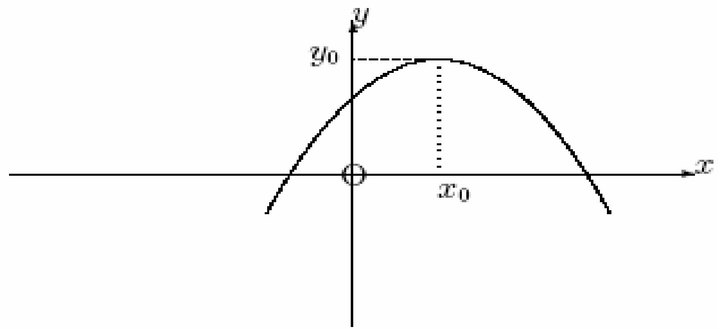
Análisis de curvas utilizando derivadas

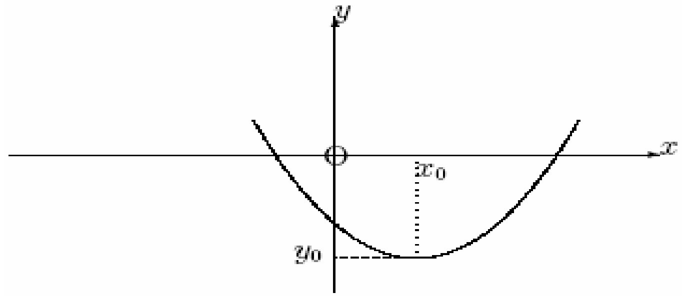
Valores extremos



f(x) tiene un máximo local en x_o si:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in |a,b|$$

f(x) tiene un máximo local en x_o si:



$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in |a,b|$$

<u>Observación:</u>

En estos casos la pendiente de la tangente en el punto (x_o , f(x_o)) es igual a cero.

A dichos puntos se llaman "<u>puntos críticos</u>".

<u>Definición.</u>

Un valor crítico es un valor en el cual la pendiente de la curva es cero o indefinida. Estos valores son posibles "candidatos a": máximo, mínimo o inflexión.

Para hallar los valores críticos de f(x) seguimos los siguientes pasos:

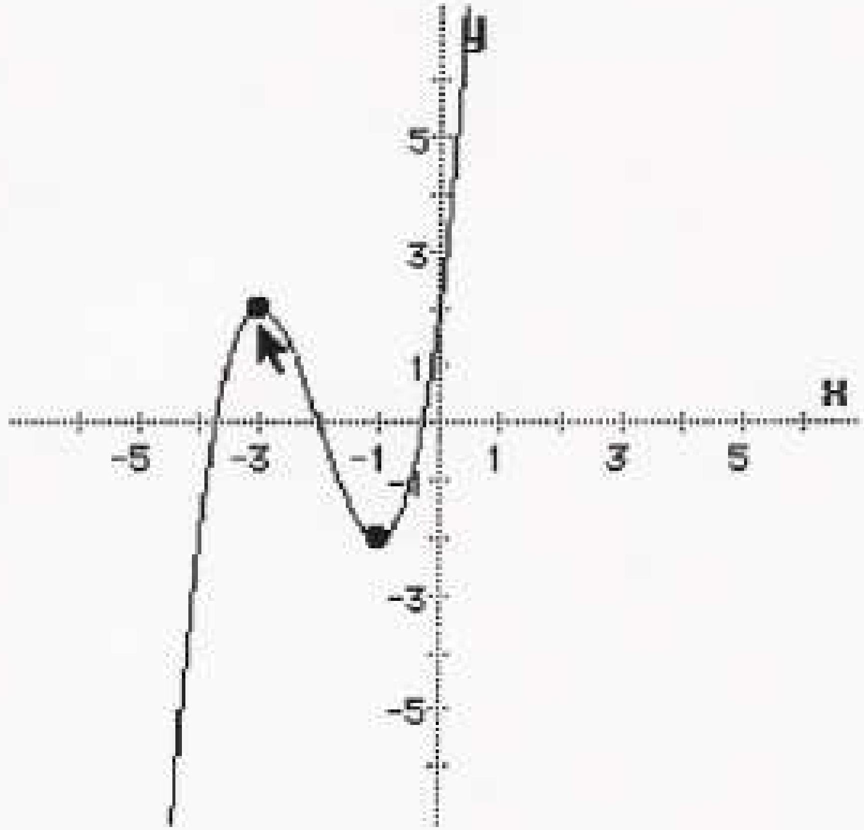
1) **Hallar f '(x)**
2) **Resolver la ecuación f '(x) = 0**

Laboratorio de Gráficos. Puntos Críticos:

$$y = 1x^3 + 6x^2 + 9x + 2$$

$$y' = 3x^2 + 12x + 9 = 0$$

Los puntos críticos son:
(-1.0, -2.0) y (-3.0, 2.0)



Nota: Si $\sqrt{b^2 - 4ac}$ en una ecuación cuadratica es menos que cero, las raíces de la ecuación son imaginaria y no aparecen en el gráfico.

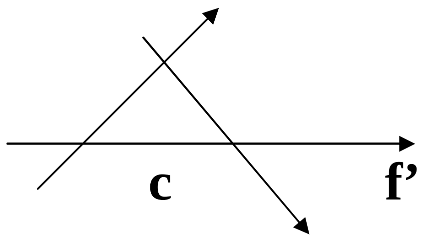
¿Cómo determinar si en un punto crítico existe un máximo o un mínimo?

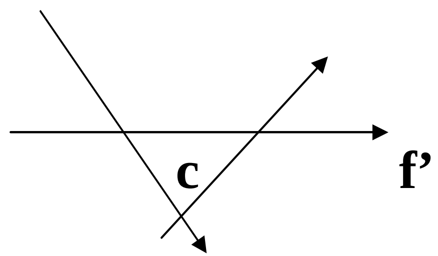
<u>Criterio de la primera derivada.</u>

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo, y supóngase que $f'(x)$ existe en todos los puntos en el intervalo excepto posiblemente para en punto crítico c.

i) Si $f'(x) > 0$ a la izquierda de c y $f'(x) < 0$ a la derecha de c, entonces en c existe un valor máximo local.

ii) Si $f'(x) < 0$ a la izquierda de c y $f'(x) > 0$ a la derecha de c, en c existe un mínimo local.





En x=c hay un máximo **En x=c hay un mínimo**

En resumen:

1) **Determinar f' (x)**
2) **Determinar los puntos críticos: f' (x) = 0 ó f' (x) se indefina**
3) **Aplicar el criterio de la primera derivada.**

Ejemplo:

Analizar la curva definida por: $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$

Criterio de la segunda derivada.

Sea c un valor crítico de una función f en la cual $f'(c) = 0$ y $f'(x)$ existe dentro de determinado intervalo.

Si $f''(c)$ existe se cumple que:

i) Si $f''(c) > 0$ entonces en $x = c$ existe un mínimo local.

ii) Si $f''(c) < 0$ entonces en $x = c$ existe un máximo local.

Observación.

Si $f''(c) = 0$ el criterio no entrega información.

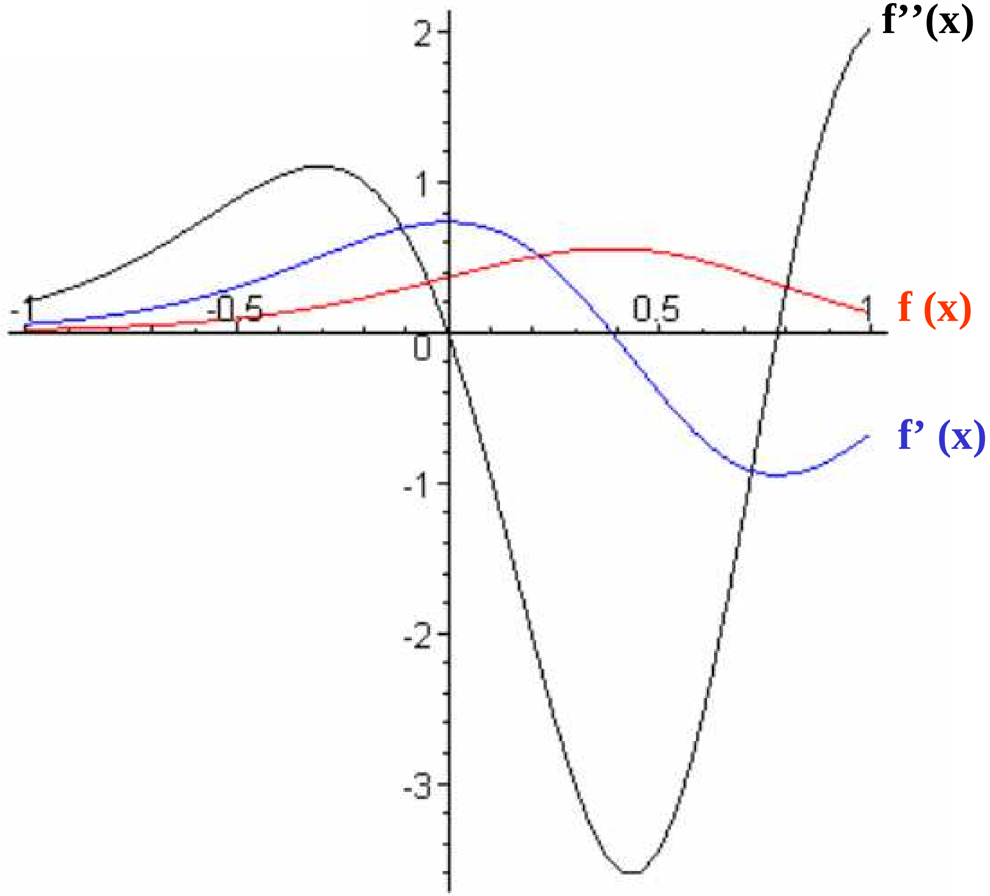
Luego en este caso se debe acudir al criterio de la primera derivada.

En resumen:

1) **Obtener f’ (x)**
2) **Identificar los puntos críticos**
3) **Obtener f’’ (x)**
4) **Evaluar f’’ (x) en cada punto crítico**
5) **Aplicar criterio de la segunda derivada**

Ejemplo.

Analizar la curva $f(x) = x(x-1)^2$

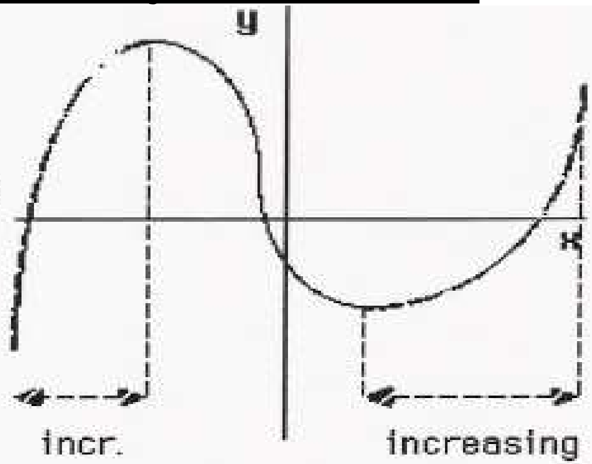


f''(x)
f (x)
f' (x)
2
1
0
-1
-2
-3
-1
-0.5
0.5
1

Funciones crecientes y decrecientes.

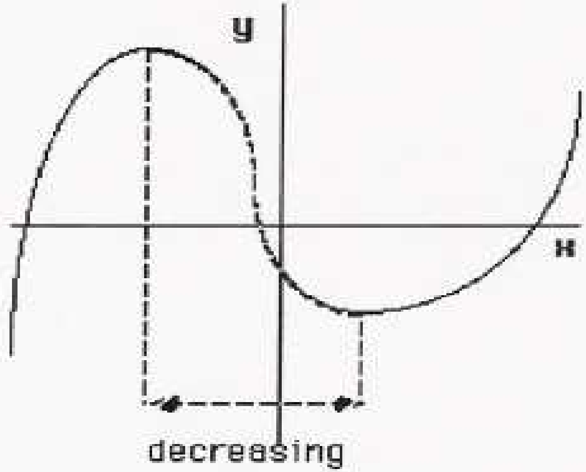
Una función es **creciente** cuando la pendiente es mayor que cero:

$$f'(x) > 0$$



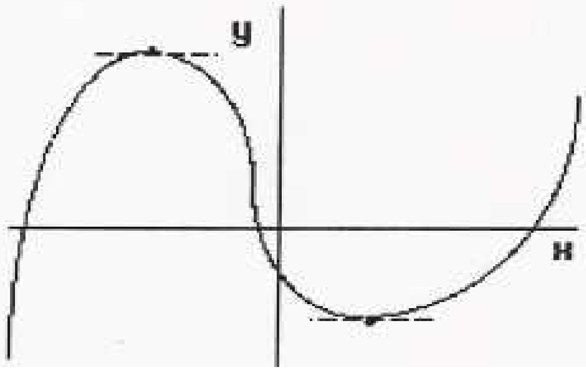
Una función es **decreciente** cuando la pendiente es menor que cero:

$$f'(x) < 0$$



En un **punto crítico**, $f(x)$ no es creciente ni decreciente:

$$f'(x) = 0$$



Encontrando intervalos crecientes o decrecientes:

Ejemplo: $y = x^3 - 12x$

$y' = 3x^2 - 12$

Cuando $y' = 3x^2 - 12 = 0$, entonces $x = \pm 2$.

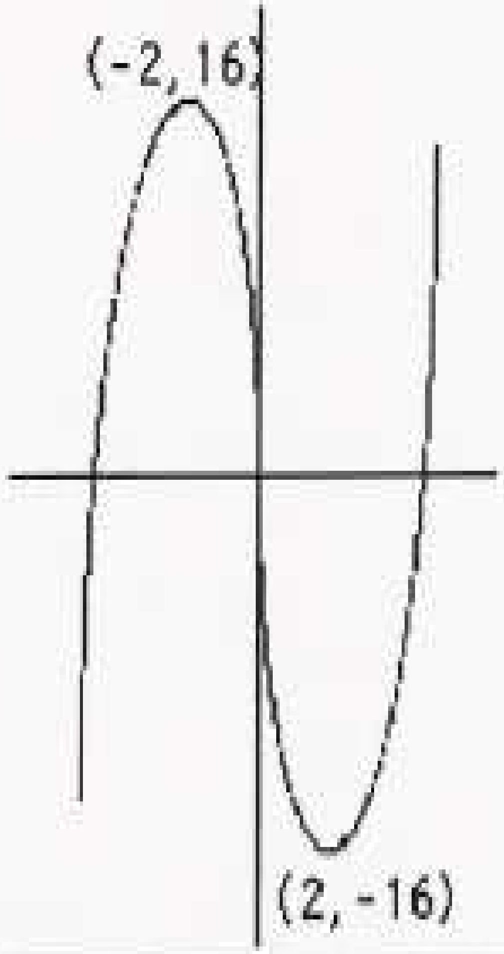
Los puntos críticos son; $x = 2$ y $x = -2$.

Las tres regiónes qué nos interesan son:

$\underline{x < -2}$	$\underline{-2 < x < 2}$	$\underline{x > 2}$

En cada región se reemplaza:

$x = -3$	$x = 0$	$x = 3$
$y' = 15$	$y' = -12$	$y' = 15$
y es **creciente**	y es **decreciente**	y es **creciente**

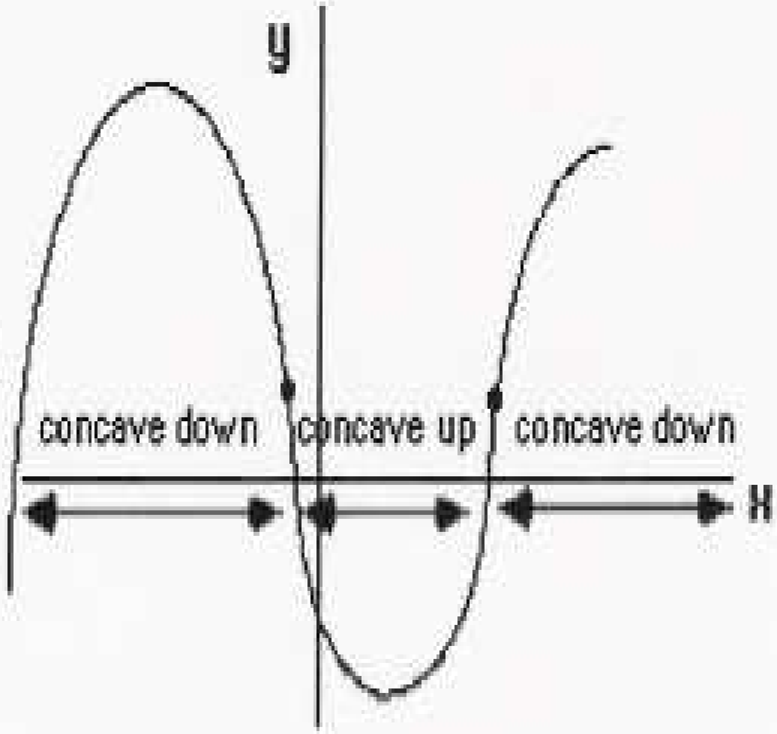


Concavidad:

La **concavidad** de una curva depende del signo de la **segunda derivada**.

Cuando $\mathbf{f''(x) > 0}$, la curva es **cóncava hacia arriba**; $f'(x)$ es creciente.

Cuando $\mathbf{f''(x) < 0}$, la curva es **cóncava hacia abajo**; $f'(x)$ es decreciente



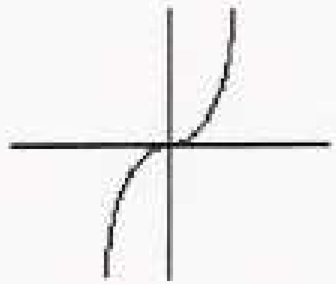
Puntos de Inflexión:

Puntos de inflexión ocuren cuando existe un cambio de concavidad.
Esto requiere qué $f''(x) = 0$. **(Condición necesaria pero no suficiente)**

Algunos puntos de inflexión, pero no todos, son también puntos críticos (donde $f'(x) = 0$).

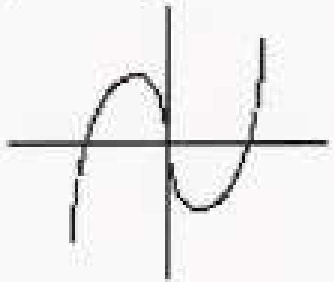
$y = x^3$

$x = 0$; $y'(0) = y''(0) = 0$



$y = x^3 - 3x$

$x = 0$: $y''(0) = 0$, en cambio $y'(0) = -3$



Para identificar un punto de inflexión:

i) Si $f''(x_0) = 0$ ➔ x_0 es un posible punto de inflexión

ii) Si se evalúa $f''(x)$ antes y después de x_0 (punto "candidato") y existe cambio de signo, ➔ x_0 corresponde a un punto de inflexión.

iii) Alternativa: evaluar $f'''(x_0)$, si $f'''(x_0) \neq 0$ ➔ x_0 es punto de inflexión.

¡Cuidado!: criterio similar a máximos y mínimos, pero "desplazado" en una derivada.

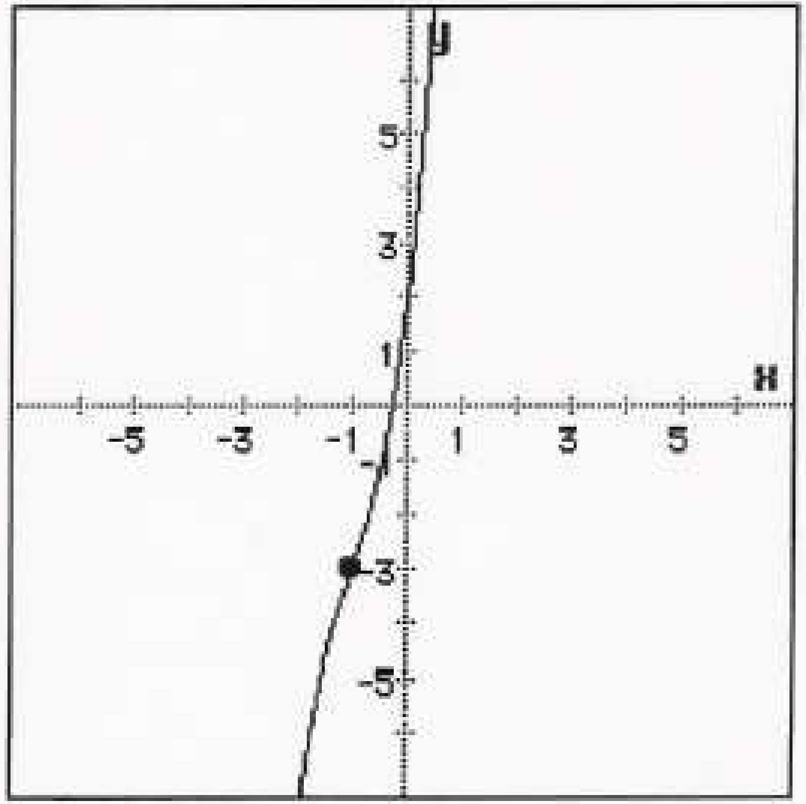
Laboratorio de gráficos: Puntos de Inflexión:

$$y = 2x^3 + 6x^2 + 9x + 2$$

$$y'' = 12x + 12 = 0$$

El punto de inflección es:

(-1.00, -3.0)



<u>Ejemplo:</u> determinar la concavidad y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Ejercicio: dada la siguiente curva, determine los puntos máximos, mínimos y de inflexión e indique la gráfica.

$$y = x^4 - 4x^2$$