Sucesiones y límites.

Def: Una **sucesión** es una función cuyo dominio es IN.

$f : IN \Rightarrow IR$

$1 \longrightarrow f(1)=a_1$

$2 \longrightarrow f(2)=a_2$

.

$n \longrightarrow f(n)=a_n$ (Término enésimo de la sucesión)

Ejemplo:

1) Sea la sucesión: $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ Rec a_n = {0, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, ...}

2) Sea la sucesión: $a_n = 2n$ Rec a_n = {2, 4, 6…}

¿Qué ocurre gráficamente?; ¿Existe una "cota"?

¿Cuál es la tendencia?; ¿Qué ocurre cuando $n \Rightarrow \infty$?

En 1) los valores de a_n se acercan a 1 (La suc. convergen a 1)

Matemáticamente, se anota: $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$

En 2) los valores de a_n no convergen a un valor (La suc. Diverge)

<u>Definición</u>: Sea a_n una sucesión real, entonces:

i) a_n es monótona estrictamente creciente si $a_n < a_{n+1}$ $\forall$ n $\in$ IN

ii) a_n es monótona creciente si $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall$ n $\in$ IN

iii) a_n es monótona estrictamente decreciente si $a_n > a_{n+1}$ $\forall$ n $\in$ IN

iv) a_n es monótona decreciente si $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall$ n $\in$ IN

v) a_n es monótona si a_n es creciente o decreciente.

vi) A_n es oscilante si $a_{n+1} \geq a_n$ y $a_{n+1} \geq a_{n+2}$

Ejemplos:

1) $a_n = n + 1$
2) $a_n = 5 – 2n$
3) $a_n = (n – 3)^2$
4) $a_n = (-1)^n$
5) $a_n = (-1)^n /n$

¿Existe límite cuando a_n es creciente y acotada?
¿Existe límite cuando a_n es decreciente y acotada?
¿Existe límite cuando a_n es oscilante?

Definición: límite de a_n.

$$lim_{n\to\infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N / \forall n > N$$

Se cumple que $|a_n - l| < \varepsilon$

El valor de “l” corresponde a la cota de la sucesión.

ε = “Epsilon” es la distancia más pequeña que se puedan imaginar, lo más cerca que se puede estar de un punto sin llegar a tocarlo (1/∞ número infinitesimalmente pequeño, distinto de 0)

$\varepsilon \in R \Rightarrow$

“El límite de a_n cuando n tiende a infinito existe si y sólo si para todo epsilon positivo existe un nº natural N tal que para todos los nº naturales mayores que N se cumpla que:

$$|a_n - l| < \varepsilon$$

Analicemos las siguientes sucesiones:

1) $$a_n = \frac{n+1}{n-1}$$

2) $$a_n = \frac{1}{n^2}$$

3) $$a_n = 2^n$$

Límite de funciones reales.

Definición: sea f(x) una función real, entonces

cuando $lim_{x\to c} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / \left| f(x) - l \right| < \varepsilon$

Esto significa que el límite de una función existe si y sólo si $0 < \left| x - c \right| < \delta$ es infinitesimalmente pequeño cuando $\left| f(x) - l \right|$ es menor que otro valor pequeño.

En otras palabras, el límite de f(x) existe si al evaluar la función en un valor de x muy cercano a c ésta toma un valor "casi" igual al límite.

$\left| x - c \right|$

Gráficamente:

El límite de una función existe siempre y cuando los límites laterales existan y éstos sean iguales entre sí.

$$lim_{x \to c} f(x) = l \Leftrightarrow lim_{x \to c^-} f(x) = l \wedge lim_{x \to c^+} f(x) = l$$

<u>Ejemplo 1.</u>

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x > 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

<u>Ejemplo 2.</u>

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Algunas Indeterminaciones en límites

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0\times\infty \qquad \infty-\infty \qquad 0^{0} \qquad \infty^{0} \qquad 1^{\infty}$$

Algunos límites importantes

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \qquad lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$$

$$lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e \qquad lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

$$lim_{x\to\infty}e^{-x}=0 \qquad lim_{x\to o}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$$

Propiedades de límite

1) $$\boxed{lim_{x\to a} k = k}$$ (Límite de una función constante)

2) $$\boxed{lim_{x\to a} x = a}$$

3) $$\boxed{lim_{x\to a} k * f(x) = k * lim_{x\to a} f(x)}$$

4) $$\boxed{lim_{x\to a}\left(f(x) + g(x)\right) = lim_{x\to a} f(x) + lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2}$$

$$\boxed{lim_{x\to a}(f(x) * g(x)) = L_1 * L_2}$$

$$\boxed{lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L_1}{L_2}, L_2 \neq 0}$$

5) $$\boxed{lim_{x\to a} x^n = a^n}$$

Propiedades de límite

6) $$\boxed{\lim_{x\to a} P(x) = P(a)}$$ (límite de un polinomio)

7) $$\boxed{\lim_{x\to a} x^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}}$$ (límite de una función racional)

8) $$\boxed{\lim_{x\to a}\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) = \frac{p(a)}{q(a)}; q(a) \neq 0}$$

9) $$\boxed{\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(L); \lim_{x\to a} g(x) = L}$$

10) Si f(x) = g(x) $\forall x \in \left]a-\varepsilon, a+\varepsilon\right[$ y $\lim_{x\to a} f(x) = L$ entonces

$$\boxed{\lim_{x\to a} g(x) = L}$$

Aplicación.

Supongamos que la temperatura de cierta solución, t horas después de ser colocada en un congelador, viene dada por

$$T(t) = 70 - 12t + 4/(t+1)$$

con T medido en grados, donde $0 \leq t \leq 5$. Encuentra a qué valor se aproxima la temperatura a:

a) 2 horas.

b) 3 horas y 20 minutos.

c) 4 horas y 50 minutos.

Ejercicios.

Evalúe los siguientes límites usando propiedades.

1) $$lim_{x\to 5}\left(\frac{x^2-25}{x^2-2x-15}\right)$$

2) $$lim_{h\to \infty}\left(\frac{(x+h)^3-x^3}{h}\right)$$