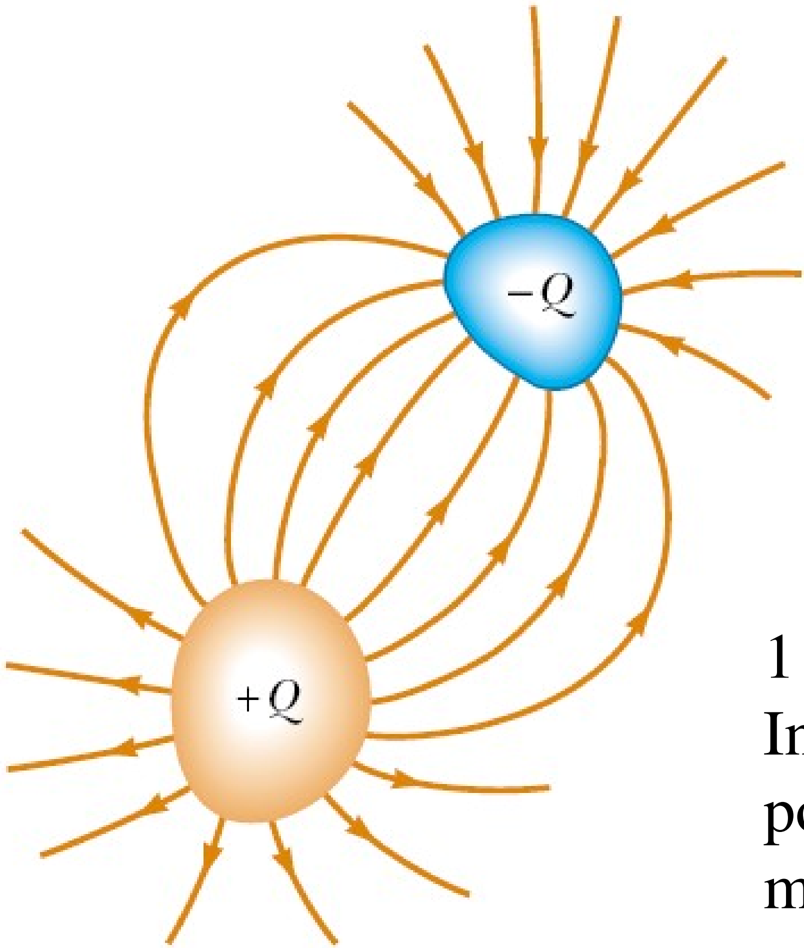
Condensadores

La capacidad C de un condensador se define como la razón entre la magnitud de la carga y la diferencia de potencial aplicado:



$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V}$$

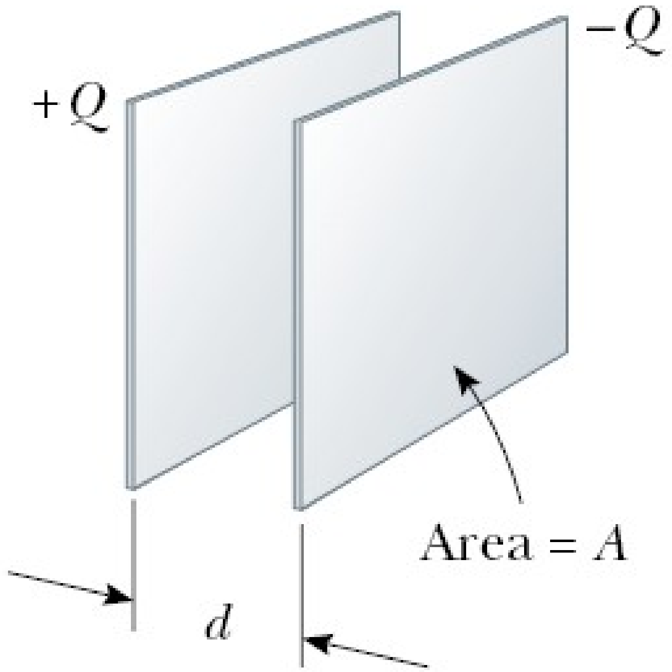
$$1\ \mathrm{F} = 1\ \mathrm{C/V}$$

1 Faraday es la unidad en sistema Internacional, igual a 1 Coulomb dividido por 1 Volt, pero lo habitual es usar microFaraday (10^{-6}) y menores.

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V}$$

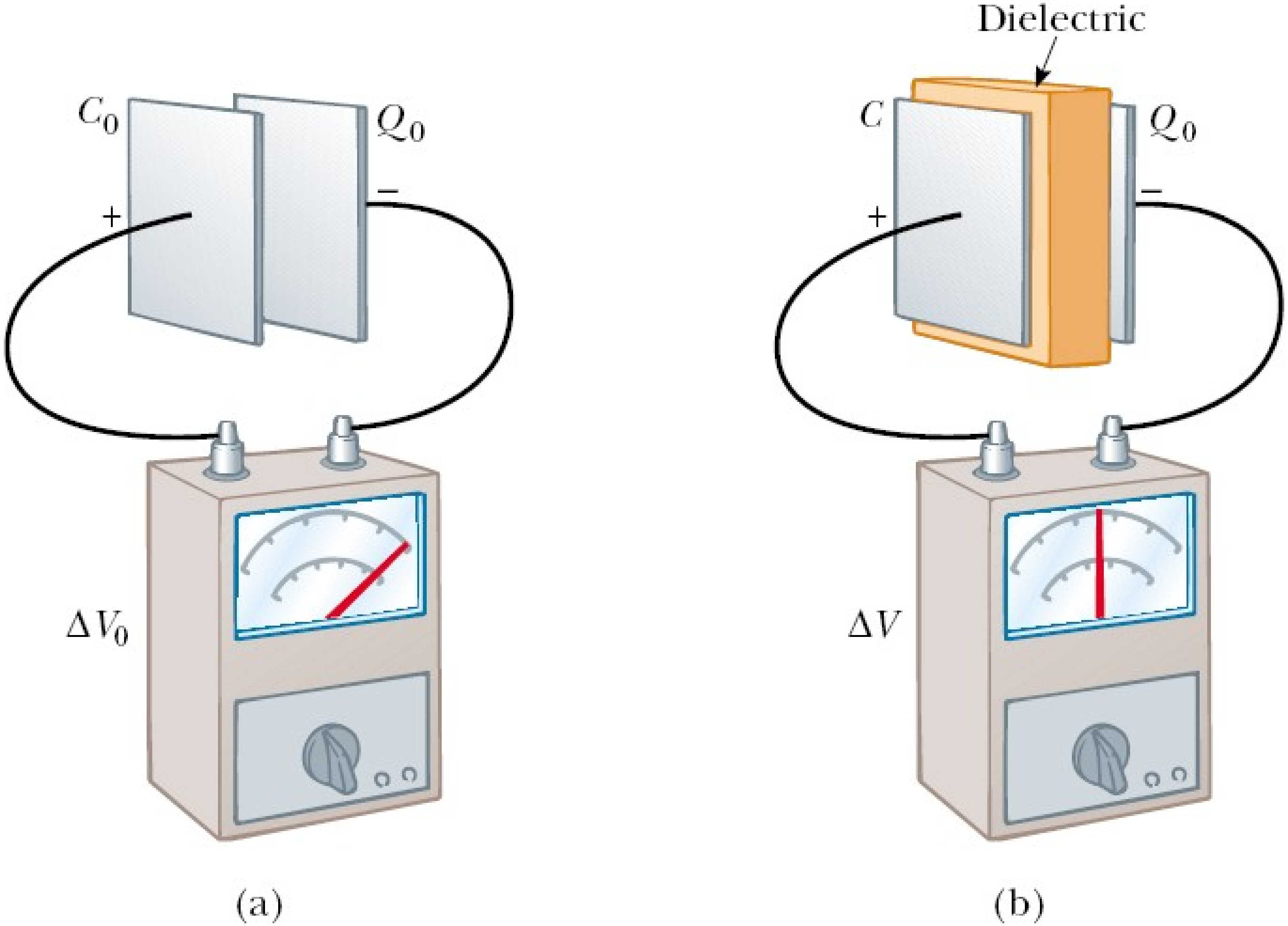
Esta es una definición en función de su Comportamiento eléctrico.

Pero también existe una definición en términos de su geometría:

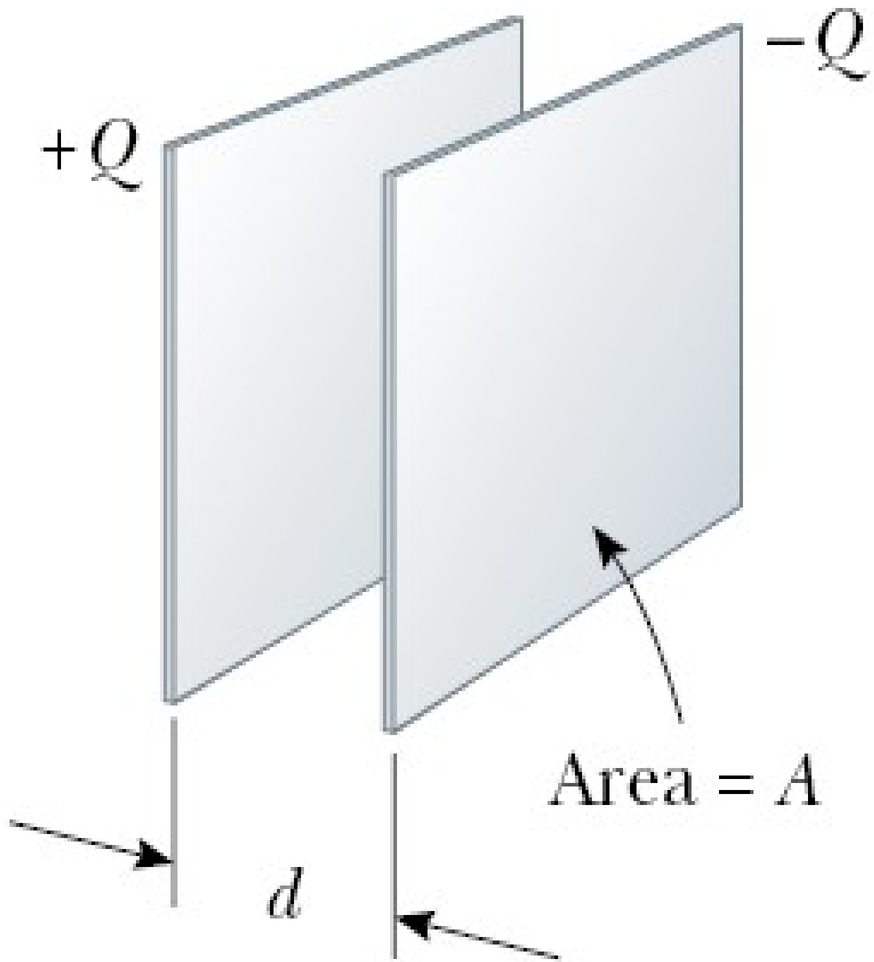


$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Condensador con dielectrico, es decir material no conductor (caucho, Vidrio, etc), caracterizado por un factor adimensional κ llamado Constante dieléctrica.



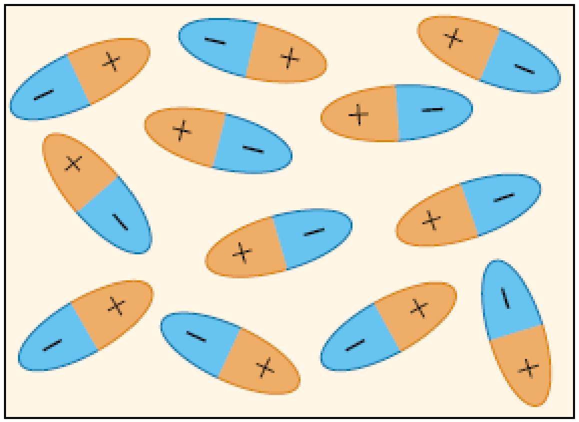
Para considerar la capacidad de un condensador que tiene un dieléctrico, se usa la ecuación:



$$C = \kappa \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

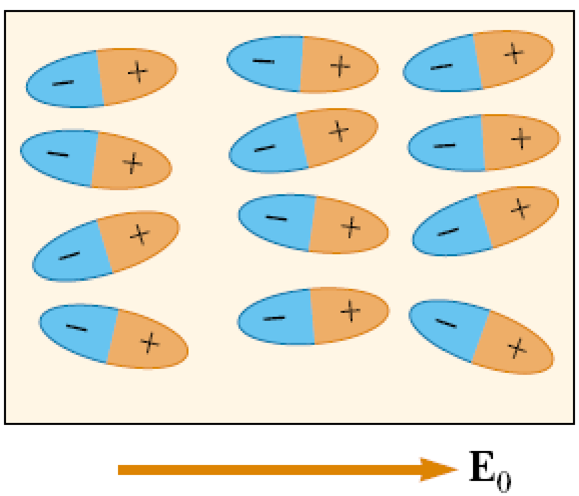
TABLE 26.1 **Dielectric Constants and Dielectric Strengths of Various Materials at Room Temperature**

Material	Dielectric Constant κ	Dielectric Strength[a] (V/m)
Air (dry)	1.000 59	3×10^6
Bakelite	4.9	24×10^6
Fused quartz	3.78	8×10^6
Neoprene rubber	6.7	12×10^6
Nylon	3.4	14×10^6
Paper	3.7	16×10^6
Polystyrene	2.56	24×10^6
Polyvinyl chloride	3.4	40×10^6
Porcelain	6	12×10^6
Pyrex glass	5.6	14×10^6
Silicone oil	2.5	15×10^6
Strontium titanate	233	8×10^6
Teflon	2.1	60×10^6
Vacuum	1.000 00	—



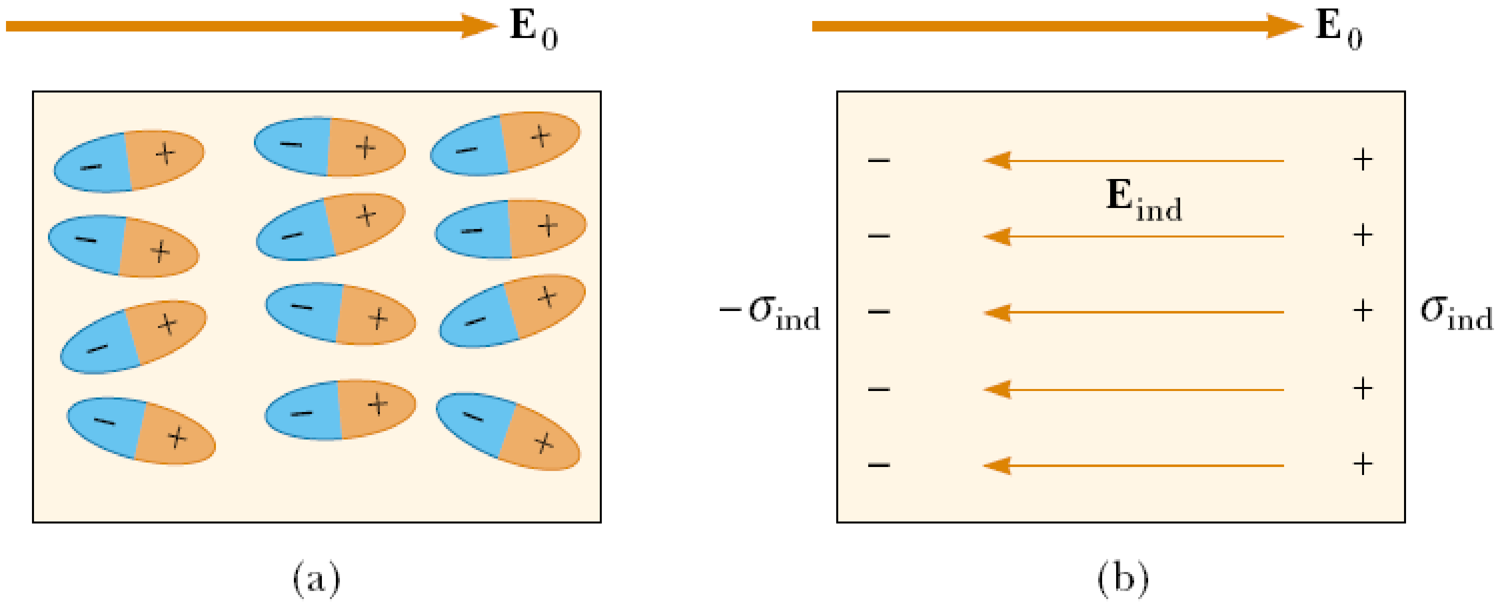
(a)

Dieléctrico sin campo eléctrico



(b)

Dieléctrico con campo eléctrico



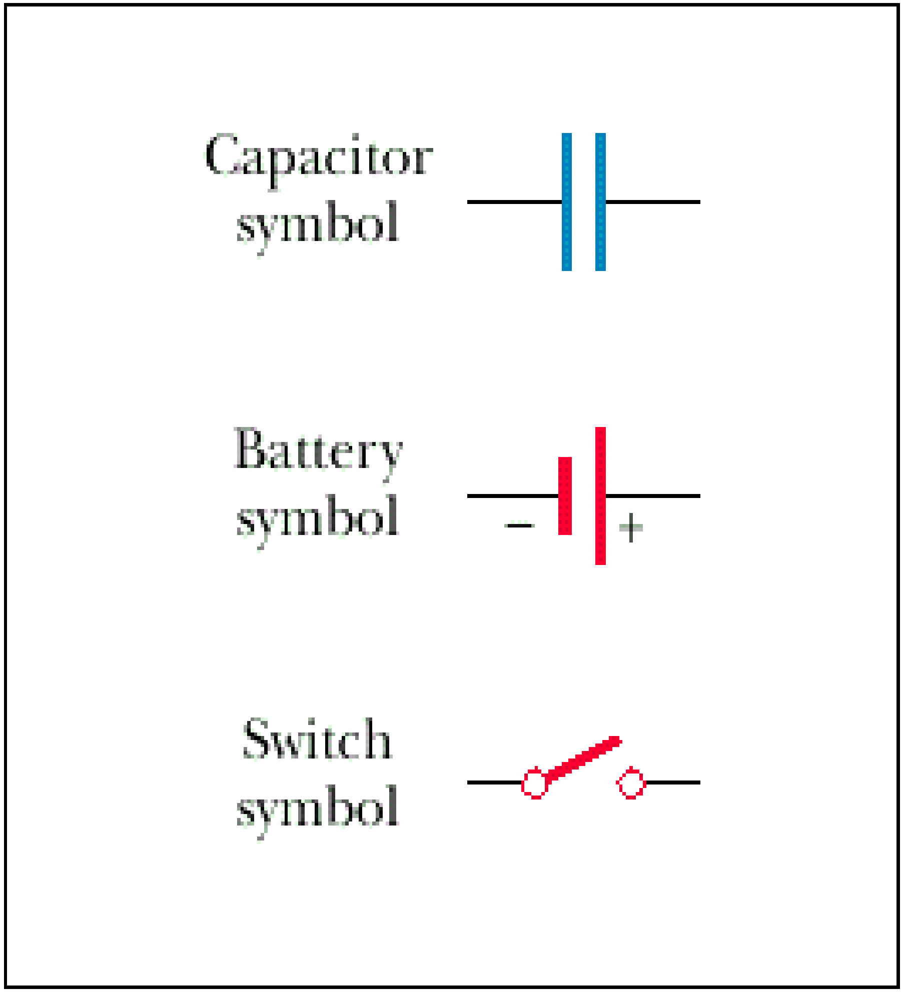
El campo resultante es menor que el original, y como V=Ed, y d se mantiene constante, entonces V disminuye.

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V}$$

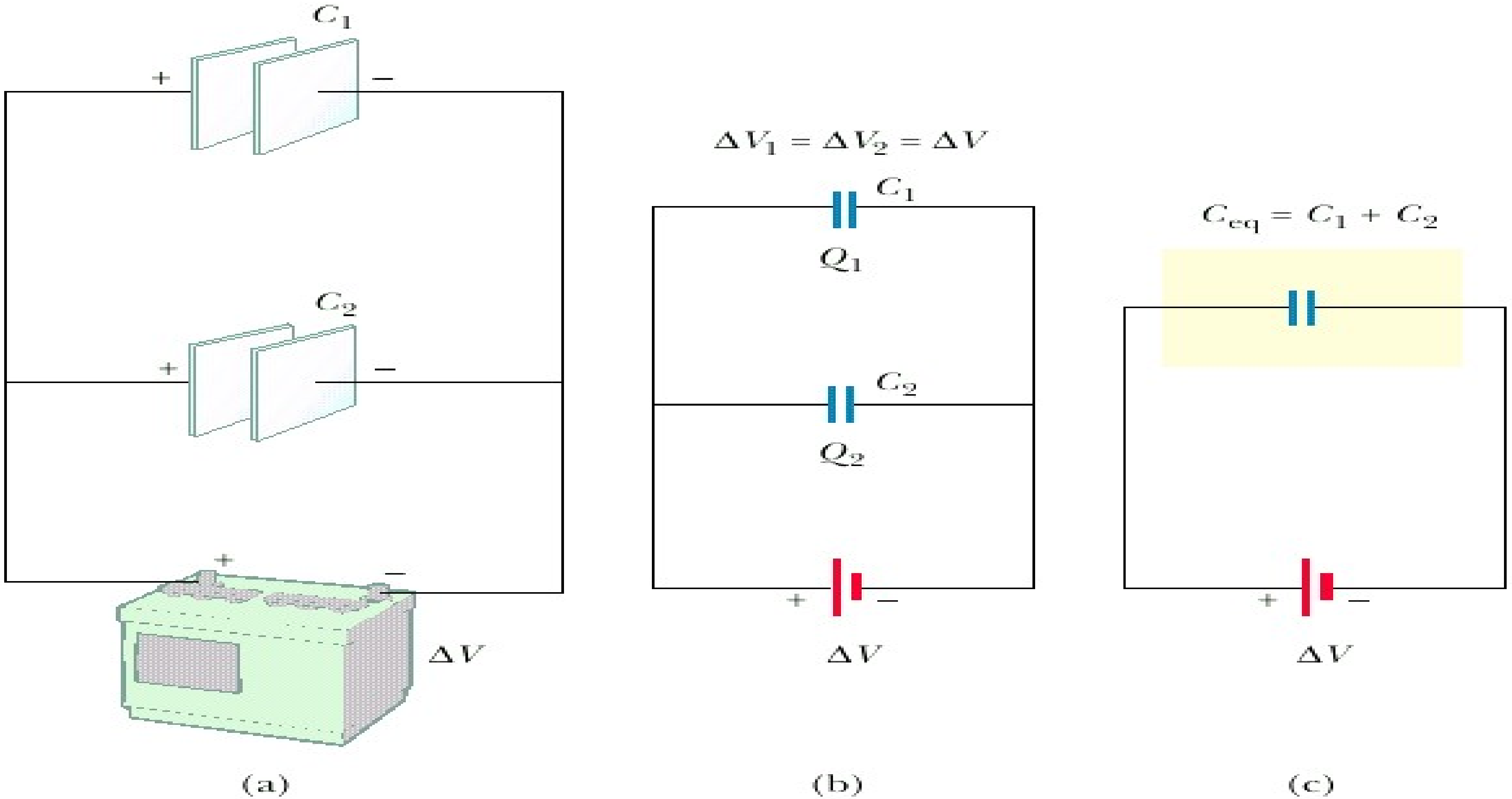
Finalmente C aumenta.

Combinación de Condensadores

- Cuando 2 o más condensadores se conectan en un circuito eléctrico, existen métodos para calcular el valor del Condensador "equivalente".
- El símbolo usado en los diagramas, refleja la geometría del condensador más común, el de placas paralelas.



Condensadores en Paralelo



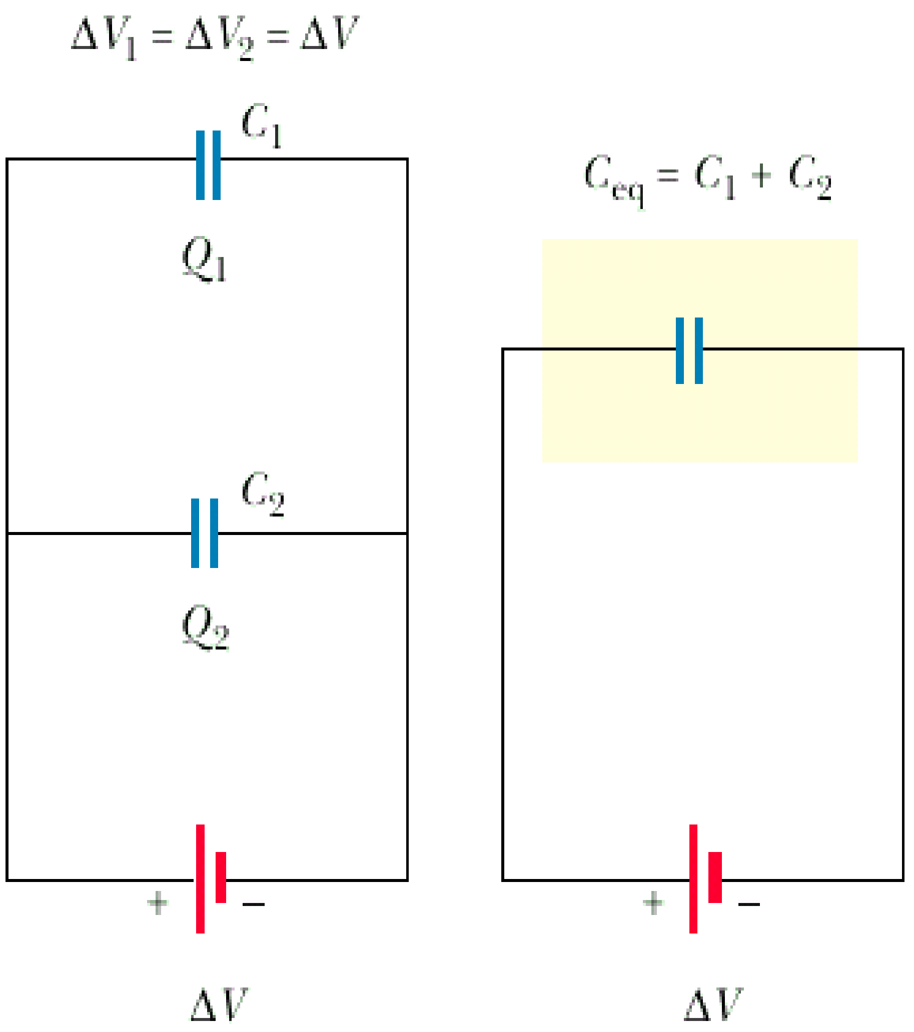
- a) Condensadores C_1 y C_2 conectados a una batería con ΔV.
- b) Diagrama del mismo circuito.
- c) Diagrama de circuito “equivalente”.

$$Q_1 = C_1 \Delta V \qquad Q_2 = C_2 \Delta V$$

Condensadores en paralelo, Dem. que $C_{eq}=C_1+C_2$

- El flujo de carga cesa cuando la diferencia de potencial en los condensadores es la misma que en la batería, es decir, ΔV
- Los condensadores alcanzan entonces su máxima carga, Q_1 y Q_2.
- La carga total almacenada es:

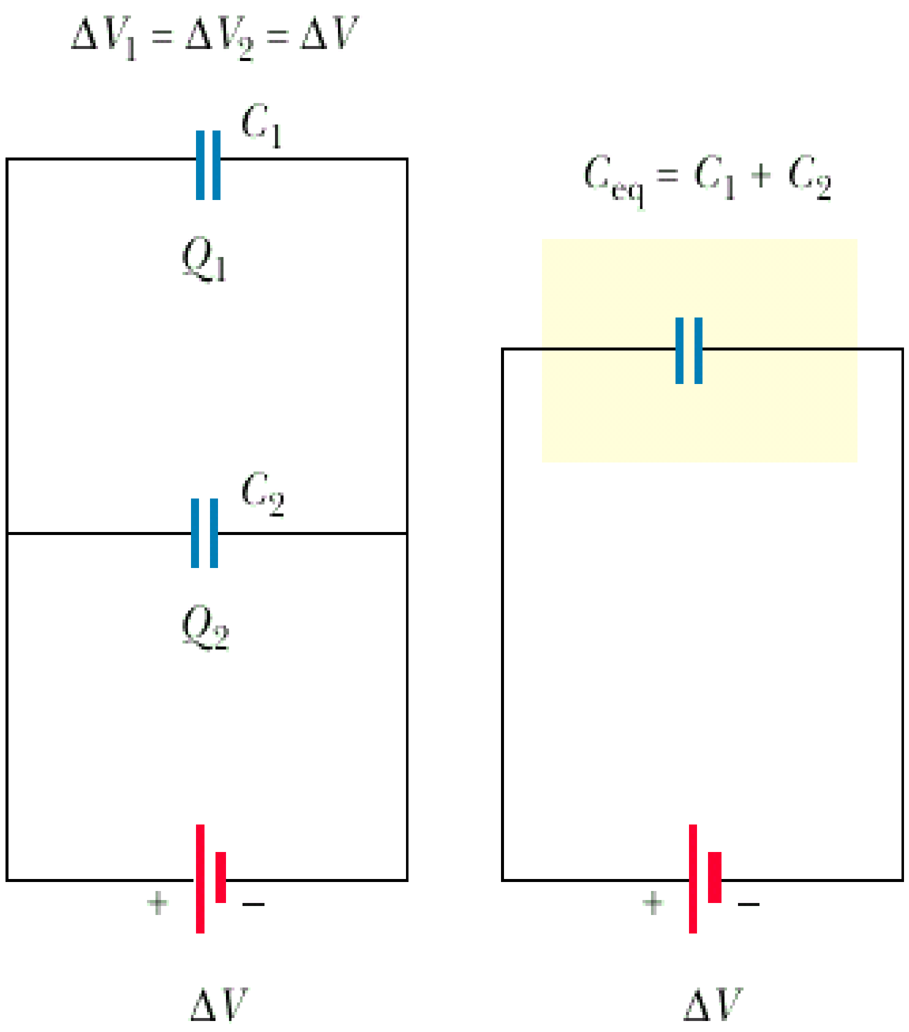
$$Q = Q_1 + Q_2$$



Condensadores en paralelo, Dem. que $C_{eq}=C_1+C_2$

- Si pretendemos reemplazar C_1 y C_2 por un "condensador equivalente" C_{eq}, este debe tener el mismo comportamiento que la combinación de C_1 y C_2.
- C_{eq} debe almacenar una carga total Q cuando se conecta a una diferencia de potencial ΔV:

$$Q = C_{eq}\,\Delta V$$



Condensadores en paralelo, Dem. que $C_{eq}=C_1+C_2$

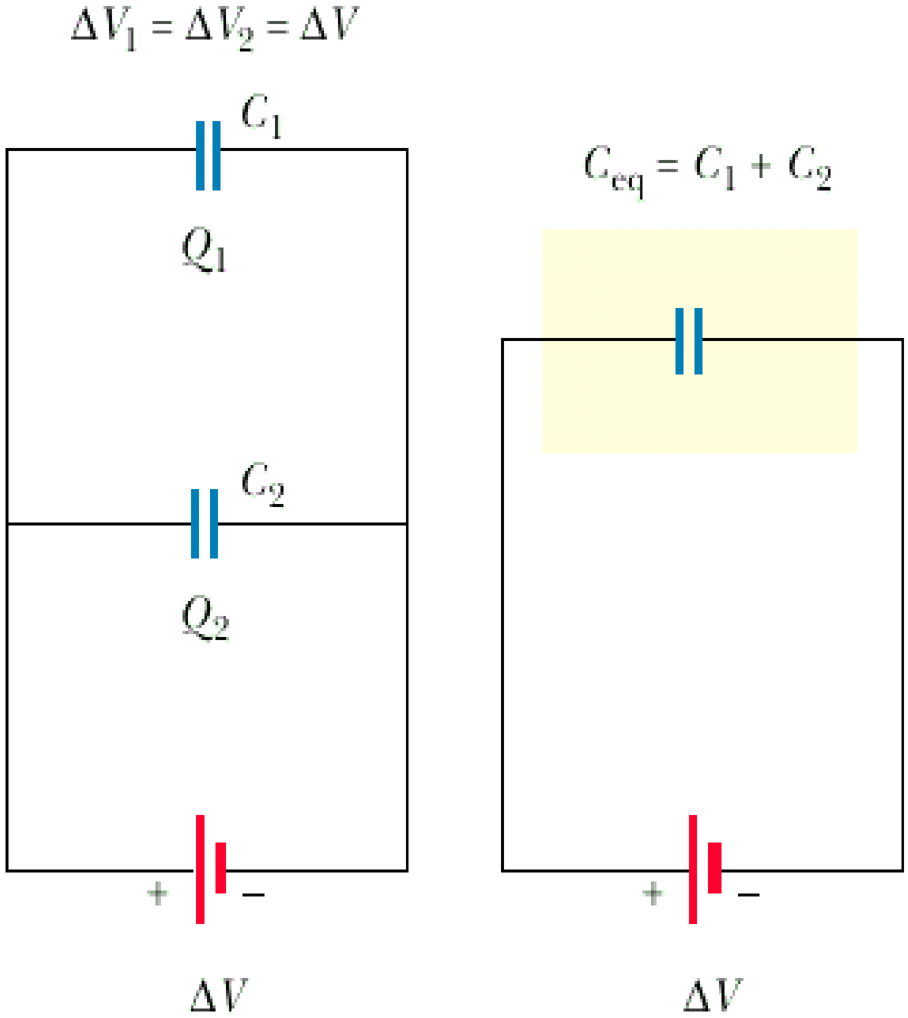
- Tenemos entonces:

$$Q = C_{eq}\,\Delta V$$

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$Q_1 = C_1\,\Delta V \qquad Q_2 = C_2\,\Delta V$$

$$C_{eq}\,\Delta V = C_1\,\Delta V + C_2\,\Delta V$$



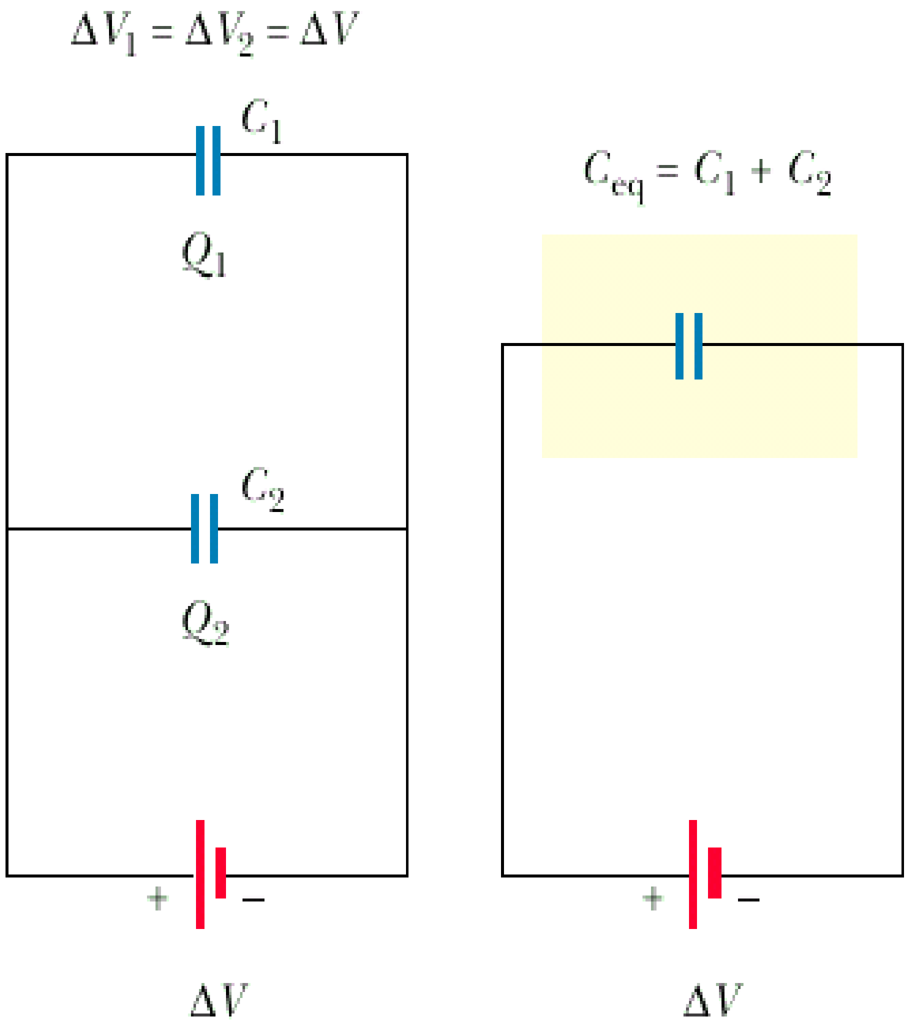
Condensadores en paralelo, Dem. que $C_{eq}=C_1+C_2$

- Finalmente:

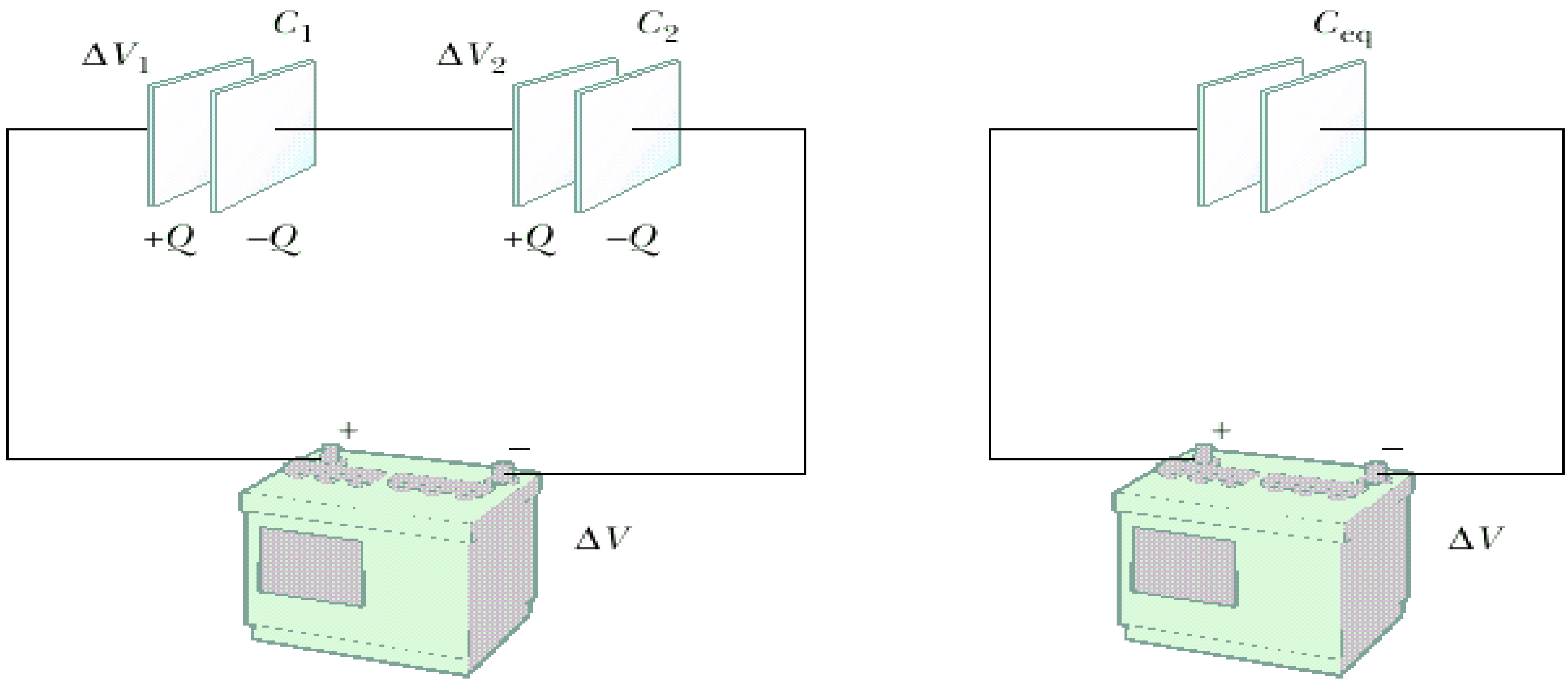
$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

Que puede ser generalizado a:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots$$



Condensadores en Serie



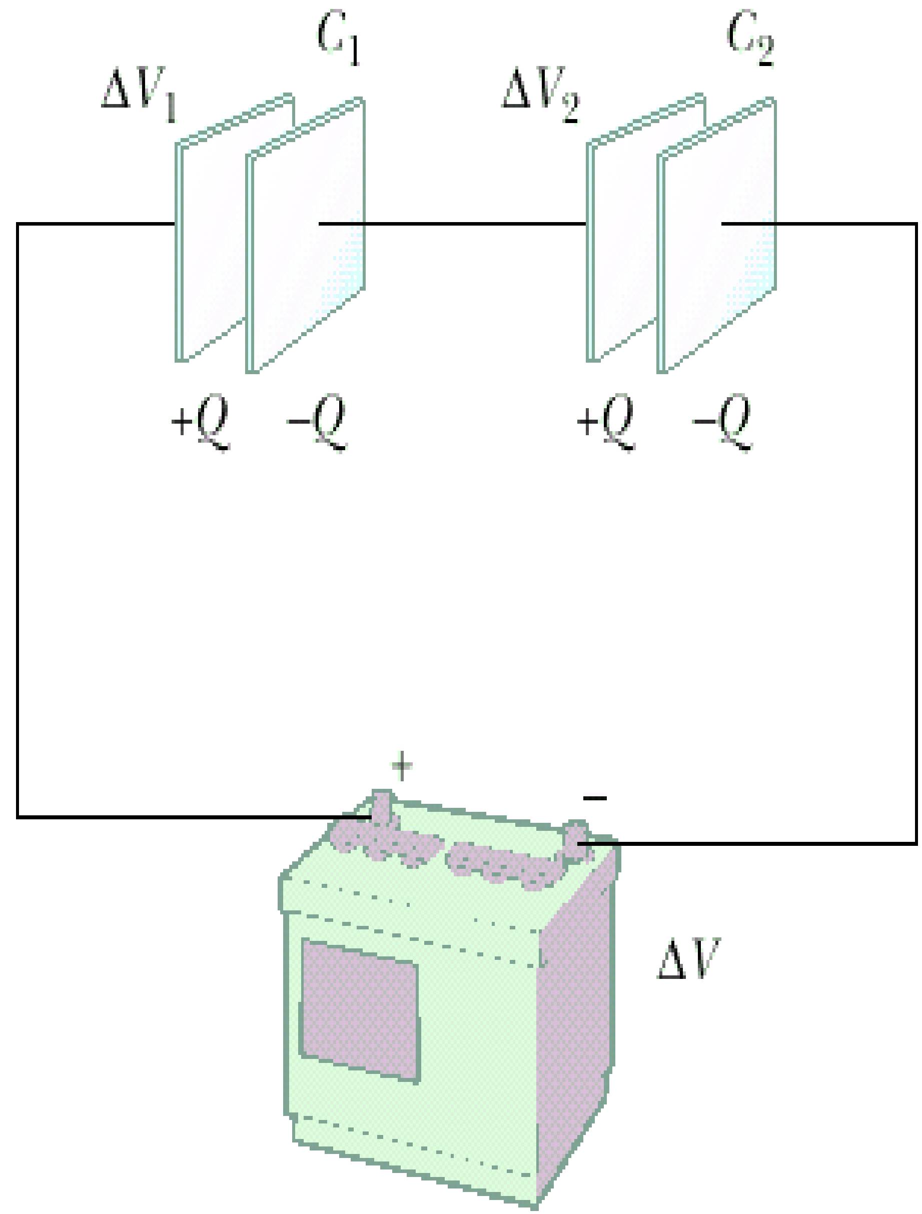
(a) (b)

Demostraremos que:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Condensadores en Serie

- Supongamos que originalmente los condensadores están sin carga.
- Al conectar la batería fluyen electrones de la placa izquierda de C_1 a la placa derecha de C_2.
- A medida que carga negativa se acumula en placa derecha de C_2, la misma cantidad sale de placa izquierda de C_2 en dirección a placa derecha de C_1, y a su vez sale de placa izquierda de C_1.

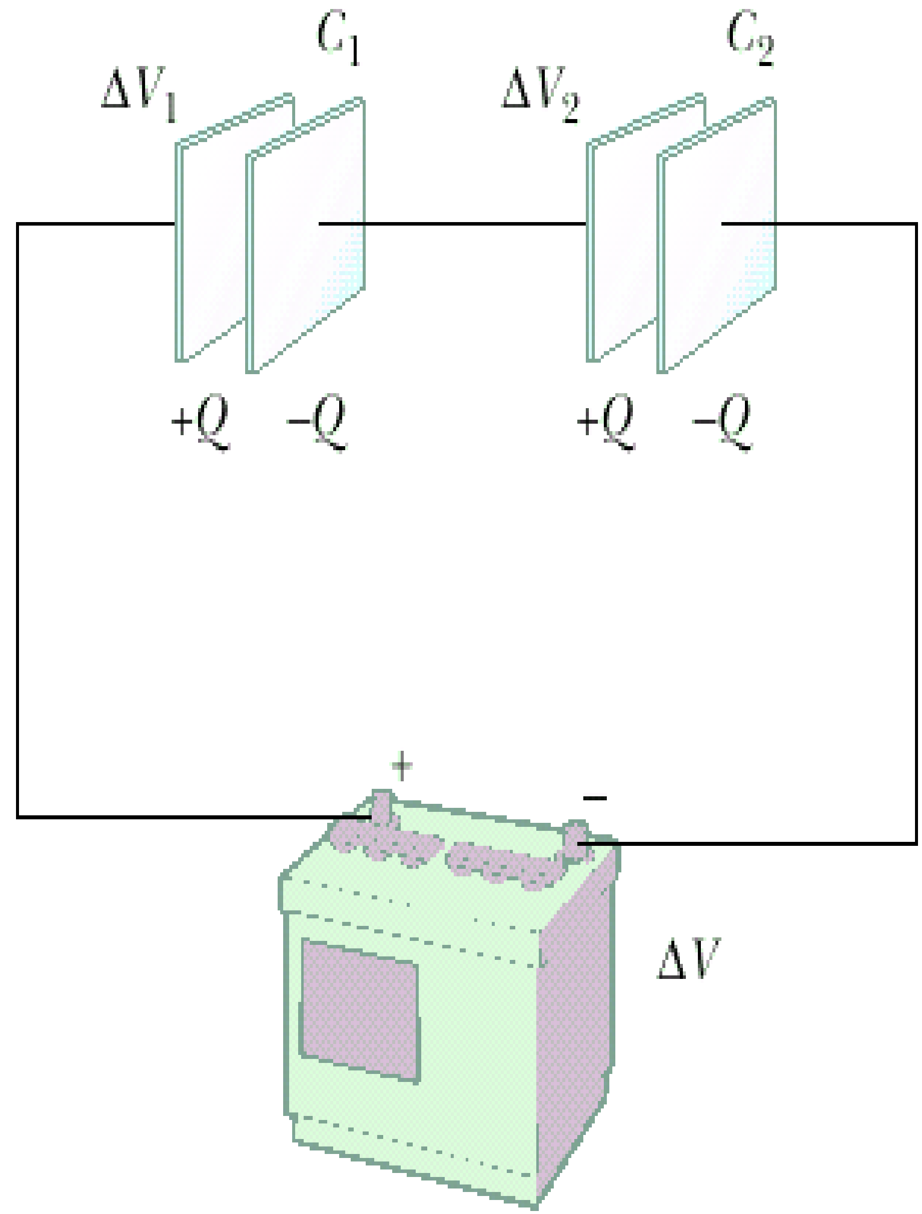


Condensadores en Serie

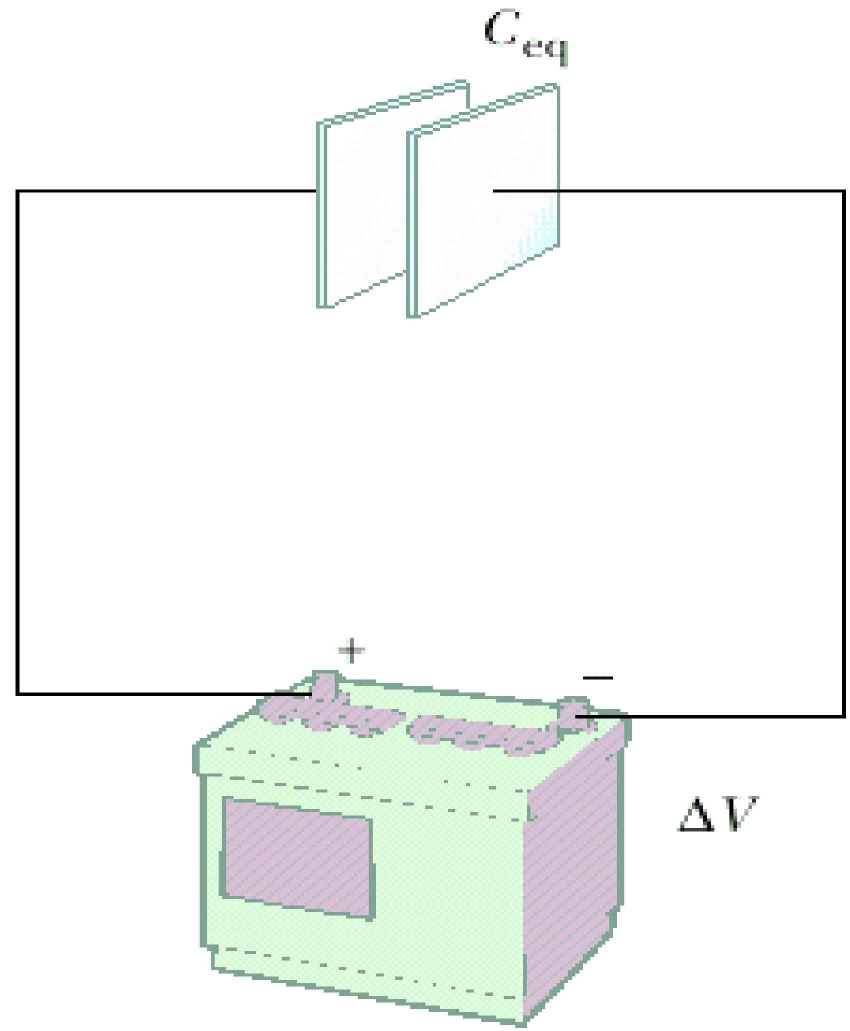
- El resultado final de todo
  este proceso es que:

1.- Todas las placas derechas
    quedan con carga -Q.

2.- Todas las placas izquierdas
    quedan con carga +Q.



Condensadores en Serie



- Si el condensador equivalente, de valor C_{eq} reemplaza a la combinación serie de C_1 y C_2, debe entonces cumplir:

- Tiene carga -Q en placa del lado derecho.

- Tiene carga +Q en placa del lado izquierdo.

- Es decir:

$$\Delta V = \frac{Q}{C_{eq}}$$

Condensadores en Serie

- Para el condensador equivalente:

$$\Delta V = \frac{Q}{C_{eq}}$$

- Para C_1 y C_2:

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1} \qquad \Delta V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

- Ademas:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

- Finalmente:

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

Condensadores en Serie

- Y cancelando C:

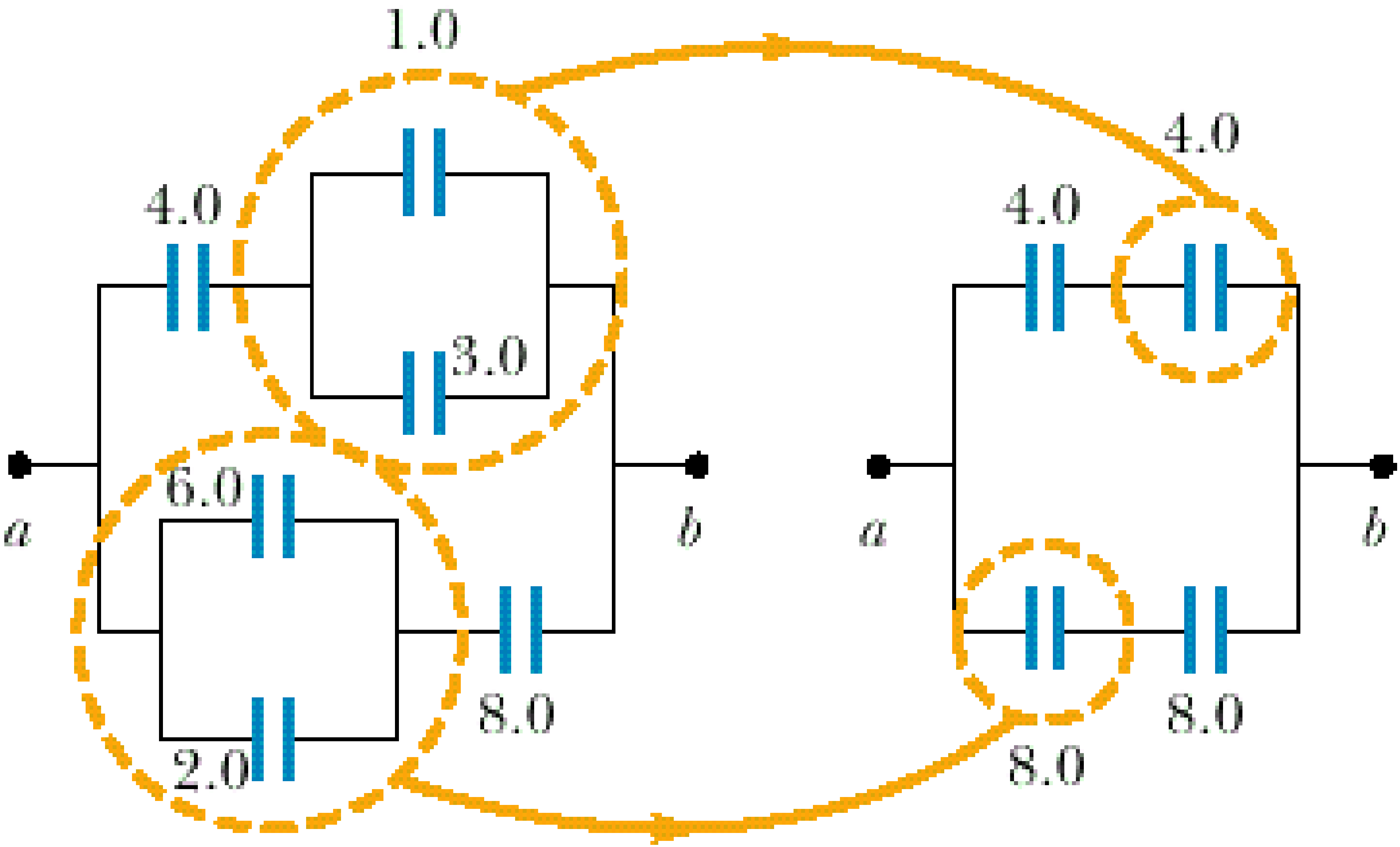
$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

- Que puede ser generalizado a:

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots$$

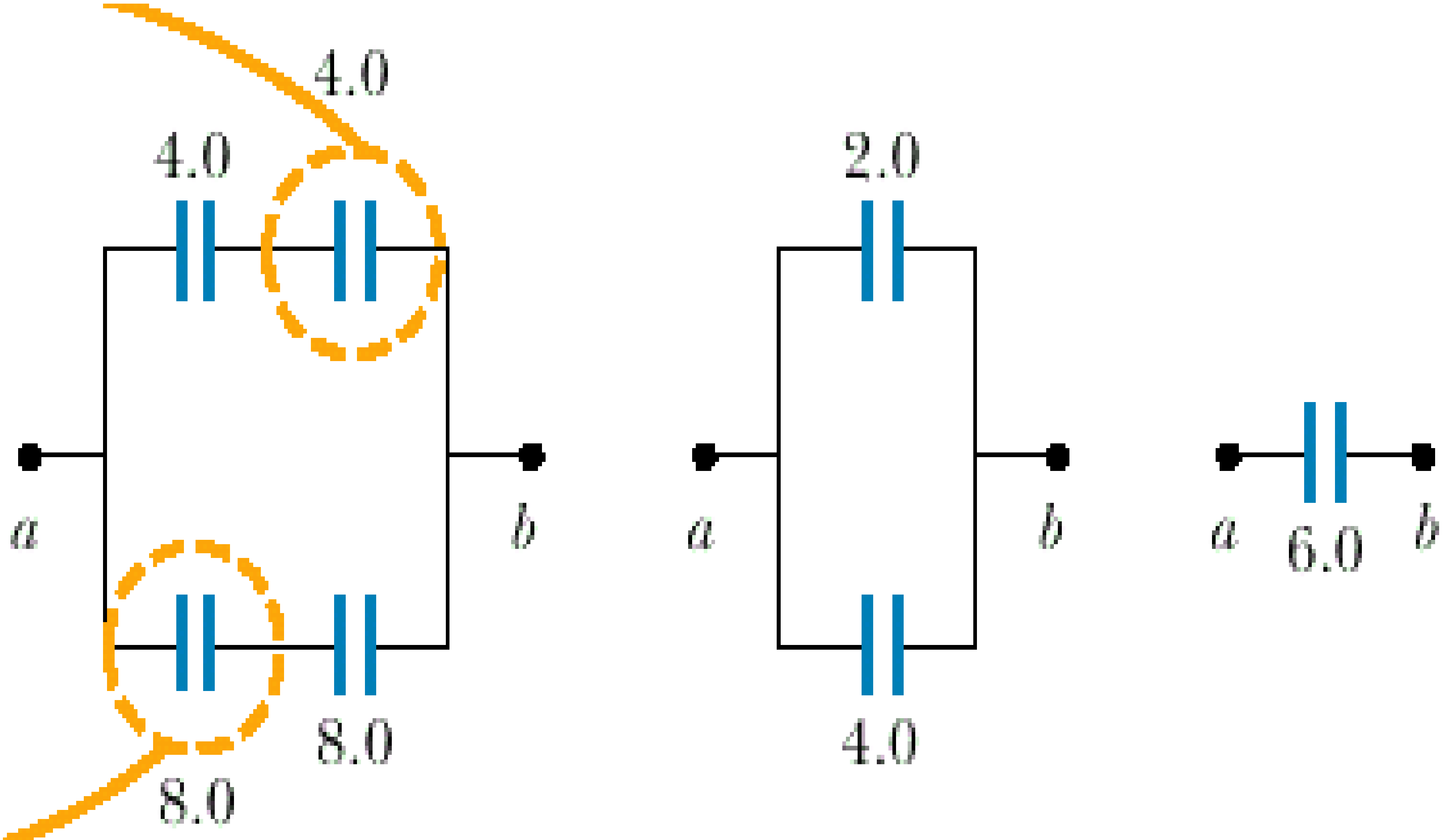
Condensadores en Serie

- Ejemplo: Calcular el valor de C_{eq} entre los extremos *a* y *b*.



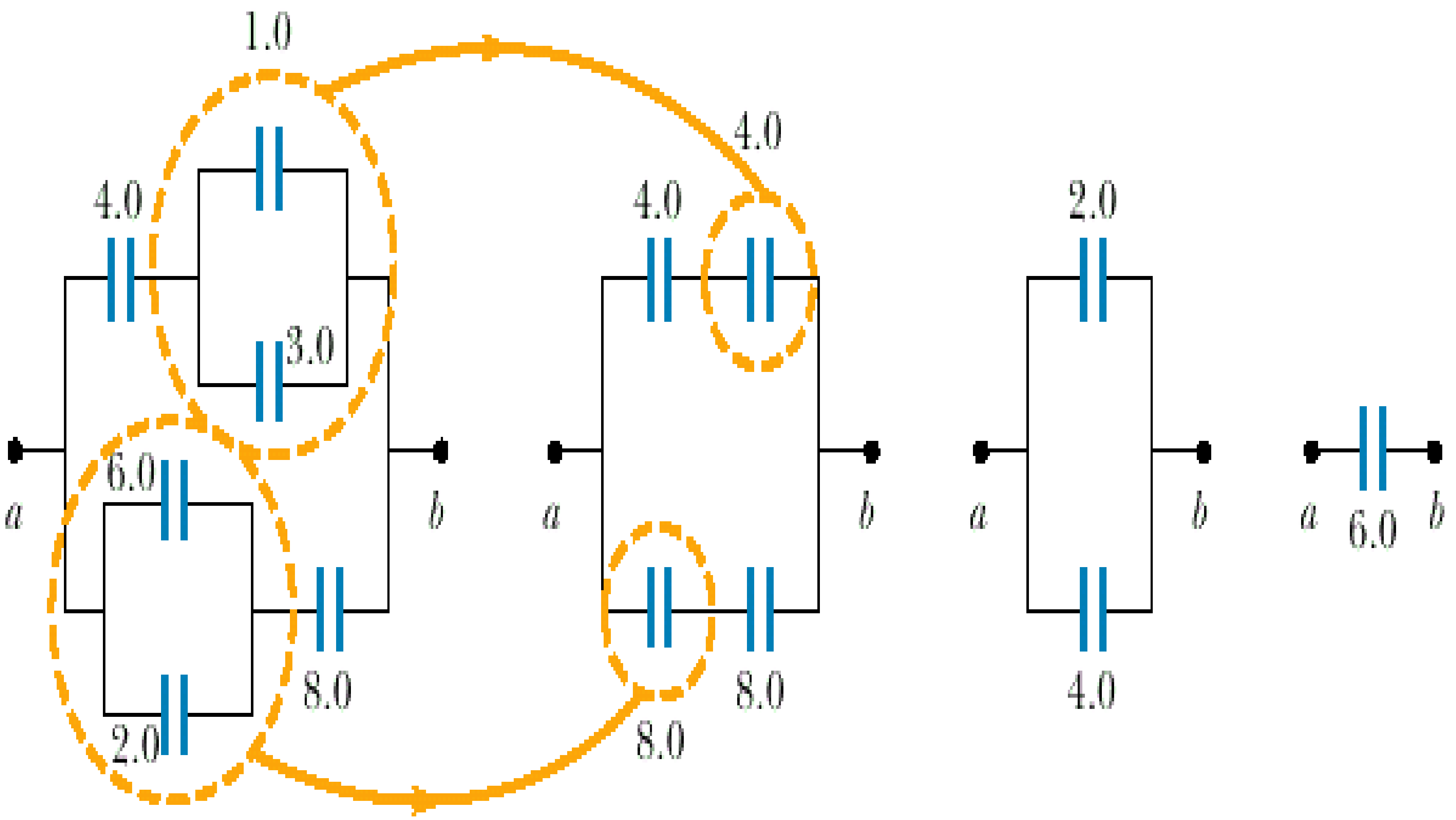
Condensadores en Serie

- Ejemplo: Calcular el valor de C_{eq} entre los extremos *a* y *b*.



Condensadores en Serie

- Ejemplo: Calcular el valor de C_{eq} entre los extremos *a* y *b*.



Energía en un Condensador

Sea q la carga en un instante de tiempo cualquiera, en el intervalo de tiempo entre que la carga es 0 y que la carga es Q(final), entonces:

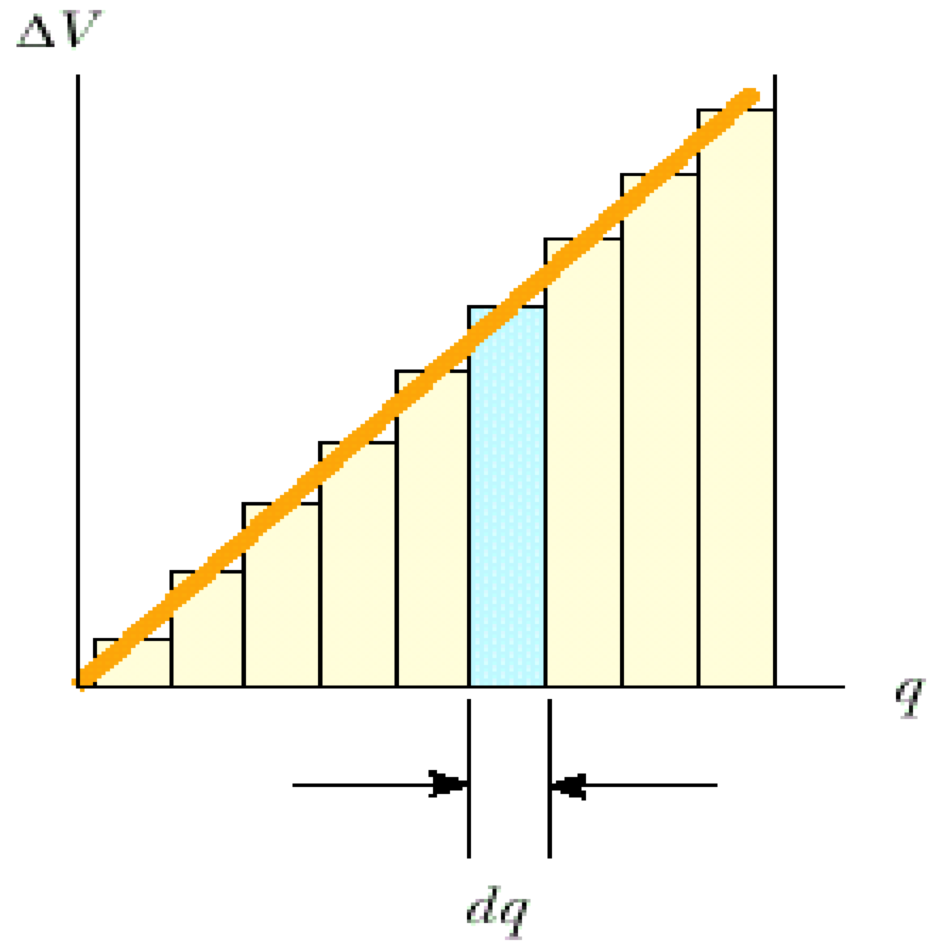
$$0 < q < Q$$

- Diferencia de potencial inicial $V=0$
- Diferencia de potencial final $V=Q/C$
- Dif. de potencial promedio durante proceso de carga es $V/2 = Q/2C$
- Como el potencial es Energía por unidad de carga, podemos decir entonces que el trabajo W para cargar el condensador es:

$$W = QV/2 = Q^2/2C$$

Energía en un Condensador

Si graficamos $\Delta V = Q/C$, tenemos:



Para variar la carga en *dq,* es necesario hacer un trabajo *dW* dado por:

$$dW = \Delta V\, dq = \frac{q}{C}\, dq$$

El trabajo para llevar el condensador desde $q=0$ hasta $q=Q$, es entonces:

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C}\, dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q\, dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Energía en un Condensador

Usando la relacion $\Delta V = Q/C$ en la ecuación:

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Podemos entonces escribir:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \tfrac{1}{2} Q\,\Delta V = \tfrac{1}{2} C(\Delta V)^2$$

Energía en un Condensador

El resultado anterior es independiente si la Capacidad del condensador se obtiene a partir de su geometría, por ejemplo:

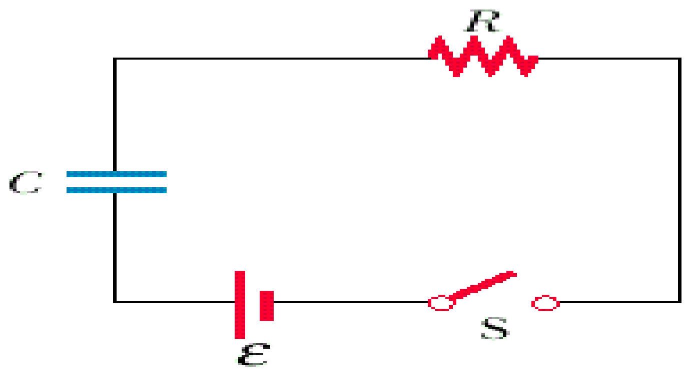
$$C = \epsilon_0 A / d \qquad \Delta V = E d$$

Podemos escribir la energía como:

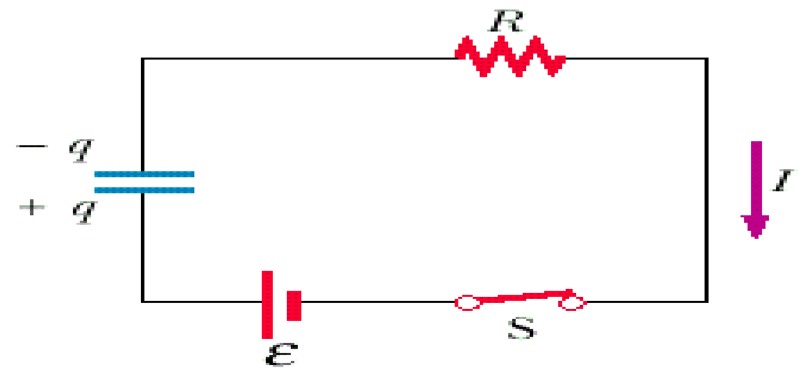
$$U = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{d}\left(E^2 d^2\right) = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 A d\right)E^2$$

Circuitos RC

- Hasta ahora hemos visto circuitos en que la corriente es constante, cuando existen Condensadores, la corriente varía en el tiempo. Un circuito que contiene Resistencia y Condensador, es llamado un circuito RC.

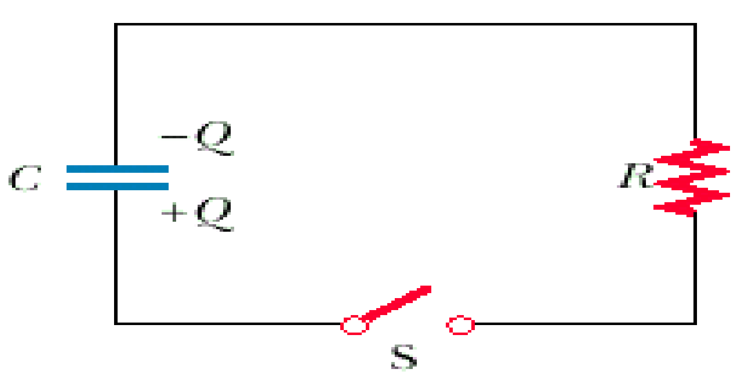


(b) $t < 0$

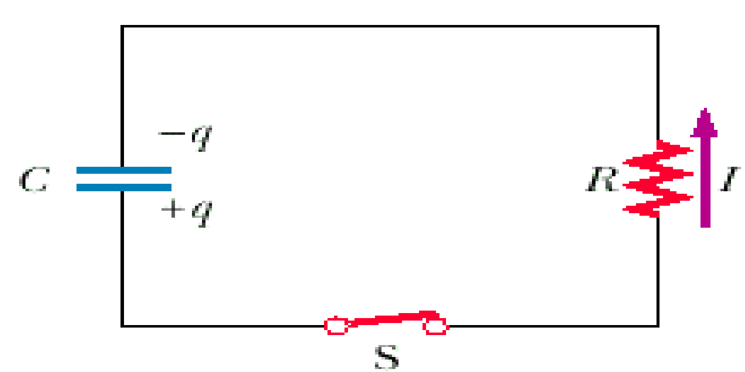


(c) $t > 0$

- Carga



$t < 0$

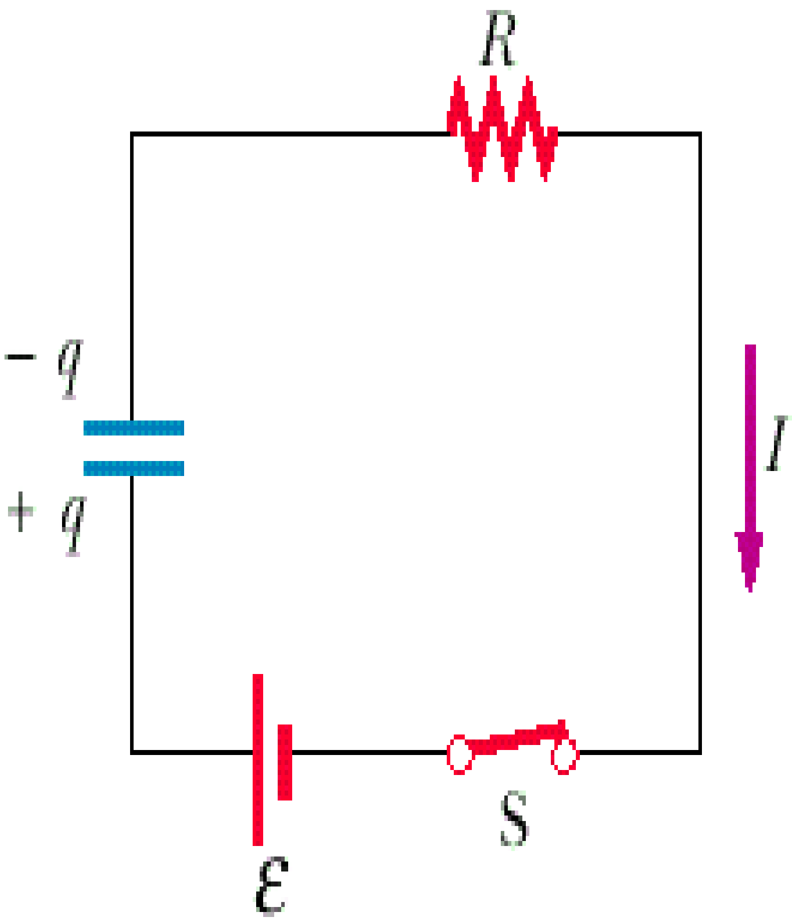


$t > 0$

- Descarga

Carga de un Circuito RC

- Aplicamos la regla de Kirchhoff's a partir del instante en que se cierra el interruptor S:



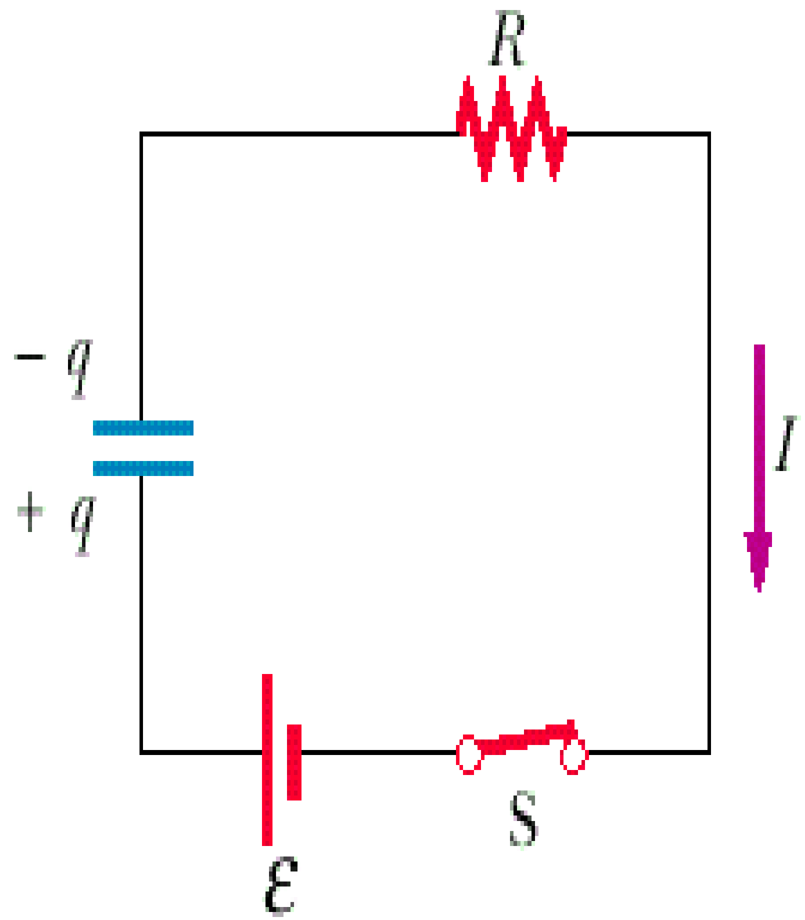
$$\mathcal{E} - \frac{q}{C} - IR = 0$$

Al principio el condensador no tiene carga, y la corriente es máxima, haciendo entonces q=0, tenemos que:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Carga de un Circuito RC

- Aplicamos la regla de Kirchhoff's a partir del instante en que se cierra el interruptor S:



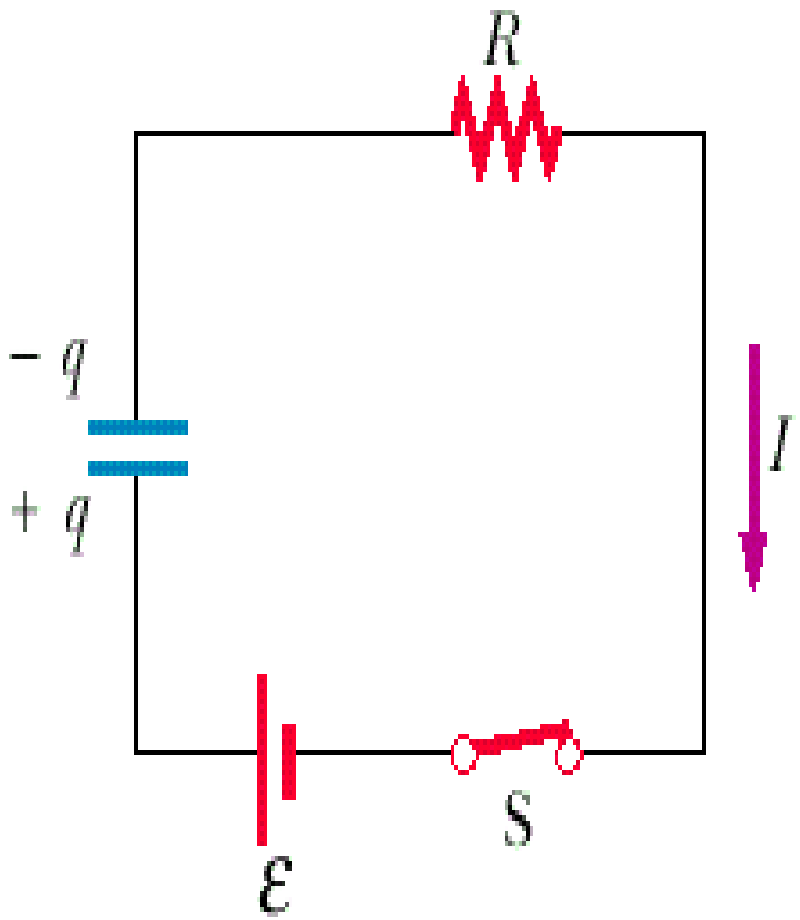
$$\mathcal{E} - \frac{q}{C} - IR = 0$$

Cuando el condensador alcanza su carga máxima, entonces la corriente es cero, I=0, y tenemos que:

$$Q = C\mathcal{E}$$

Carga de un Circuito RC

- Pero en esta situación, "q" e "I" dependen del tiempo, de modo que para elimanar una variable reemplazamos I=dq/dt:

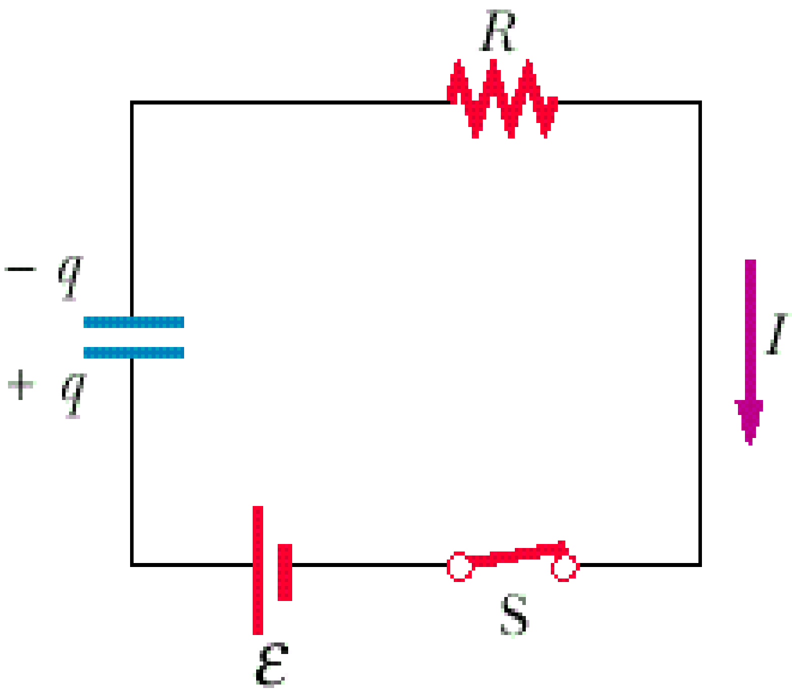


$$\varepsilon - \frac{q}{C} - IR = 0$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC}$$

Carga de un Circuito RC

- Reordenando un poco:

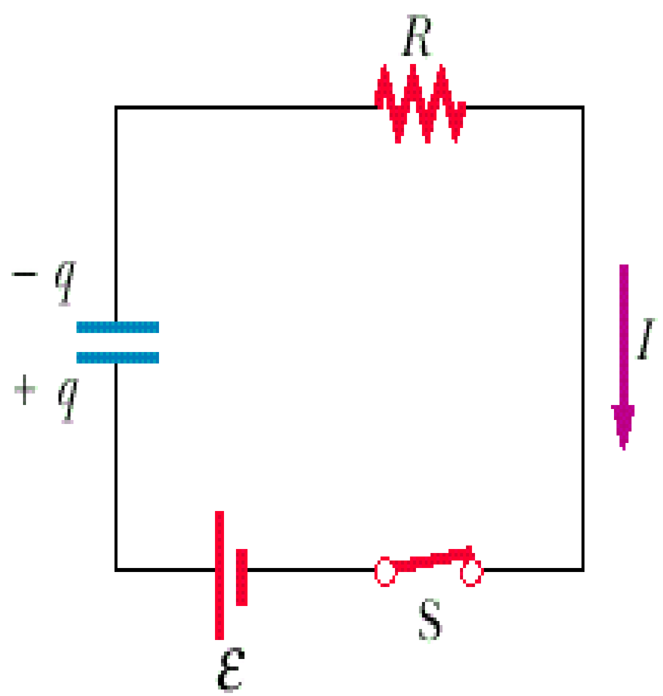


$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{C\mathcal{E}}{RC} - \frac{q}{RC} = -\frac{q - C\mathcal{E}}{RC}$$

Carga de un Circuito RC

- Multiplicamos por “dt” y dividimos por (q-CE), para obtener:

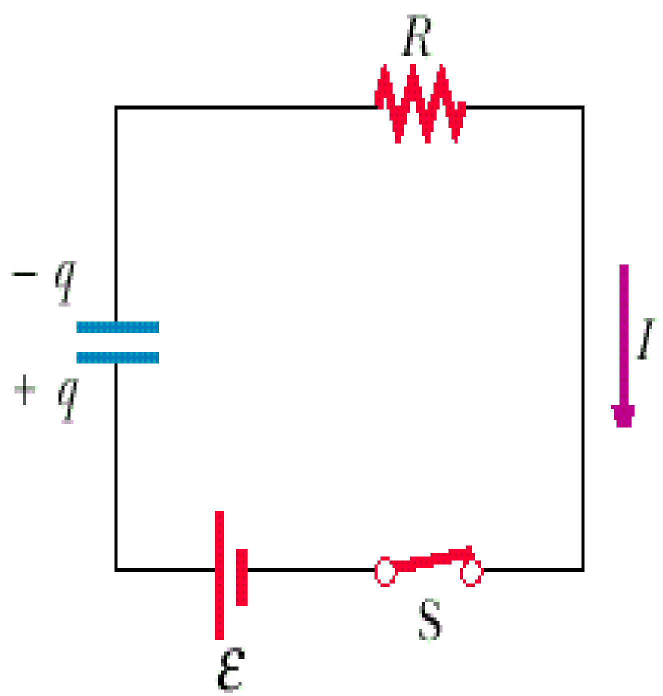


$$\frac{dq}{dt} = \frac{C\mathcal{E}}{RC} - \frac{q}{RC} = -\frac{q - C\mathcal{E}}{RC}$$

$$\frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC}\,dt$$

Carga de un Circuito RC

- Integramos teniendo en cuenta que q t=0; q=0:



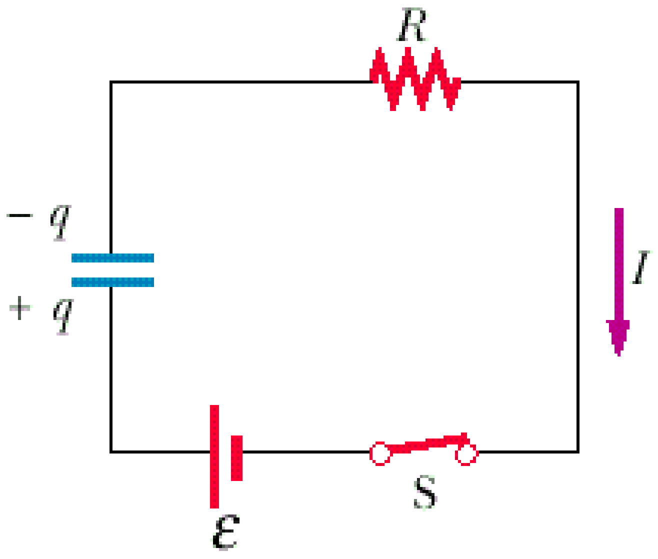
$$\frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC}dt$$

$$\int_0^q \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right) = -\frac{t}{RC}$$

Carga de un Circuito RC

- Usando la definición de logaritmo natural, y el hecho que CE es la carga máxima, obtenemos:



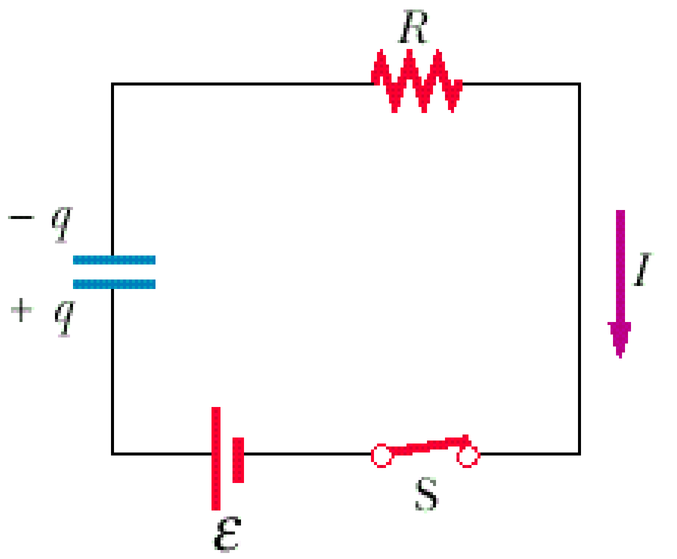
$$\ln\left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-t/RC}\right) = Q\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Carga de un Circuito RC

- Por definición I=dq/dt, de modo que derivando obtenemos la corriente en funcion del tiempo:

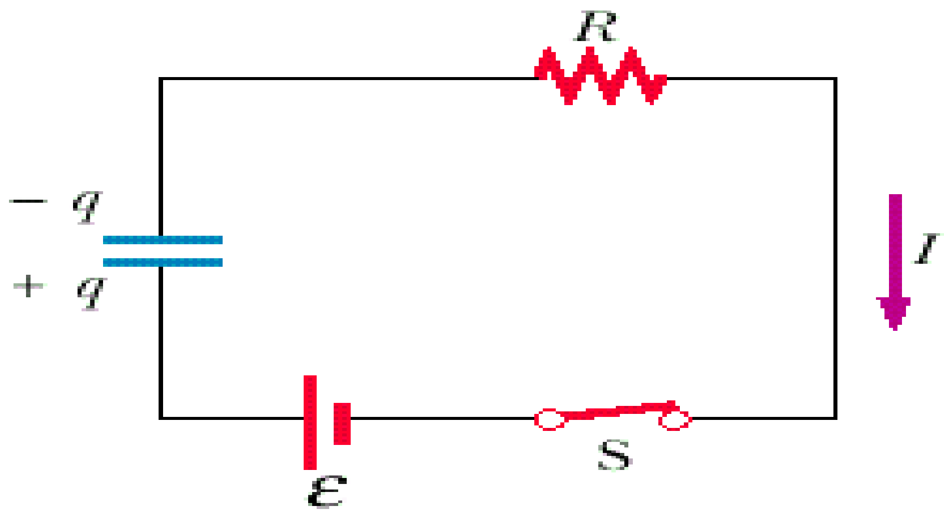
$$q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-t/RC}\right) = Q\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$



$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC}$$

Carga de un Circuito RC

- La constante RC del circuito, es llamada la constante de tiempo, se denota por la letra griega τ (tau), y tiene unidades de tiempo:



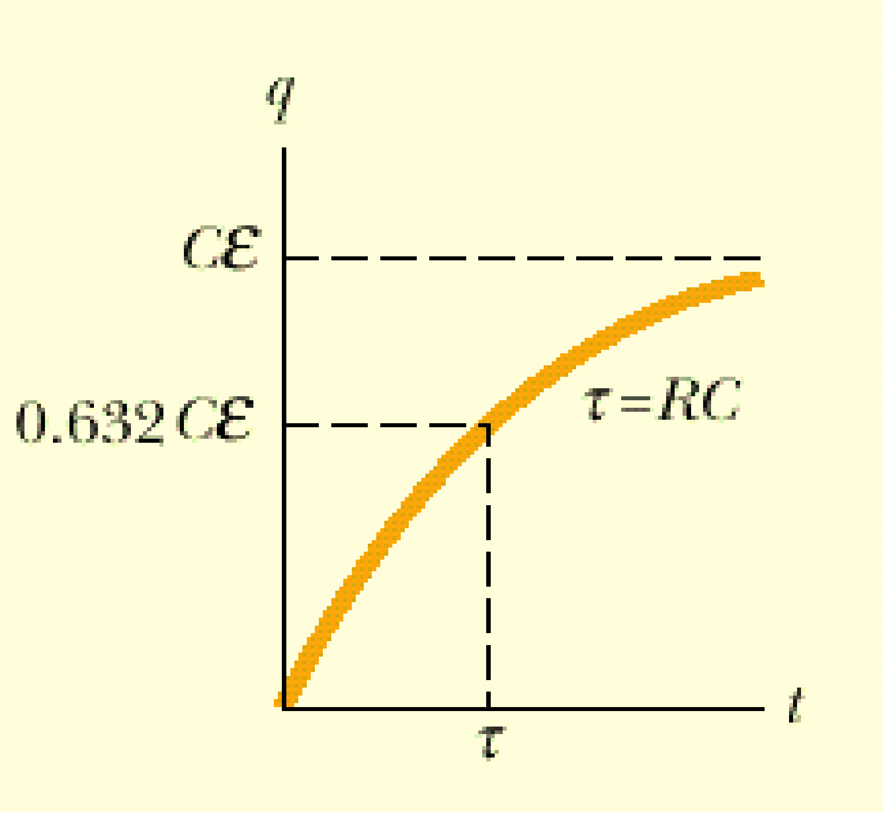
$$[\tau] = [RC] = \left[\frac{\Delta V}{I} \times \frac{Q}{\Delta V}\right] = \left[\frac{Q}{Q/\Delta t}\right] = [\Delta t] = \mathrm{T}$$

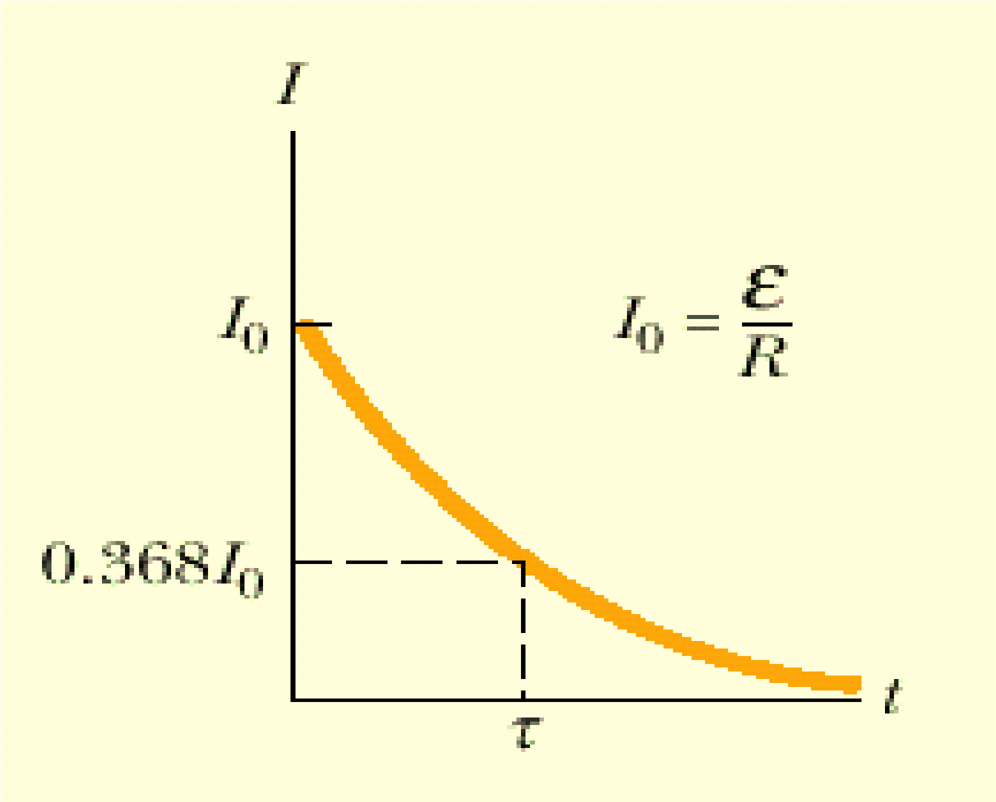
Carga de un Circuito RC

- Gráficos de carga y corriente en función del tiempo:

$$q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

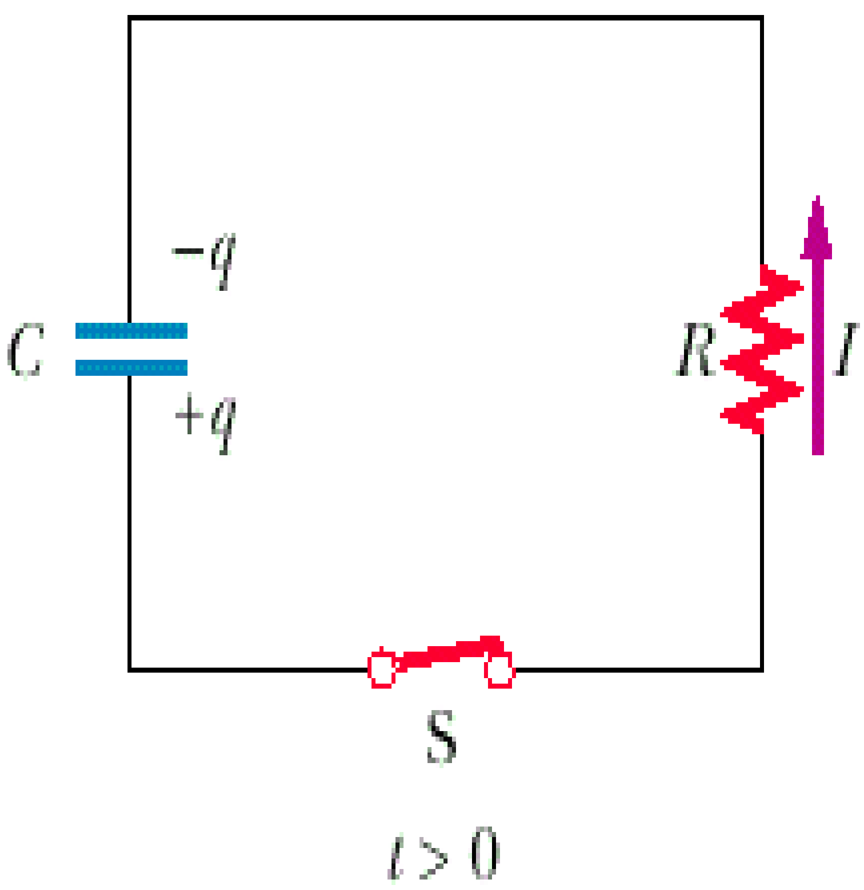
$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC}$$





Descarga de un Circuito RC

- Aplicamos la regla de Kirchhoff's a partir del instante en que se cierra el interruptor S, considerando que ahora E=0:



$$-\frac{q}{C} - IR = 0$$

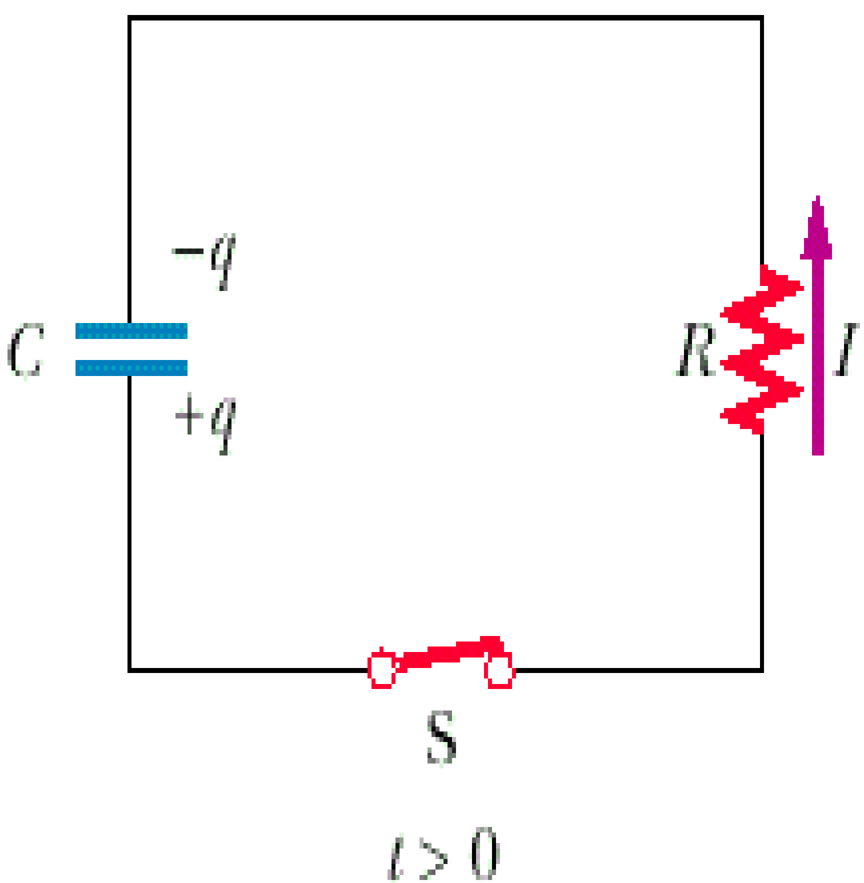
y reemplazando I=dq/dt, tenemos:

$$-R\frac{dq}{dt} = \frac{q}{C}$$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\,dt$$

Descarga de un Circuito RC

- Ahora la condición de borde para integrar, es que en t=0; q=Q:

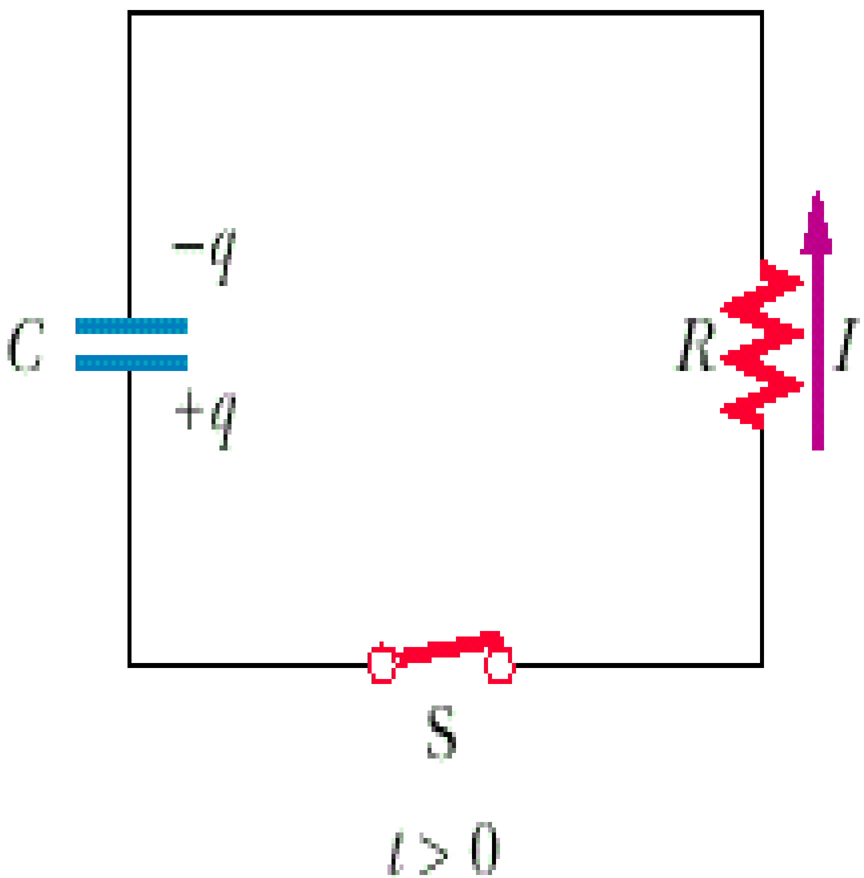


$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\,dt$$

$$\int_Q^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

Descarga de un Circuito RC

- Ahora la condición de borde para integrar, es que en t=0; q=Q:



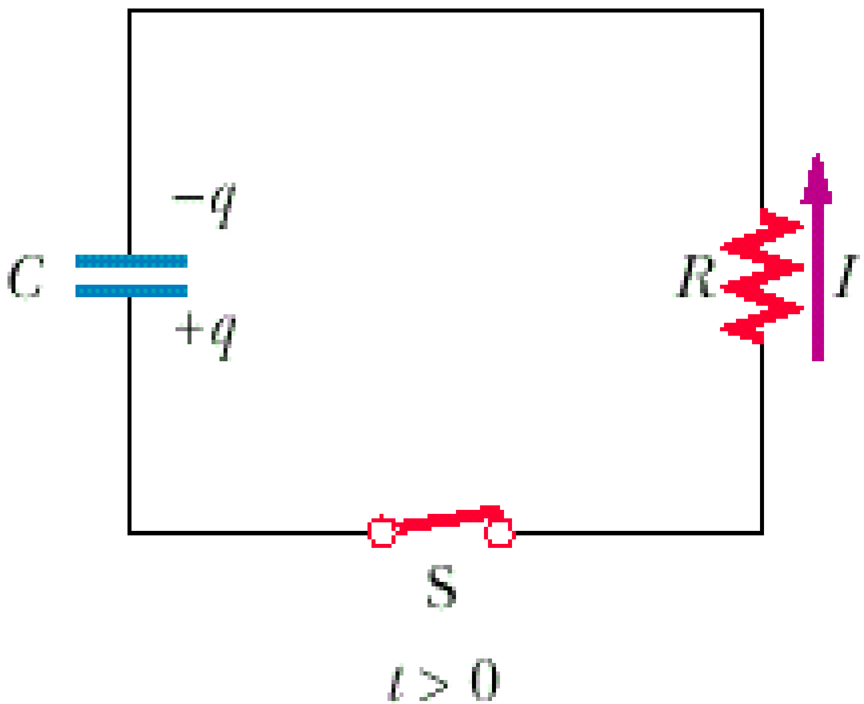
$$\int_Q^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{q}{Q}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$q(t) = Qe^{-t/RC}$$

Descarga de un Circuito RC

- Usamos la definición de corriente I=dq/dt, para obtener:



$$q(t) = Qe^{-t/RC}$$

con Io=Q/(RC) corriente inicial

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Qe^{-t/RC}\right) = -\frac{Q}{RC}e^{-t/RC}$$