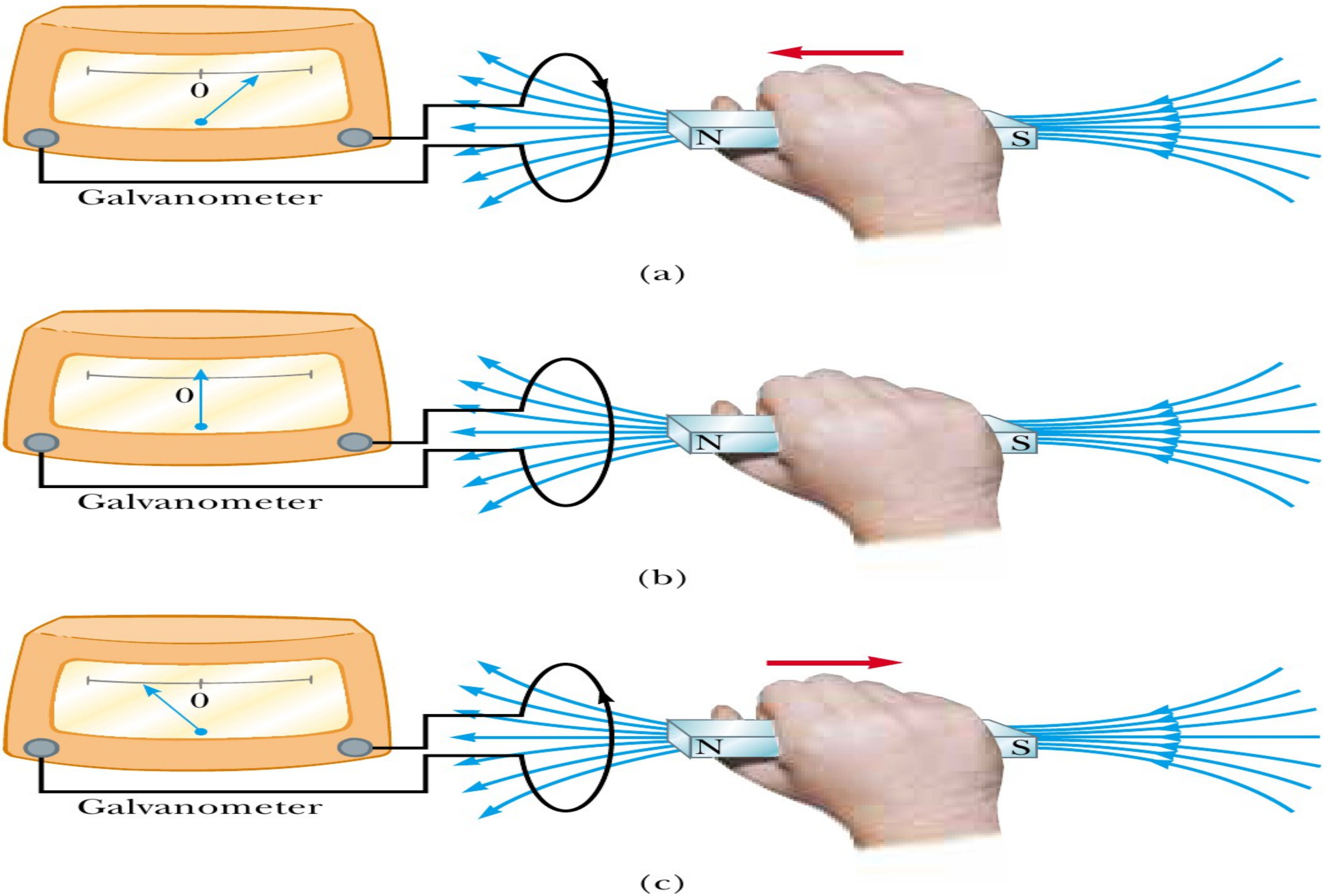
$$B = \left(\frac{\mu_0 I_0}{2\pi R^2} \right) r \qquad (\text{for } r < R)$$

Ley de Ampere

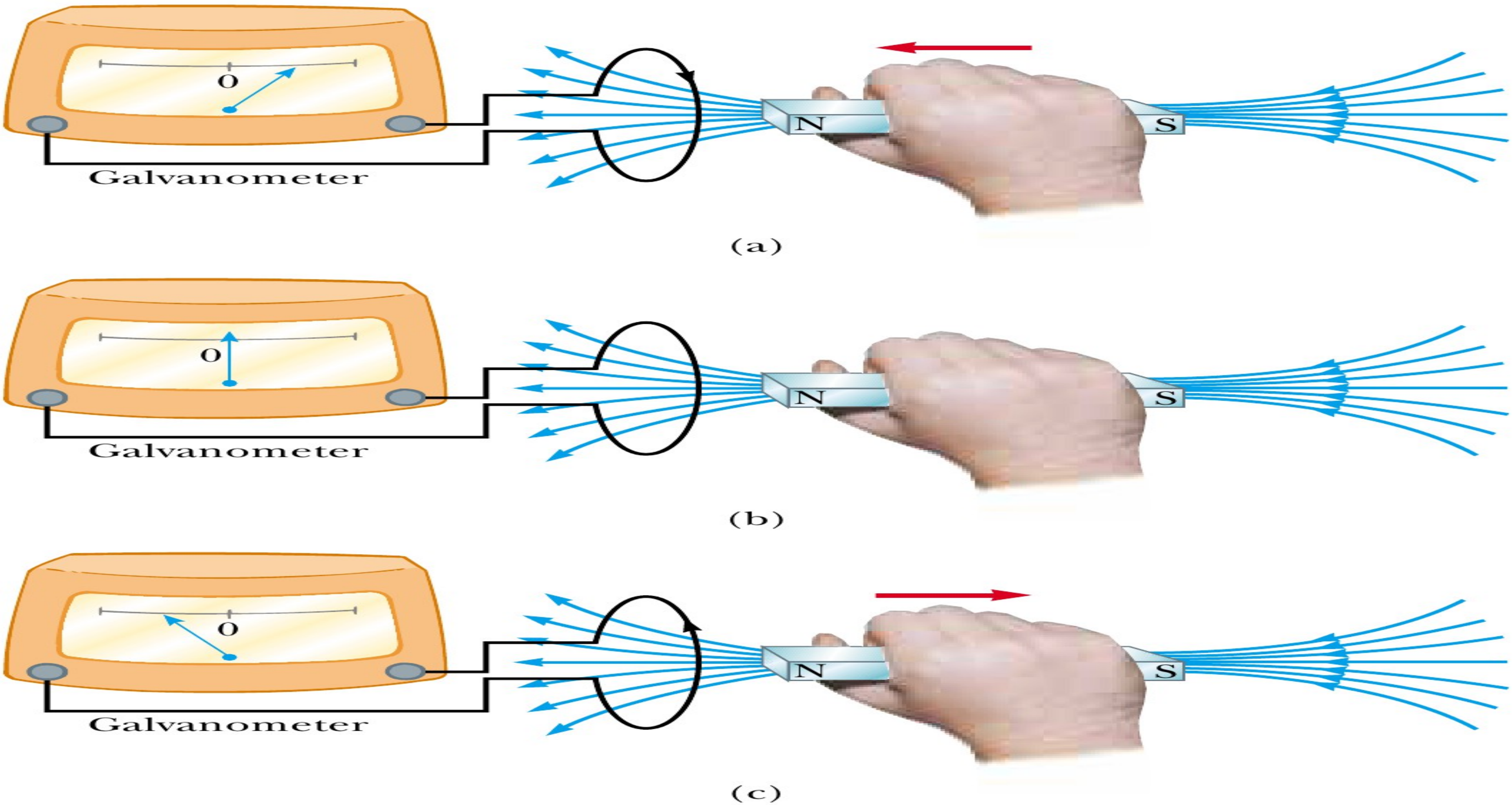




Ley de inducción de Faraday



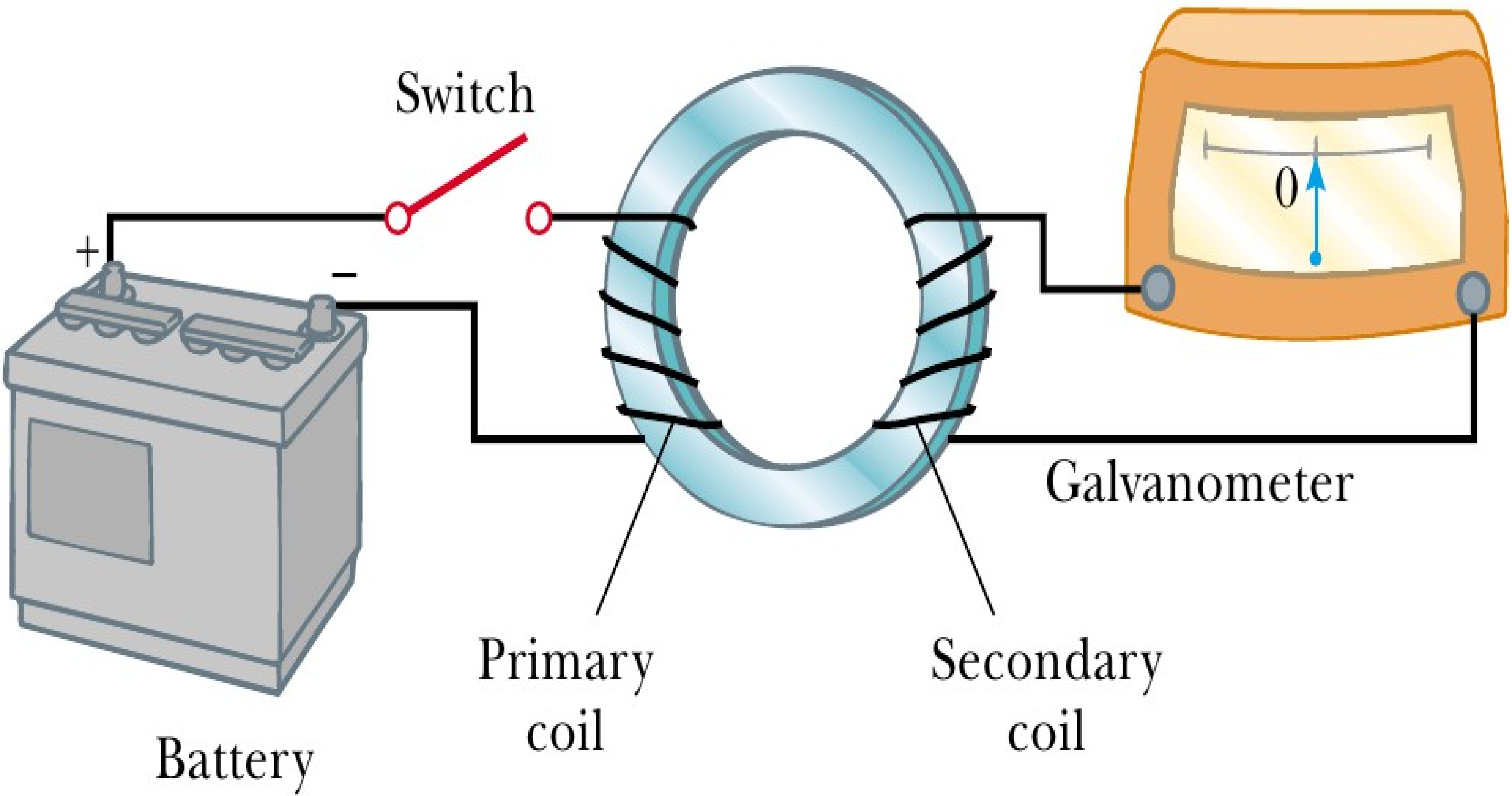
Ley de inducción de Faraday



- Se establece una corriente en un circuito, siempre que haya movimiento relativo entre el imán y la espira.

Ley de inducción de Faraday

- Experimento de Faraday:



Ley de inducción de Faraday

- Una fem inducida se produce en el circuito secundario mediante un campo magnético variable.
- La fem inducida en un circuito es direcatmente proporcional a la tasa de cambio en el tiempo del flujo magnético a través del circuito.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

- Donde el flujo magnético está dado por:

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

Ley de inducción de Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

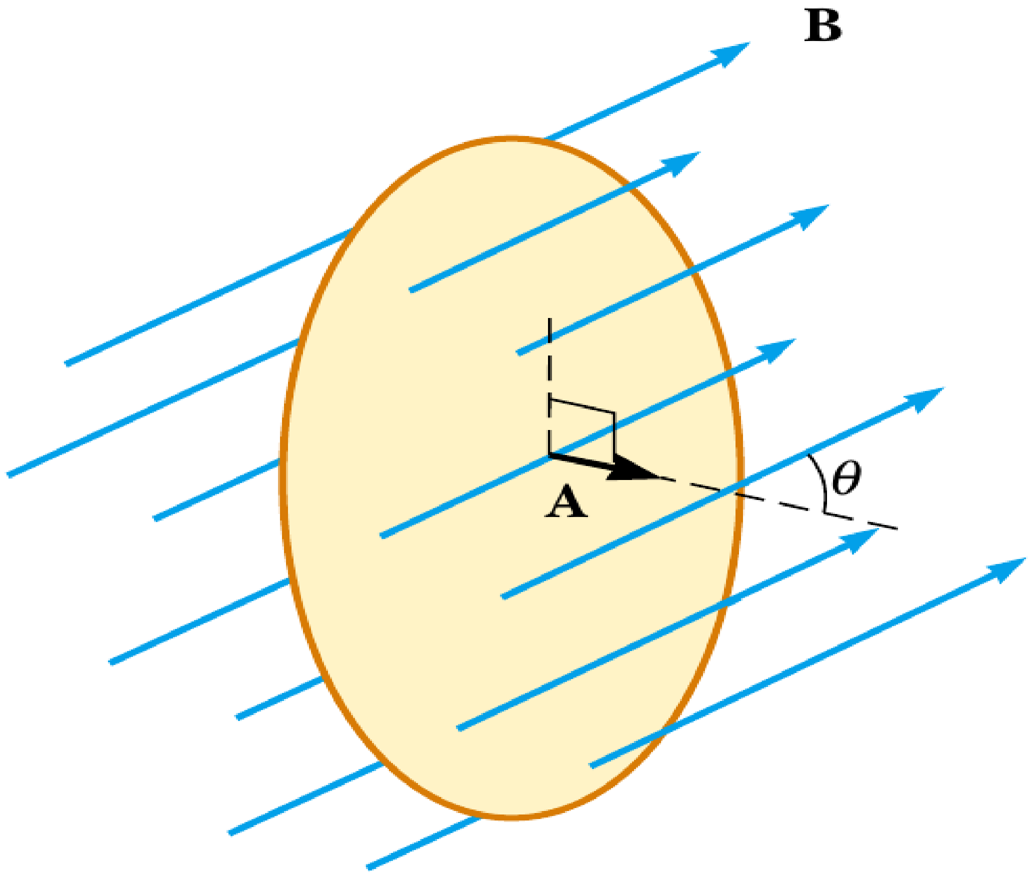
- Si el sistema es una bobina de N espiras, la fem total inducida es:

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$$

- El signo menos se explica a través de la Ley de Lenz.

Ley de inducción de Faraday

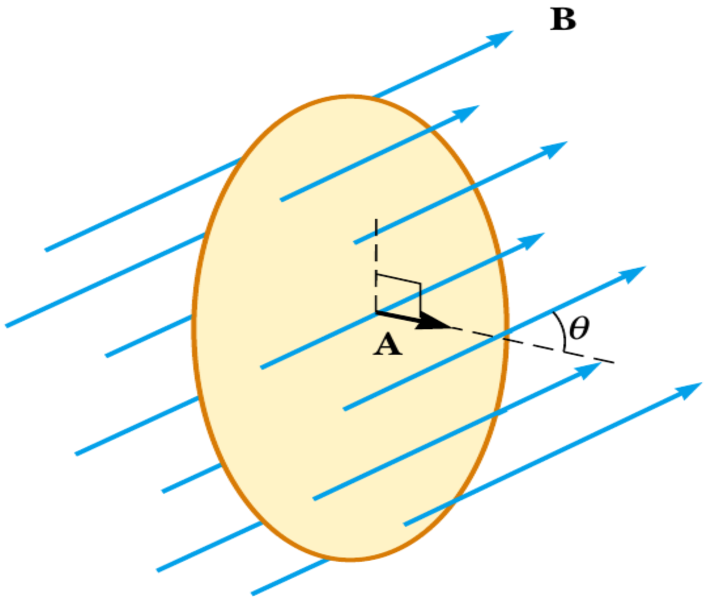
- Supongamos un campo magnético constante, con una inclinación sobre una área A:



- El flujo magnético está dado por:

$$BA \cos \theta$$

Ley de inducción de Faraday

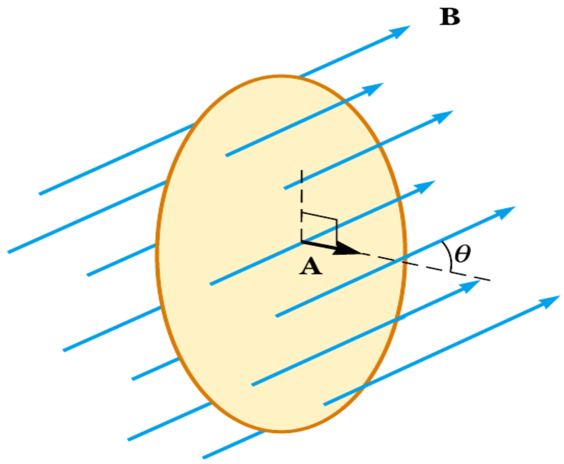


$$BA\cos\theta$$

- Podemos entonces escribir la fem inducida como:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}(BA\cos\theta)$$

Ley de inducción de Faraday



$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\left(BA\cos\theta\right)$$

- Se puede entonces inducir una fem:
  - Variando la magnitud de B en el tiempo.
  - Variando el área del circuito en el tiempo
  - Variando el ángulo (theta) en el tiempo.
  - Y naturalmente, cualquier combinación de las anteriores.

Ley de inducción de Faraday

Ejemplo: Un lazo plano de alambre de área A se coloca en una región donde el campo magnético es perpendicular al plano. La magnitud de B varía en el tiempo de acuerdo a:

$$B = B_{\max} e^{-at}$$

donde “a” es una constante. Para t=0 el campo vale B_{max}, y para t>0 disminuye exponencialmente.

Ley de inducción de Faraday

$$B = B_{\max} e^{-at}$$

Dado que B es perpendicular el plano del lazo, el flujo magnético está dado por:

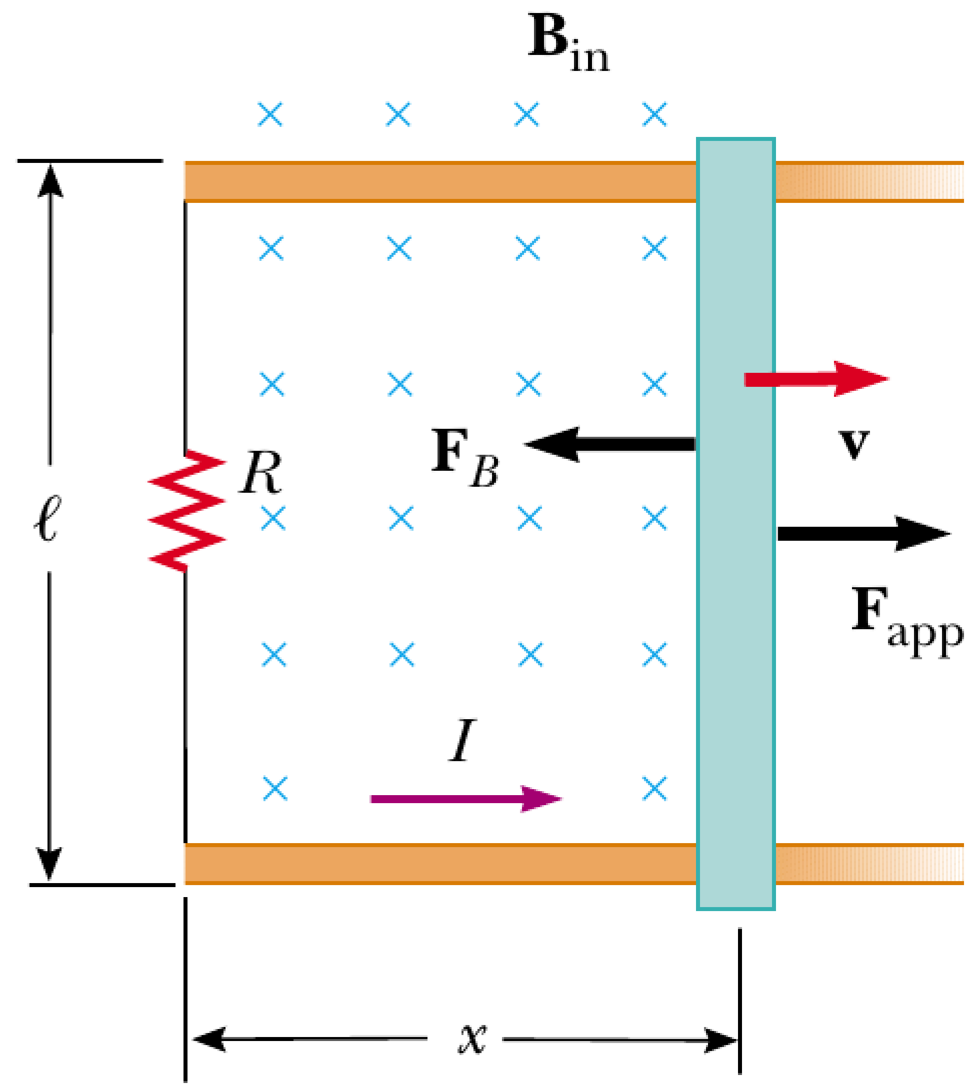
$$\Phi_B = BA\cos 0 = AB_{\max} e^{-at}$$

y la fem inducida es entonces:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -AB_{\max}\frac{d}{dt}e^{-at} = aAB_{\max}e^{-at}$$

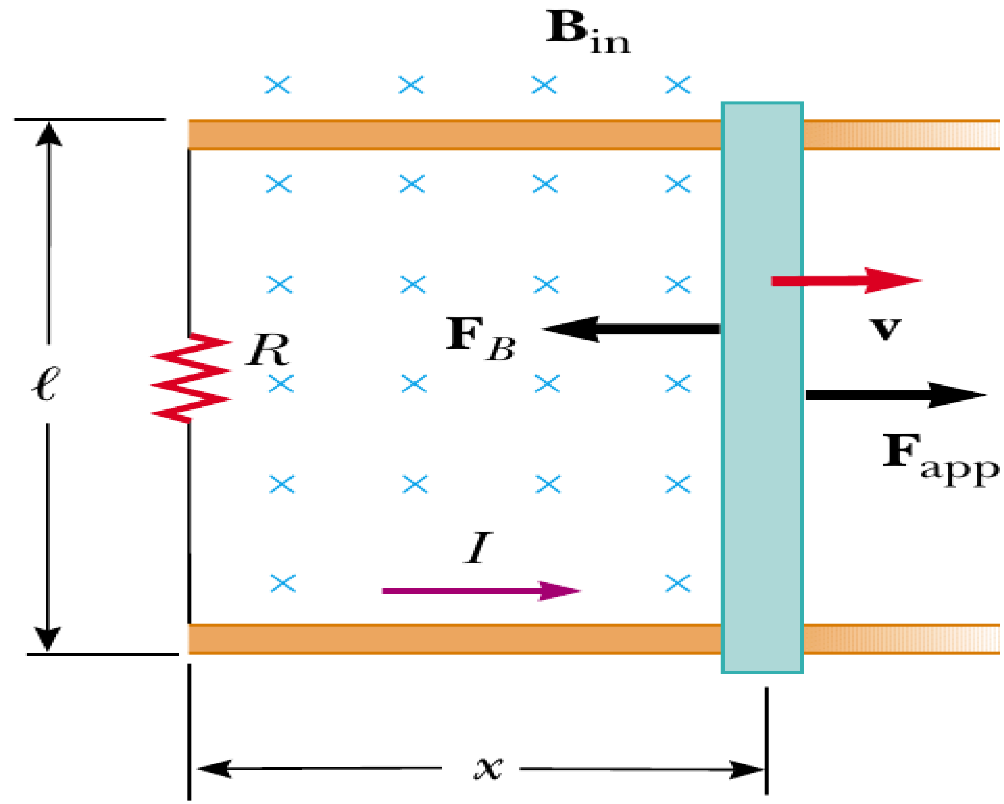
Ley de inducción de Faraday

Consideremos una barra conductora de largo “l”, que se desliza a lo largo de 2 rieles paralelos y fijos. Por simplicidad suponemos que sólo hay resistencia R en el lado izquierdo. El campo magnético B es constante y perpendicular al plano del circuito.



Ley de inducción de Faraday

Cuando la barra se mueve hacia la derecha con velocidad “v”, el área del circuito en cualquier instante de tiempo es “lx”. Y el flujo magnético está dado por:

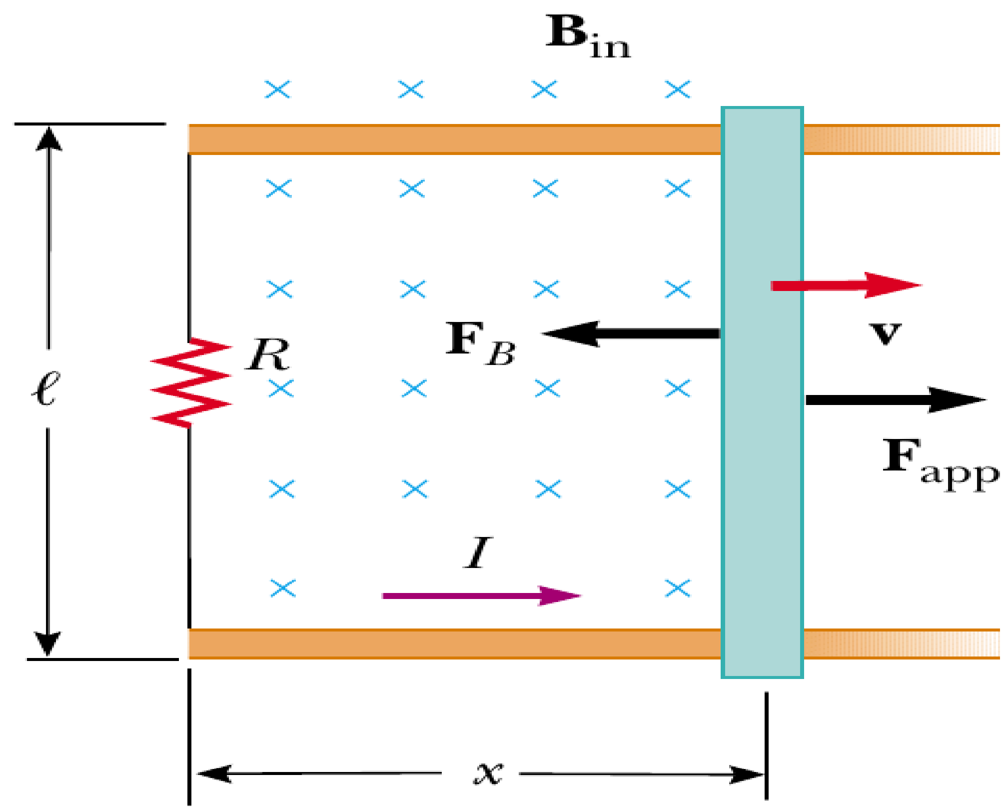


$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\ell x) = -B\ell\frac{dx}{dt}$$

Pero dx/dt es v.

$$\boxed{\mathcal{E} = -B\ell v}$$

Ley de inducción de Faraday



Si la resistencia del circuito es R,

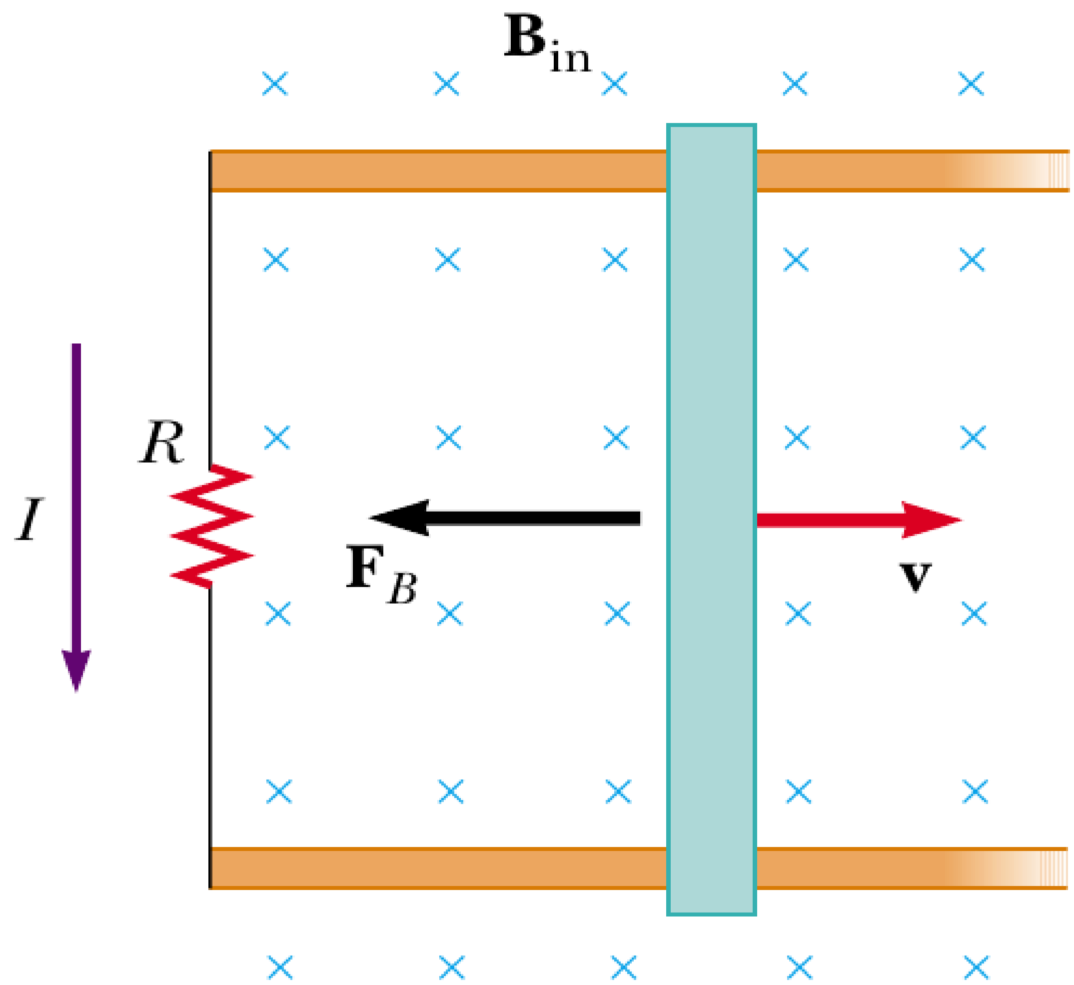
entonces la magnitud de la

corriente inducida es:

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{B\ell v}{R}$$

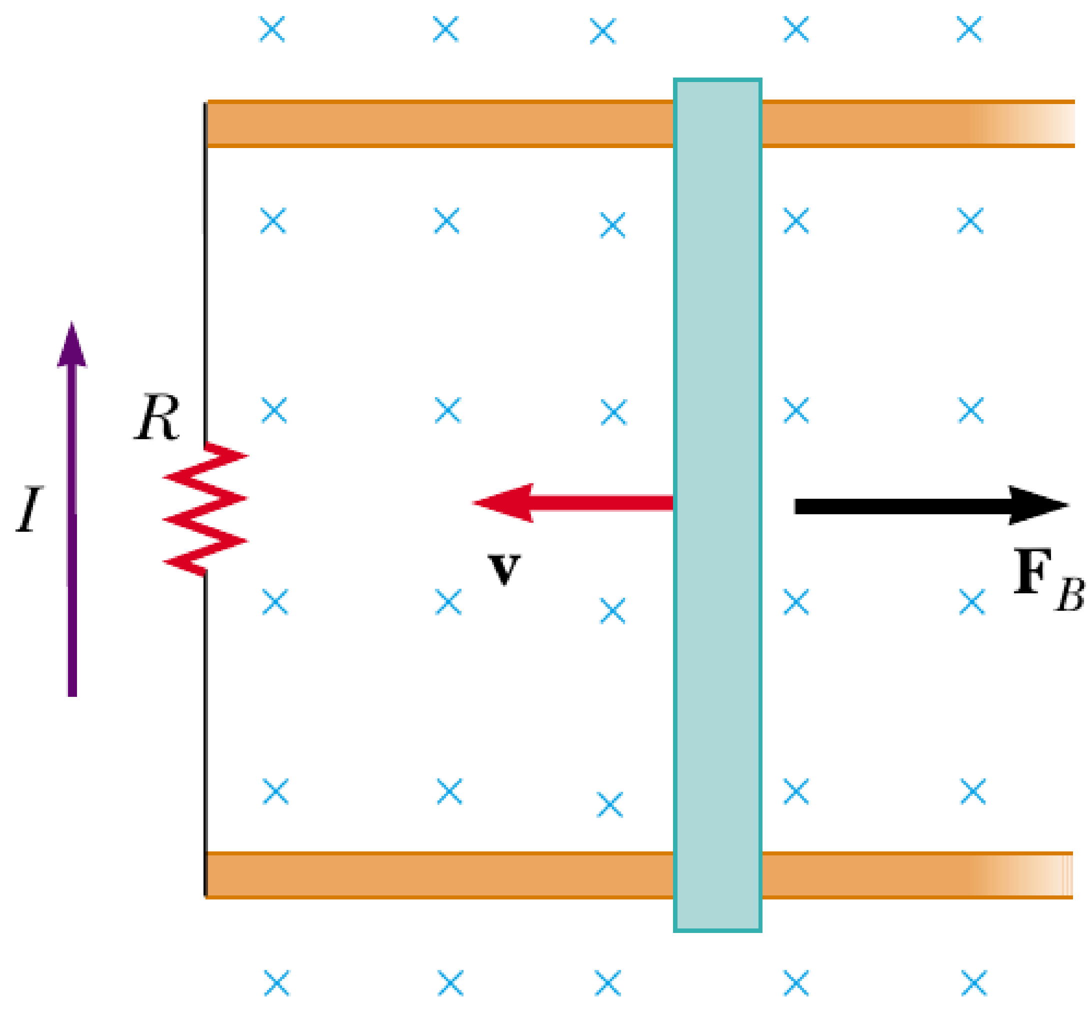
Ley de Lenz

La polaridad de una fem inducida es tal que tiende a producir una corriente que creará un flujo magnético que se opone al cambio de flujo magnético a través del lazo.

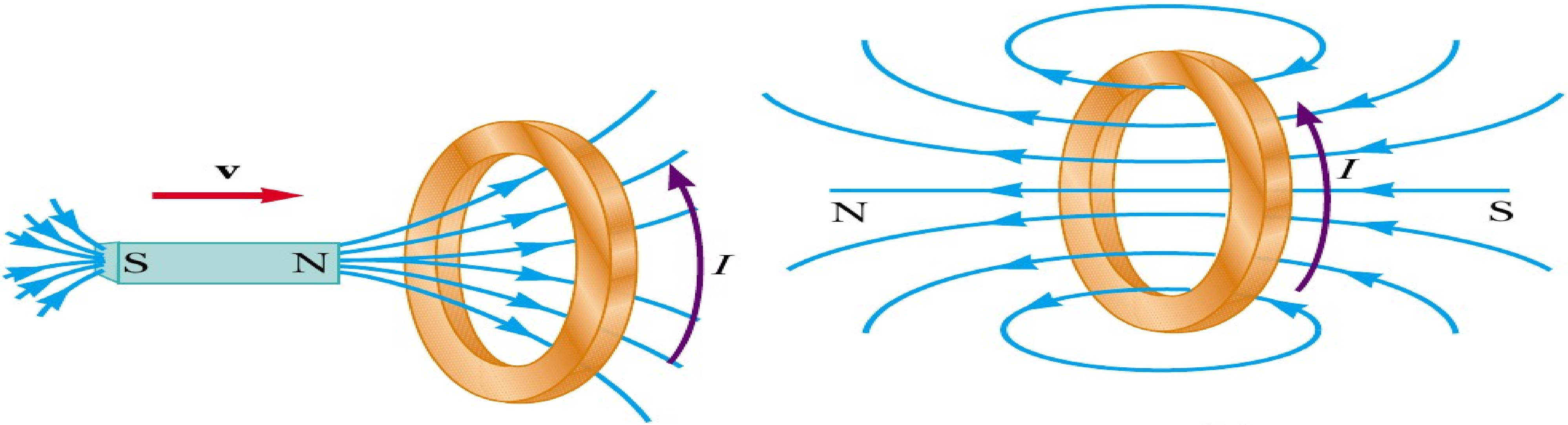


Ley de Lenz

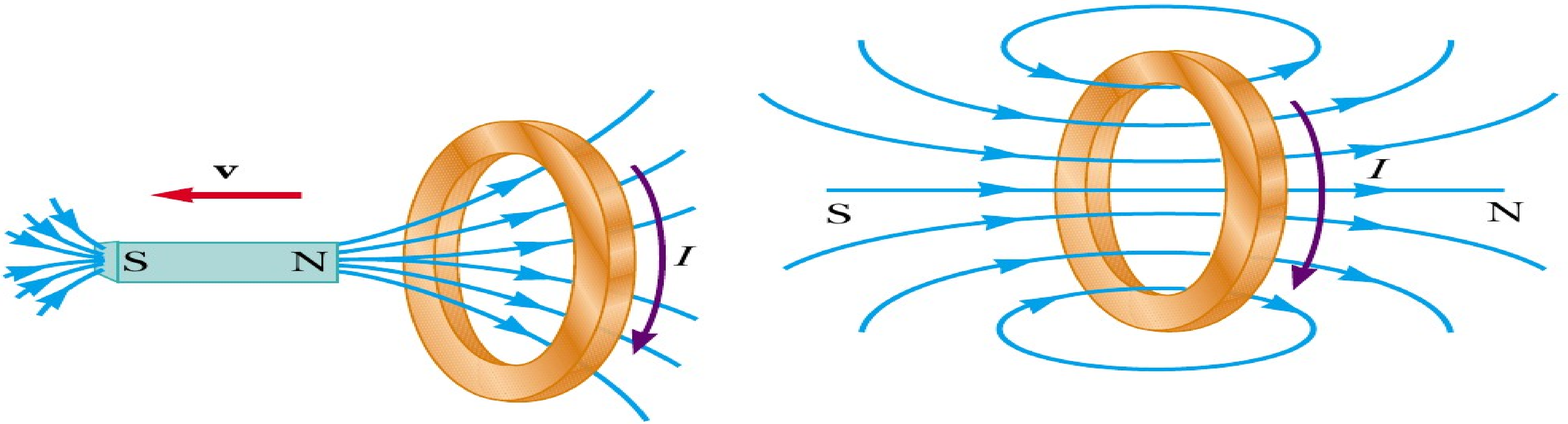
La polaridad de una fem inducida es tal que tiende a producir una corriente que creará un flujo magnético que se opone al cambio de flujo magnético a través del lazo.



Ley de Lenz

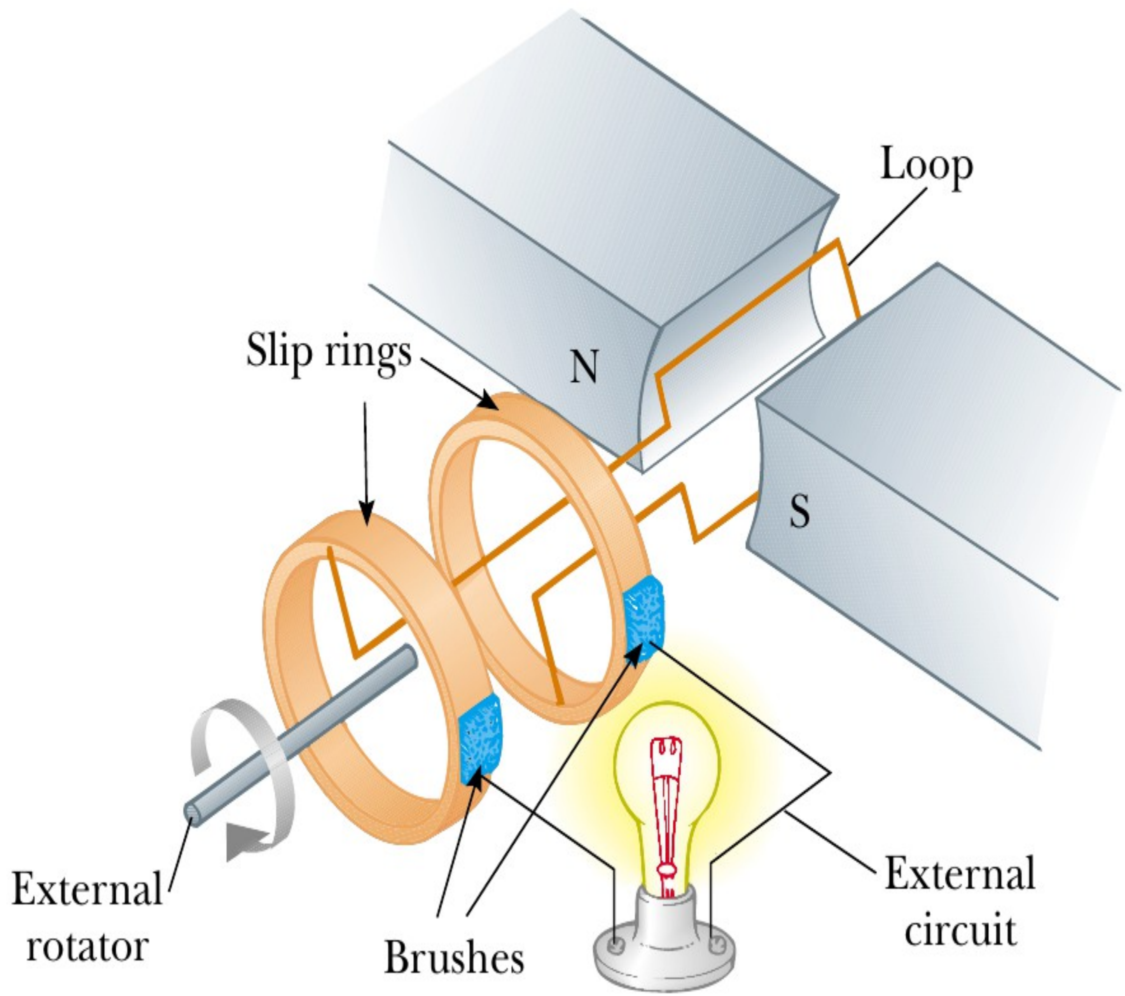


(a) (b)

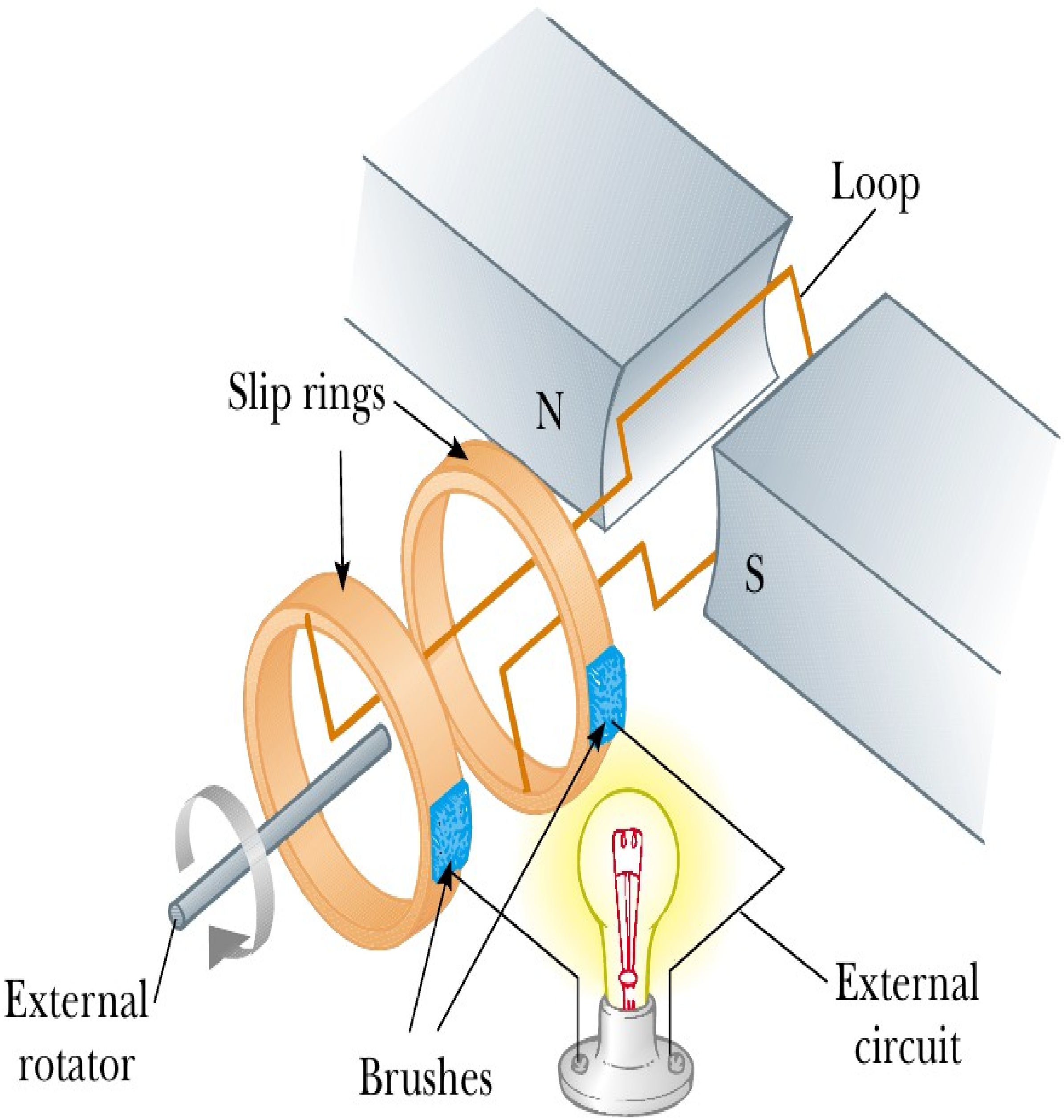


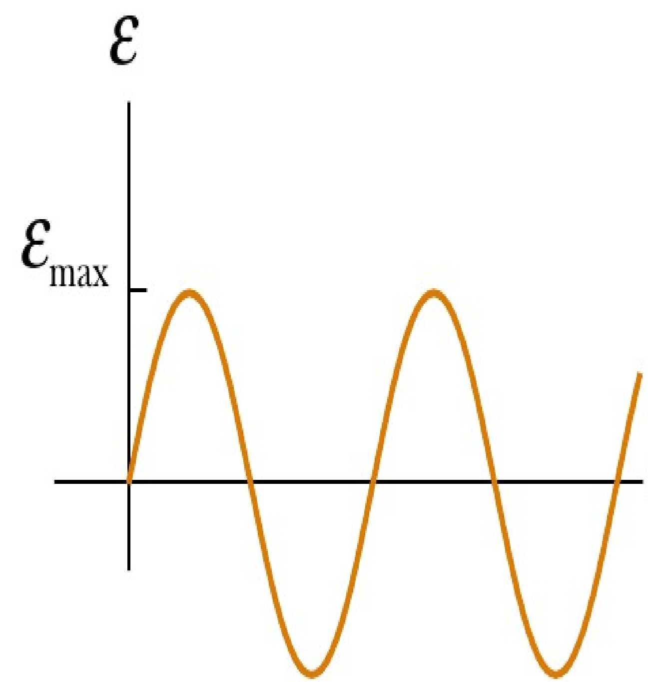
Aplicacion: Generador de corriente alterna

Un lazo de alambre rota por “medios externos” en un campo magnético. Cuando el lazo gira, el flujo magnético a través de él cambia en el tiempo, induciendo una fem y una corriente en un circuito externo.



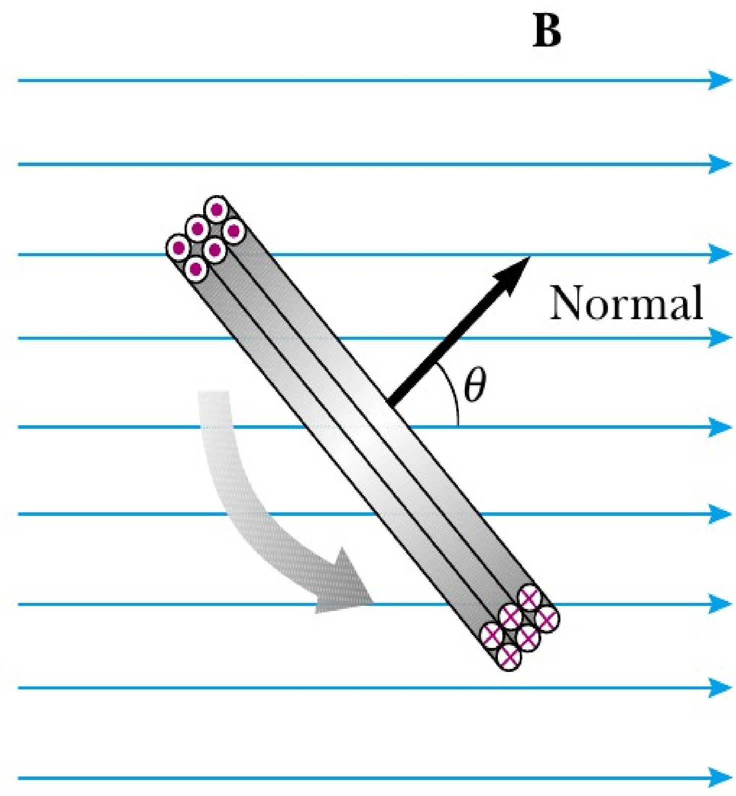
Aplicacion: Generador de corriente alterna





Aplicacion: Generador de corriente alterna

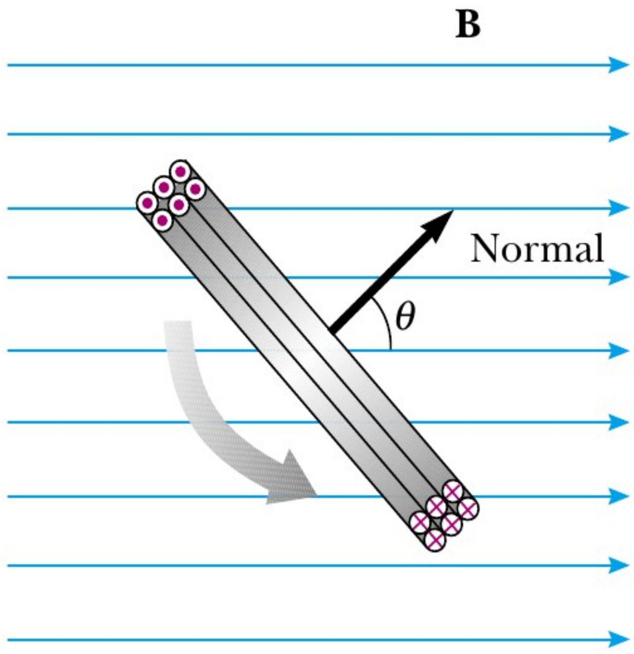
Supongamos que el lazo tiene "N" vueltas, todas de igual área "A", y gira con velocidad angular "w" constante. Si "theta" es el ángulo entre el campo magnético y la normal al plano, el flujo es entonces:



$$\Phi_B = BA\cos\theta = BA\cos\omega t$$

Aplicacion: Generador de corriente alterna

$$\Phi_B = BA\cos\theta = BA\cos\omega t$$



donde se ha usado que:

$$\theta = \omega t$$

La fem inducida en la bobina es entonces:

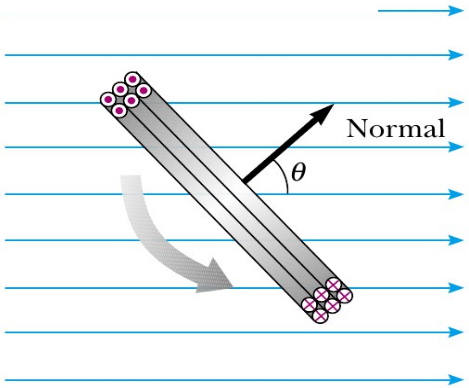
$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -NAB\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = NAB\omega\sin\omega t$$

Aplicacion: Generador de corriente alterna

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -NAB\frac{d}{dt}(\cos \omega t) = NAB\omega \sin \omega t$$

Con valor máximo:

$$\mathcal{E}_{\max} = NAB\omega$$



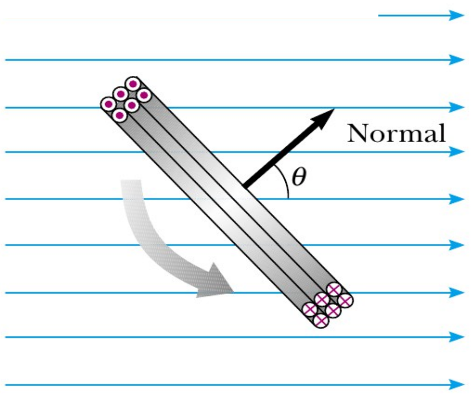
Que ocurre cuando el ángulo “theta” vale 90 y 270, es decir, cuando el campo magnético está en el plano de la bobina, y la tasa de cambio de flujo es máxima.

Aplicacion: Generador de corriente alterna

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -NAB\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = NAB\omega\sin\omega t$$

Con valor máximo:

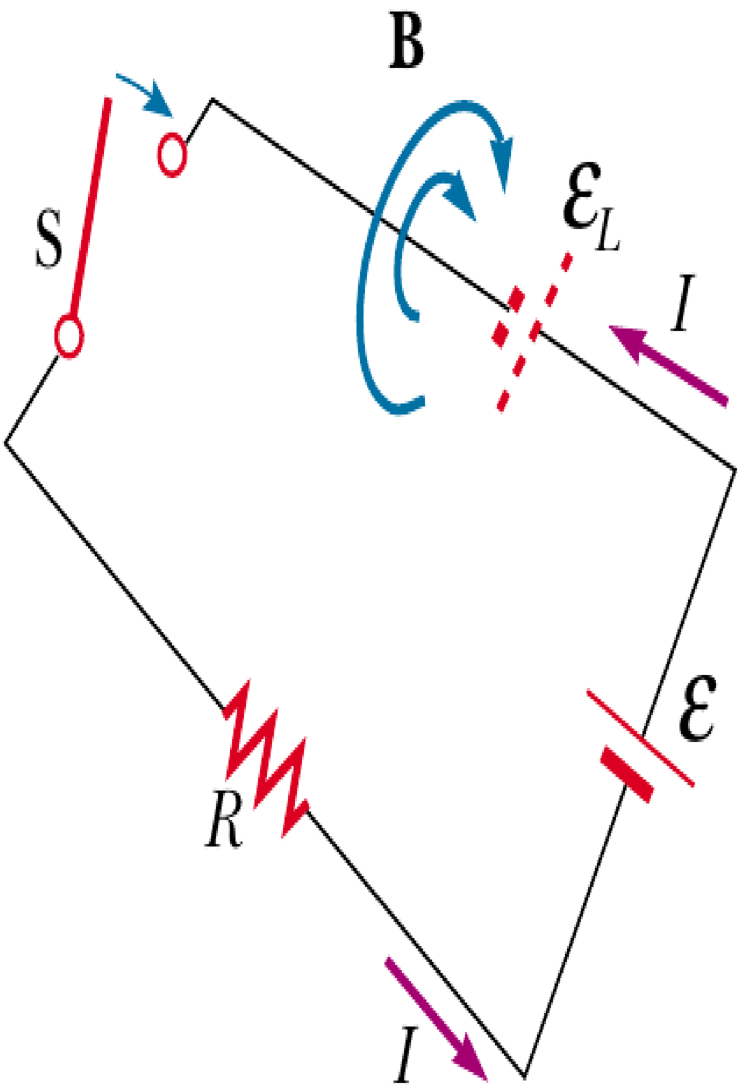
$$\mathcal{E}_{\max} = NAB\omega$$



Cuando el ángulo “theta” vale 0 y 180, es decir, cuando el campo magnético es perpendicular al plano de la bobina, y la tasa de cambio de flujo es nula, la fem inducida es cero.

Inductancia

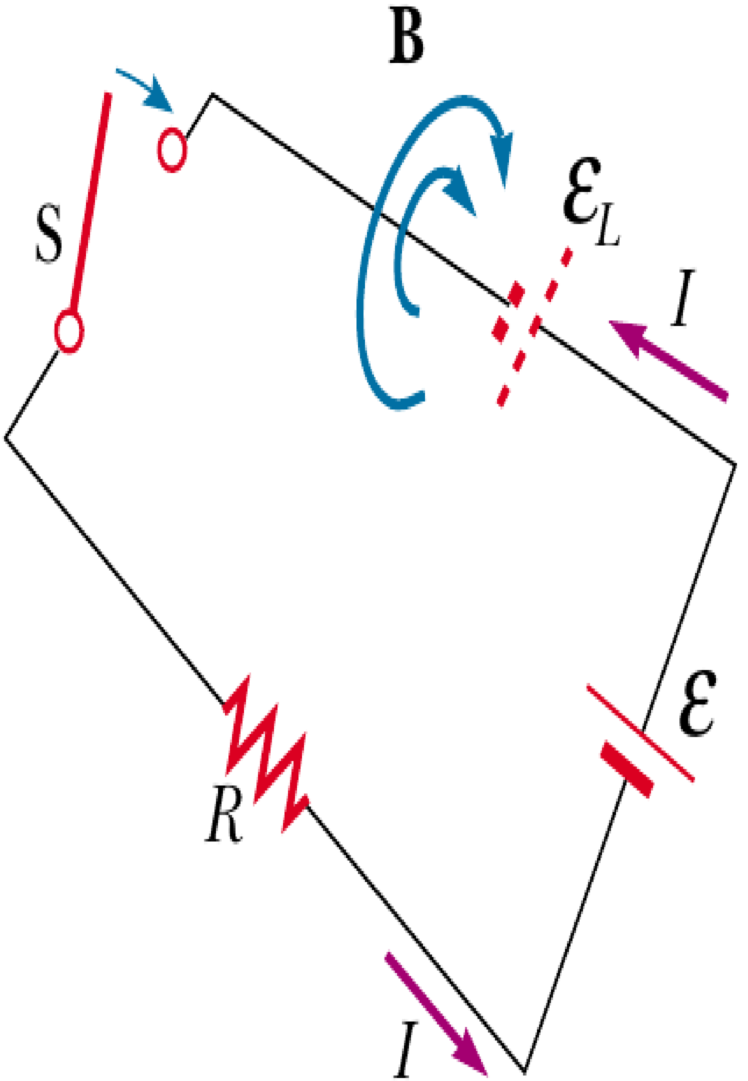
- Consideremos un circuito que consta de un interruptor, un resistor y una fuente de fem:



Al cerrar el interruptor, la corriente no alcanza instantáneamente el valor E/R. La ley de inducción (Faraday) evita que esto ocurra. A medida que la corriente aumenta, también lo hace el flujo magnético (B). Este flujo induce en el circuito una fem (E_L)que se opone al cambio de flujo magnético. Por la ley de Lenz, esta corriente es de sentido contrario a la corriente original.

Inductancia

- Consideremos un circuito que consta de un interruptor, un resistor y una fuente de fem:

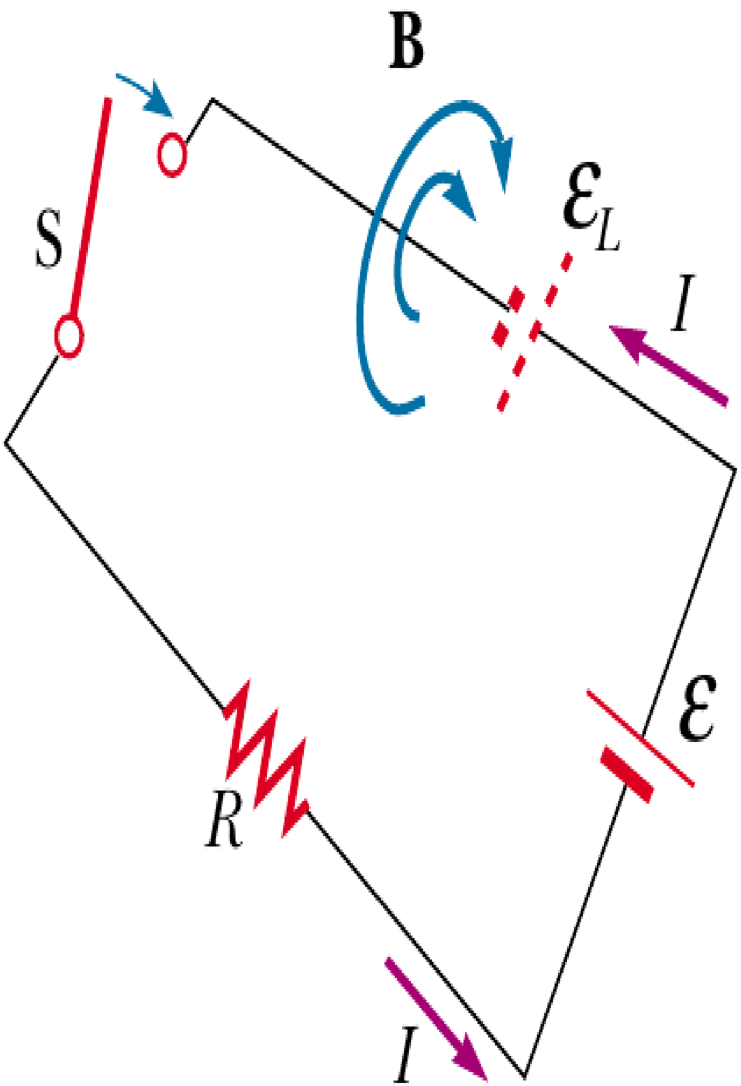


La fem E_L establecida en este caso, recibe el nombre de “fem autoinducida”. Para obtener una descripción cuantitativa, recordamos que la fem inducida es igual a la tasa de cambio en el tiempo, con signo menos, del flujo magnético. Así entonces para una bobina de N vueltas:

$$\mathcal{E}_L = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

Inductancia

- Consideremos un circuito que consta de un interruptor, un resistor y una fuente de fem:



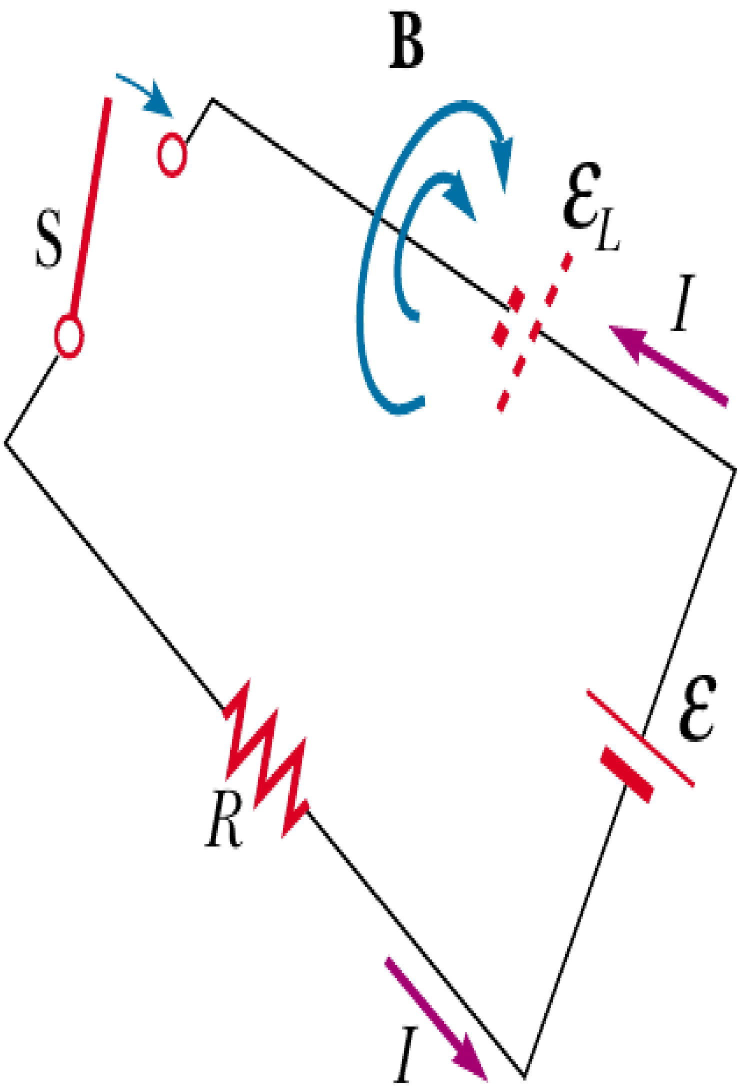
$$\mathcal{E}_L = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

Donde L es una constante de proporcionalidad llamada "inductancia" de la bobina, que depende entre otras cosas de la geometría de la bobina.

$$L = \frac{N\Phi_B}{I}$$

Inductancia

- Consideremos un circuito que consta de un interruptor, un resistor y una fuente de fem:



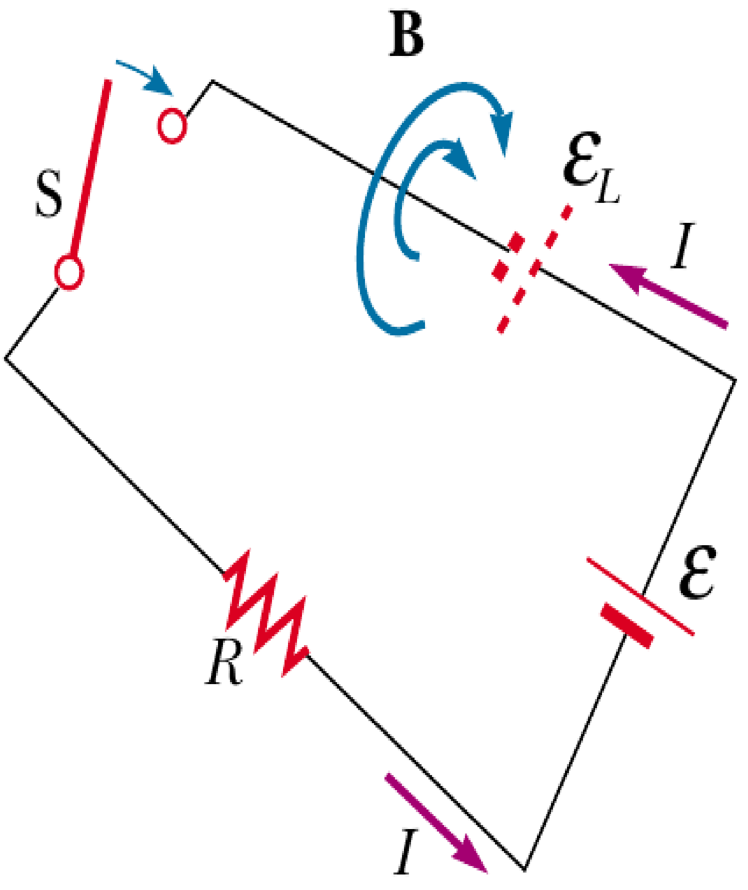
$$\mathcal{E}_L = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

A partir de esta ecuación, podemos también escribir L como:

$$L = -\frac{\mathcal{E}_L}{dI/dt}$$

Inductancia

- Consideremos un circuito que consta de un interruptor, un resistor y una fuente de fem:



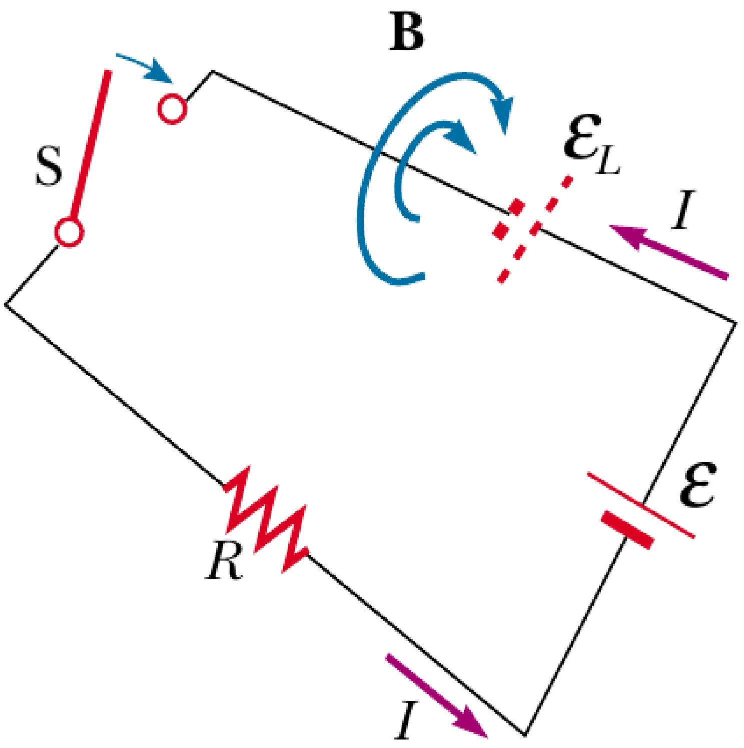
$$\mathcal{E}_L = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

$$L = -\frac{\mathcal{E}_L}{dI/dt}$$

Esta es la definición de la inductancia de cualquier bobina, independiente de su forma, tamaño u otras características.

Inductancia

- Consideremos un circuito que consta de un interruptor, un resistor y una fuente de fem:



$$\mathcal{E}_L = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

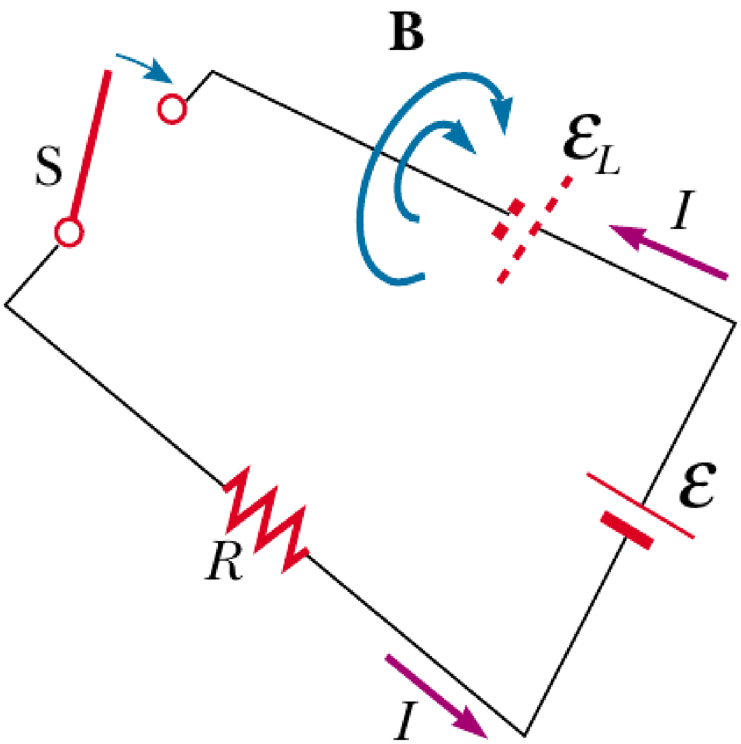
$$L = -\frac{\mathcal{E}_L}{dI/dt}$$

Así como la resistencia R es una medida de la oposición al paso de la corriente, la inductancia es una medida de la oposición al cambio (en el tiempo) de la corriente.

$$R \equiv \frac{\ell}{\sigma A} \equiv \frac{\Delta V}{I}$$

Inductancia

- Consideremos un circuito que consta de un interruptor, un resistor y una fuente de fem:



$$\mathcal{E}_L = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

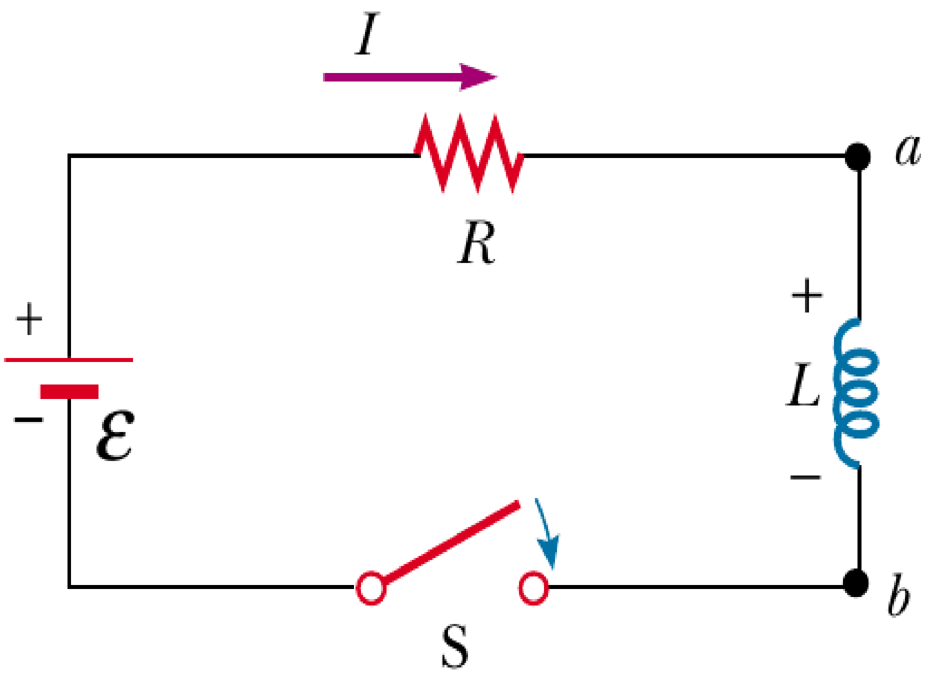
$$L = -\frac{\mathcal{E}_L}{dI/dt}$$

En el sistema SI, la unidad de inductancia es el henry (H), que es igual a 1 (Volt-Segundo)/Ampere.

$$1\,\mathrm{H} = 1\,\frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{A}}$$

Inductancia

- Consideremos un circuito que consta de un interruptor, un resistor, una fuente de fem y una bobina:

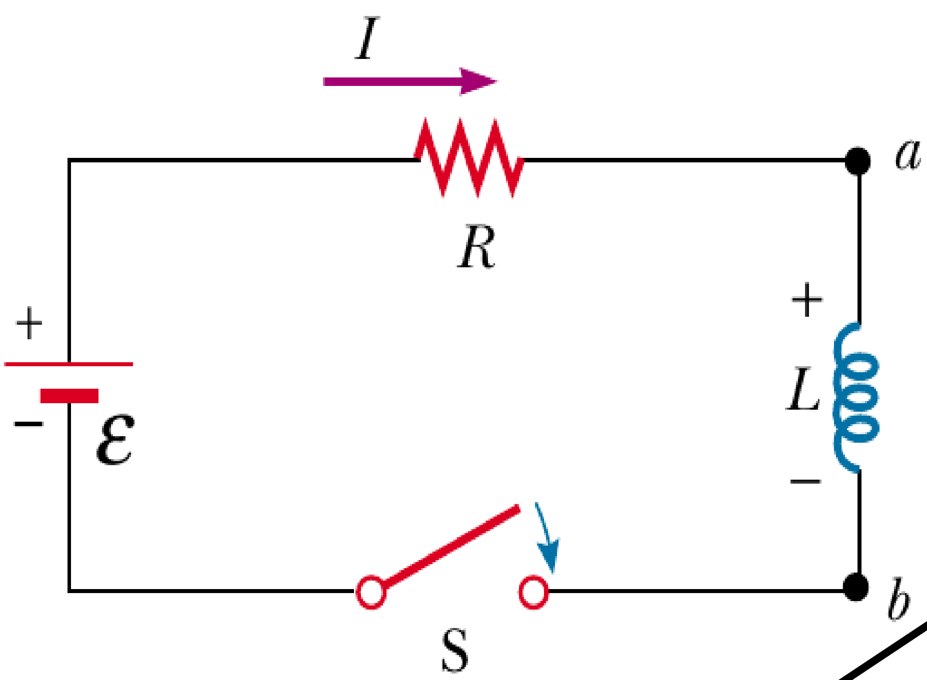


Si el interruptor se cierra en t=0, la corriente empieza a crecer, y el inductor produce una fem inversa, que se opone al incremento de la cooriente. En otras palabras, el inductor actúa similar a una batería cuya polaridad es opuesta a la de la batería real en el circuito. La fem inversa es:

$$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}$$

Inductancia

- Consideremos un circuito que consta de un interruptor, un resistor, una fuente de fem y una bobina:



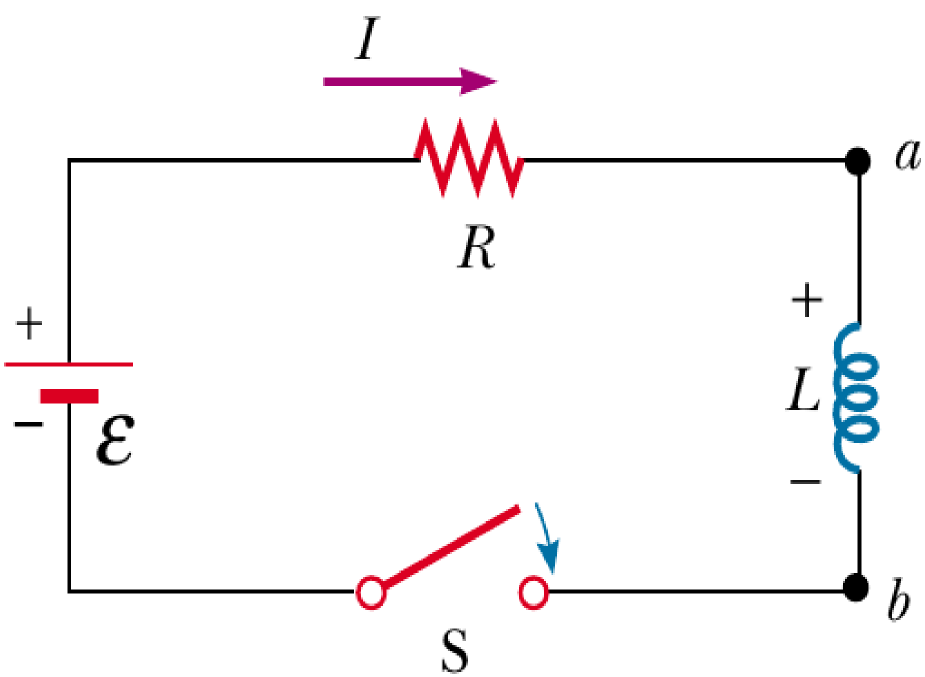
Puesto que la corriente está aumentando, dI/dt es positiva; y por lo tanto E_L es negativa. Aplicamos ahora la regla de Kirchhoff:

$$\sum_{\text{closed loop}} \Delta V = 0$$

$$\mathcal{E} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

Inductancia

- Consideremos un circuito que consta de un interruptor, un resistor, una fuente de fem y una bobina:



$$\varepsilon - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

haciendo el cambio de variables:

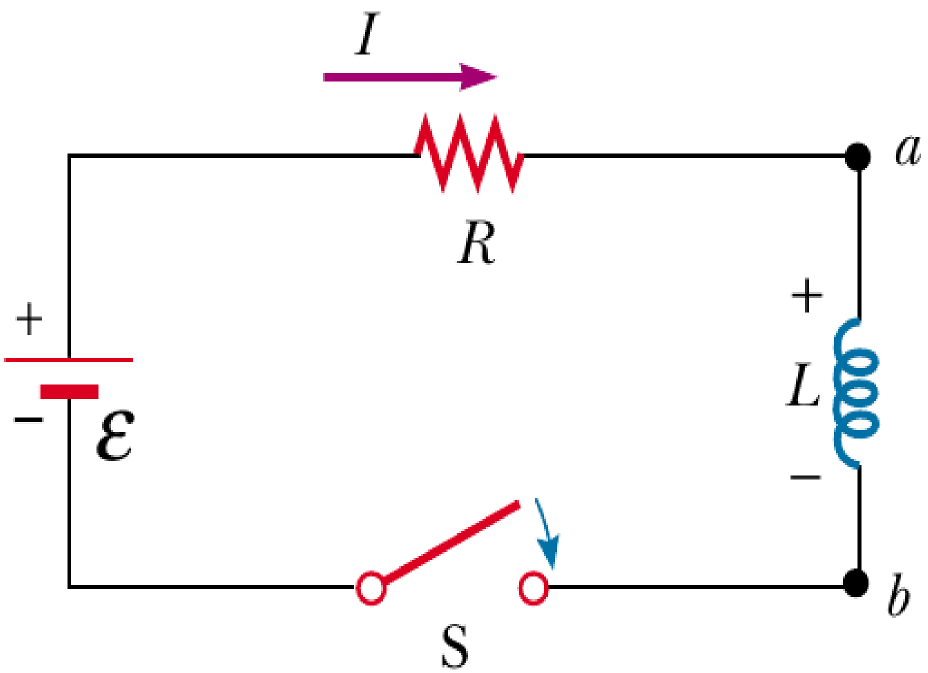
$$x = \frac{\varepsilon}{R} - I \qquad dx = -dI$$

podemos escribir:

$$x + \frac{L}{R}\frac{dx}{dt} = 0$$

Inductancia

- Consideremos un circuito que consta de un interruptor, un resistor, una fuente de fem y una bobina:



$$\mathcal{E} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

$$x = \frac{\mathcal{E}}{R} - I \quad dx = -dI$$

$$x + \frac{L}{R}\frac{dx}{dt} = 0$$

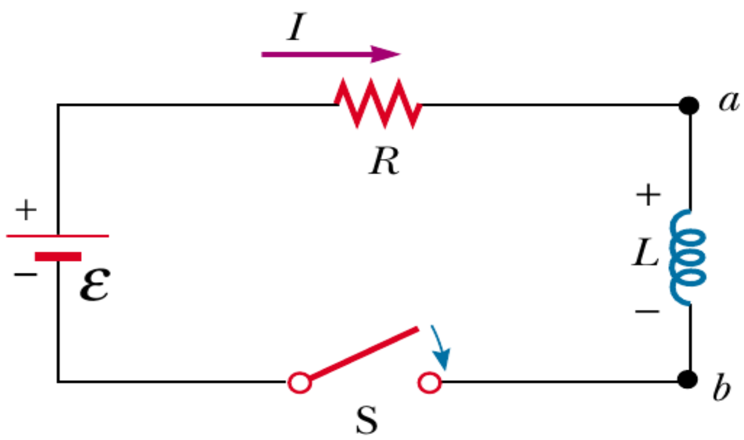
$$\frac{dx}{x} = -\frac{R}{L}dt$$

que integrada nos da:

$$\ln\frac{x}{x_0} = -\frac{R}{L}t$$

Inductancia

- Consideremos un circuito que consta de un interruptor, un resistor, una fuente de fem y una bobina:



$$\mathcal{E} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

$$dx = -dI$$

$$x + \frac{L}{R}\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{R}{L}\,dt$$

$$\ln\frac{x}{x_0} = -\frac{R}{L}\,t$$

que aplicando antilogaritmo nos da:

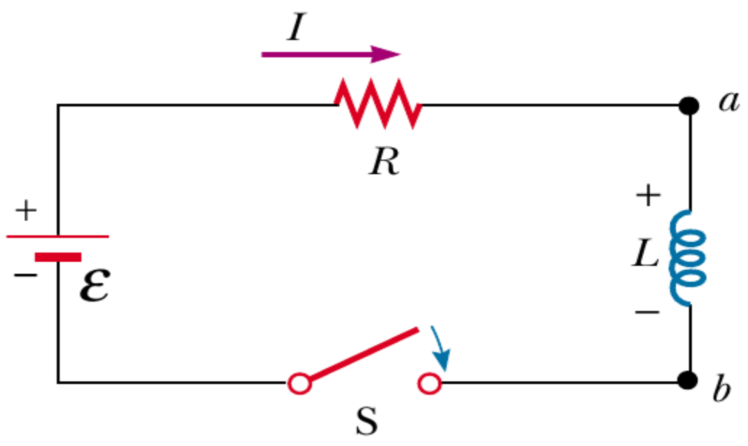
$$x = x_0 e^{-Rt/L}$$

puesto que en t=0, I=0: $x = \dfrac{\mathcal{E}}{R} - I$

$$x_0 = \mathcal{E}/R$$

Inductancia

- Consideremos un circuito que consta de un interruptor, un resistor, una fuente de fem y una bobina:



$$x = x_0 e^{-Rt/L}$$

$$x_0 = \mathcal{E}/R$$

$$\frac{\mathcal{E}}{R} - I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-Rt/L}$$

$$\mathcal{E} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

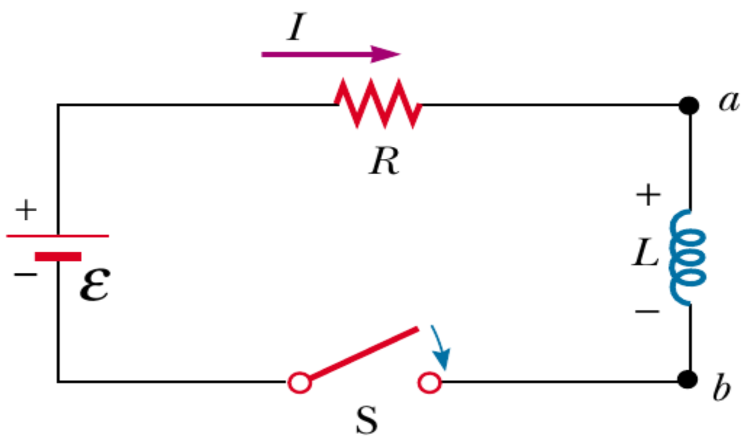
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

$$x = \frac{\mathcal{E}}{R} - I$$

que es la solución de la ecuación original.

Inductancia

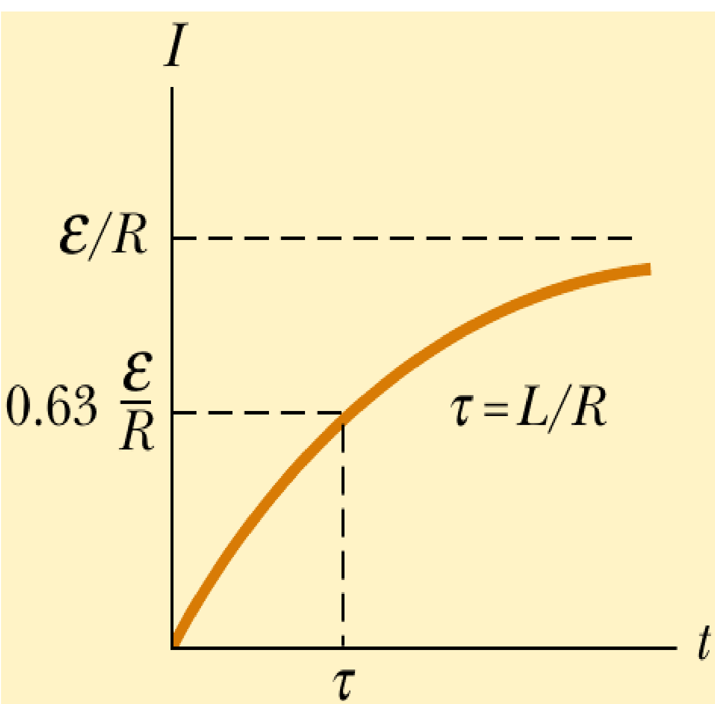
- Consideremos un circuito que consta de un interruptor, un resistor, una fuente de fem y una bobina:



$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

que puede también ser escrita como:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

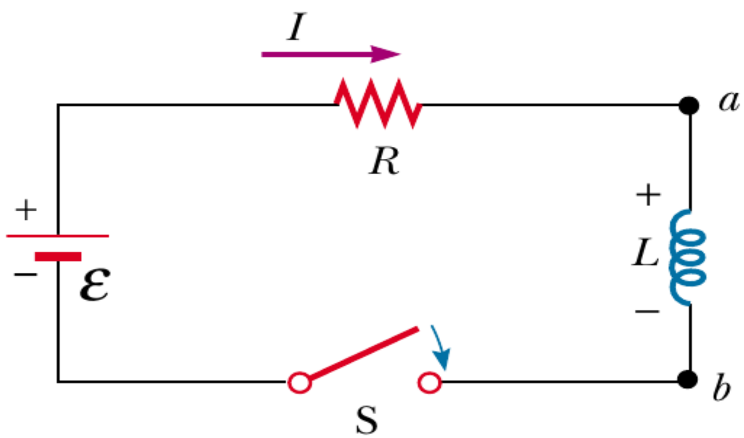


donde “tau” es la constante de tiempo del circuito RL:

$$\tau = L/R$$

Inductancia

- Consideremos un circuito que consta de un interruptor, un resistor, una fuente de fem y una bobina:



$$\mathcal{E} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

Multipliquemos cada término por I:

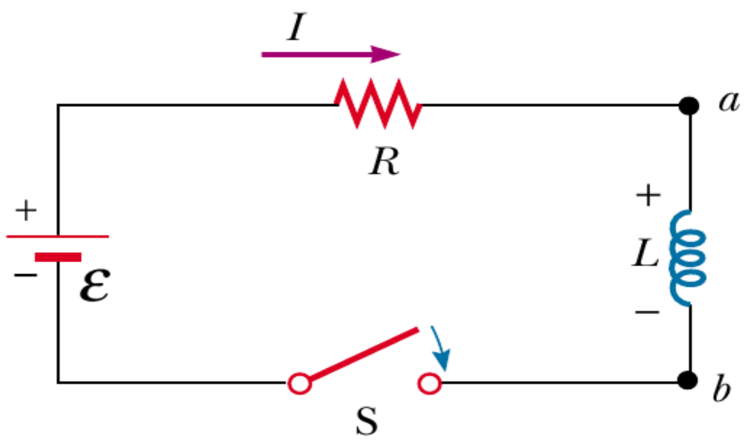
$$I\mathcal{E} = I^2R + LI\frac{dI}{dt}$$

si recordamos IE es la potencia, es decir, tasa de transferencia de energía, vemos que esta ecuación nos dice que la tasa a la cual la batería entrega energía, es igual a la tasa de disipacion (I^2R) en la resistencia, mas la tasa a la cual se almacena en la bobina (inductor).

Es decir, representa la conservación de la energía.

Inductancia

- Consideremos un circuito que consta de un interruptor, un resistor, una fuente de fem y una bobina:



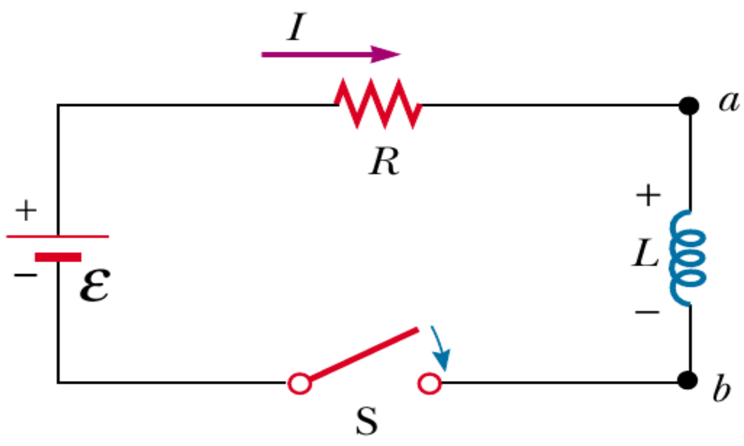
$$I\mathcal{E} = I^2R + LI\frac{dI}{dt}$$

Si U es la energía almacenada en la bobina en un tiempo t cualquiera, entonces la tasa a la cual se almacena la energía es:

$$\frac{dU}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$$

Inductancia

- Consideremos un circuito que consta de un interruptor, un resistor, una fuente de fem y una bobina:



$$\frac{dU}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$$

Para encontrar la energía total, escribimos:

$$dU = LI\,dI$$

y procedemos a integrar:

$$U = \int dU = \int_0^I LI\,dI = L\int_0^I I\,dI$$

para obtener:

$$\boxed{U = \tfrac{1}{2}LI^2}$$