

EJEMPLO BIOLÓGICO

Variación de la concentración sanguínea de glucosa

La infusión de glucosa por vía intravenosa es una técnica médica importante. La concentración de glucosa en el torrente sanguíneo dependerá de:

- la cantidad de glucosa inyectada
- la cantidad de glucosa presente en el paciente,

y variará en función del tiempo transcurrido.

Variación de la concentración sanguínea de glucosa

Para estudiar este proceso, definimos $G(t)$ como la cantidad de glucosa presente en el torrente sanguíneo de un paciente a tiempo t .

Suponga que la glucosa se suministra al sistema sanguíneo a un ritmo constante de c gramos por minuto. Al mismo tiempo la glucosa se metaboliza y se separa de la sangre a una tasa proporcional a la cantidad de glucosa presente. Entonces la función $G(t)$ satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{dG(t)}{dt} = c - a \cdot G(t)$$

¿orden?

¿grado?

Donde a es una constante propia del paciente, y corresponde a la velocidad de metabolización de glucosa.

Para resolver esta ecuación diferencial, en primer lugar debemos separar las variables, de tal forma de dejar la ecuación en cuadratura, esto es, lista para ser integrada.

$$\frac{dG(t)}{c - aG(t)} = dt$$

En este caso, la variable dependiente se dejó al lado izquierdo, y la independiente al lado derecho de la ecuación.

$$\int \frac{dG(t)}{c - aG(t)} = \int dt$$

Integrando a ambos lados de la ecuación:

$$-\frac{1}{a} \ln(c - aG(t)) = t + K$$

Donde K es una constante aditiva arbitraria de integración.

Hasta aquí hemos determinado la solución general del problema. Para obtener la solución particular del problema, necesitamos determinar el valor de K, esto es, debemos definir las condiciones de borde del problema.

La condición inicial en este problema es:

En $t = 0$, la cantidad de glucosa en el torrente sanguíneo es igual a la cantidad inicial del el paciente, G_0 .

Este dato lo podemos reemplazar en la solución general, para obtener el valor de la constante K .

$$-\frac{1}{a} \ln(c - aG_0) = 0 + K$$

$$\boxed{-\frac{1}{a} \ln(c - aG_0) = K}$$



**Número real
característico de cada
paciente**

Reemplazando el valor de K en la solución general, obtenemos la solución particular para nuestro problema:

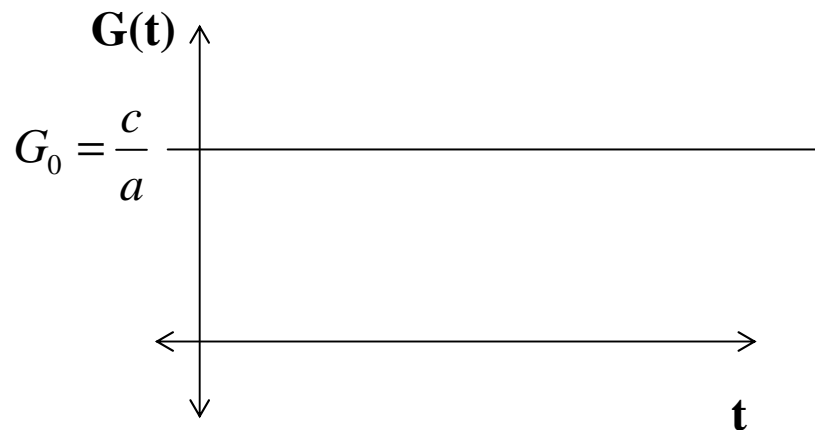
$$\boxed{G(t) = \frac{c}{a} - e^{-at} \left[\frac{c}{a} - G_0 \right]}$$

La velocidad de infusión de glucosa (c) la define el médico tratante, y es el parámetro que permite manejar el efecto del tratamiento sobre el paciente.

¿Cuál es la interpretación biológica de este resultado?

Analicemos los casos posibles.....

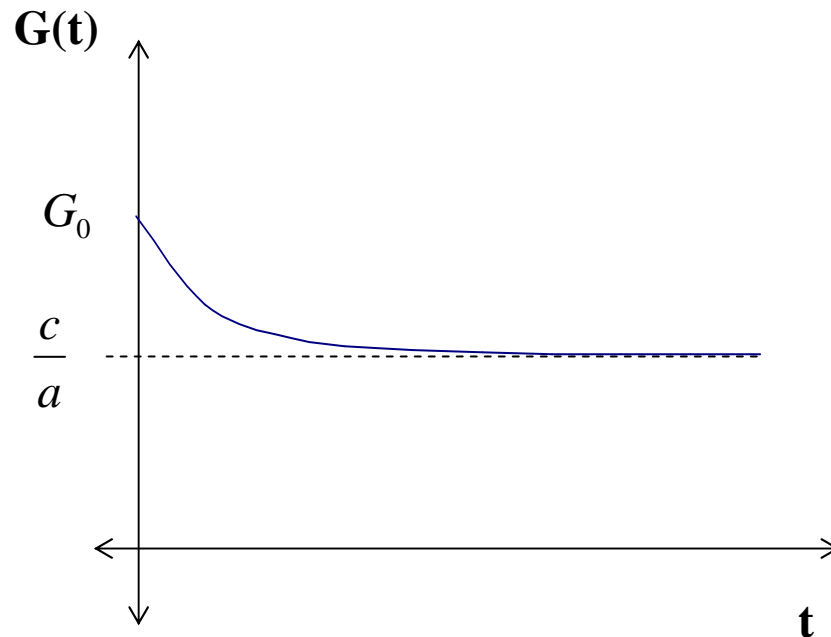
Caso 1: $G_0 = \frac{c}{a} \quad \rightarrow \quad G(t) = \frac{c}{a} = cte$



La cantidad de glucosa en la sangre del paciente permanece constante en el tiempo, y su valor corresponde a la razón entre la velocidad de infusión y la velocidad de metabolización de la glucosa.

¿Cuál es la interpretación biológica de este resultado?

Caso 2: $G_0 < \frac{c}{a} \quad \rightarrow \quad \frac{c}{a} - G_0 > 0$

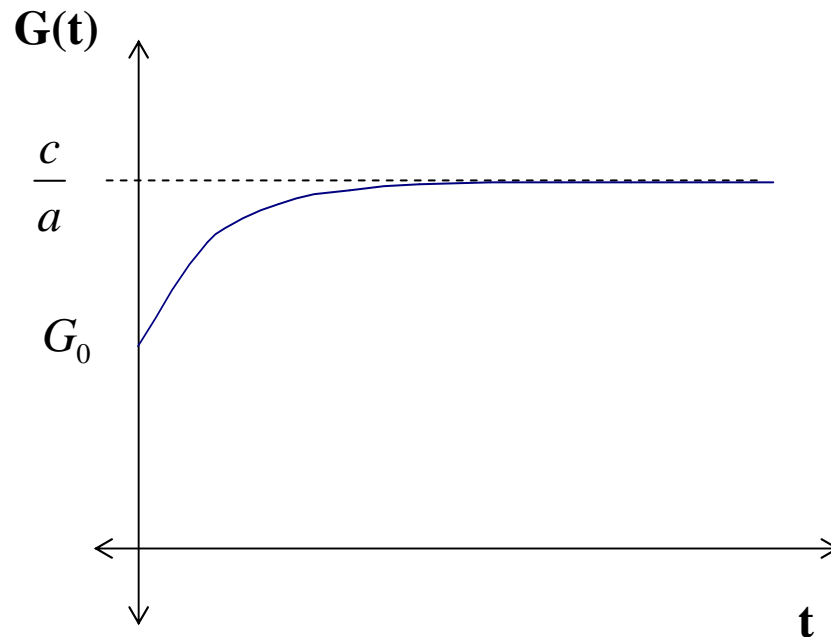


A medida que avanza el tiempo, la glicemia disminuye, pudiendo alcanzar valores peligrosos, en los cuales el paciente alcanza una hipoglicemia.

Conociendo el modelo matemático, se puede determinar el tiempo máximo de infusión de glucosa a ese ritmo tal que el paciente no alcance la hipoglicemia.

¿Cuál es la interpretación biológica de este resultado?

Caso 3: $G_0 > \frac{c}{a} \quad \rightarrow \quad \frac{c}{a} - G_0 < 0$



A medida que avanza el tiempo, la glicemia aumenta, pudiendo alcanzar valores elevados que no son peligrosos para la salud del paciente, dentro de determinado rango.

Si en un servicio de urgencia Ud. debiera atender a un paciente en shock, qué nivel de glucosa inyectaría, considerando los tres casos analizados?

Ejercicio 1:

Una partícula se mueve sobre una trayectoria rectilínea, con una aceleración constante igual a

$\frac{dv}{dt} = a \left[\frac{m}{\text{seg}^2} \right]$ Si en el instante $t_0 = 0$, $v(0) = v_0$, $S(0) = S_0$ obtenga:

- (a) *La expresión matemática que relaciona la rapidez de la partícula en función del tiempo, esto es, $v = f(t)$.*
- (b) *La ecuación del itinerario de la partícula, es decir $S(t)$.*
- (c) *En los resultados anteriores, suponga $a = g = \left[\frac{m}{\text{seg}^2} \right]$ $v_0 = 5 \left[\frac{m}{\text{seg}} \right]$ $S_0 = 0 [m]$
¿Cuáles son las ecuaciones que se obtienen ahora?*
- (d) *De acuerdo al resultado obtenido en el punto c) haga una descripción completa del movimiento de la partícula.*

Ejercicio 2:

La velocidad de desintegración de un elemento radioactivo es proporcional a la cantidad de sustancia existente en cada instante.

- (a) Encuentre la ecuación funcional que relaciona la cantidad de sustancias radioactiva existente, en función del tiempo de desintegración. Establezca condiciones iniciales.
- (b) Haga un esquema de la relación encontrada en el punto anterior.
- (c) Interprete y discuta el esquema obtenido en el punto b). ¿Es buen modelo de una situación real?
- (d) Se llama vida media de una sustancia radioactiva, al tiempo necesario para que la cantidad inicial de sustancia, se reduzca a la mitad. Encuentre la expresión matemática de la vida media de una sustancia radioactiva.
- (e) ¿Es constante la vida media de una sustancia radioactiva? ¿De qué depende?
- (f) Aparte de ser el tiempo necesario para que la cantidad inicial de sustancia radioactiva se reduzca a la mitad ¿Qué otro significado se le puede atribuir a la vida media de la sustancia radioactiva?