Vectores

Material de estudio para alumnos

2007

Índice general

Capítulo 1

Introducción al álgebra vectorial

1.1. Definiciones

Una cantidad *escalar* es una que tiene magnitud, pero no está relacionada a una dirección en el espacio.
Ejemplos: Masa, rapidez, área, trabajo.

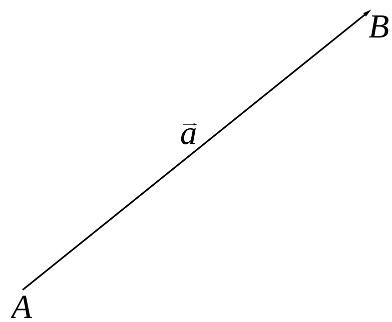
Una cantidad *vectorial* es una que está especificada tanto por una magnitud como por una dirección en el espacio.
Ejemplos: Velocidad, peso, aceleración.

Una cantidad vectorial con un punto dijo de aplicación se llama *vector posición.*

Una cantidad vectorial que está restringida a una línea fija de acción se llama *vector línea.*

Una cantidad vectorial que se define sólo por su magnitud y dirección se llama *vector libre.*

Nota: Excepto si se avisa explícitamente, todos los vectores de aquí en adelante serán vectores libres.



Una cantidad vectorial puede representarse mediante un segmento de línea recta dirigido en el espacio (con una flecha), cuya dirección es aquella del vector y cuyo largo representa su magnitud mediante una escala apropiada.

Los símbolos $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}, \ldots$ se usarán para denotar vectores de magnitudes a, b, $c, \ldots$

A veces usaremos $\overrightarrow{AB}$ para el vector dibujado desde el punto A al punto B.

Notas:

1. La magnitud del vector $\overrightarrow{AB}$ es el largo de la línea AB. También puede ser denotado por el símbolo $|AB|$.

2. La magnitud del vector $\vec{a}$ es el número a. También puede ser denotado por el símbolo $|\vec{a}|$.

Un vector cuya magnitud es 1 se llama *vector unitario.* El símbolo $\hat{a}$ denota a un vector unitario en la misma dirección que $\vec{a}$. Un vector cuya magnitud es cero se llama *cero vector* y se denota por $\vec{0}$. Tiene dirección indeterminada.

Dos vectores (libres) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se dicen *iguales* si tienen la misma magnitud y dirección.

Nota: Dos segmentos de recta dirigidos que son paralelos y de longitud igual representan exactamente al mismo vector.

Un vector cuya magnitud es la de $\vec{a}$ pero de dirección opuesta se denota por $-\vec{a}$.

1.2. Adición y substracción de vectores

Definimos la suma de dos vectores arbitrarios diagramáticamente usando un paralelogramo o un triángulo. Esto nos llevará a la definición de la substracción de dos vectores.

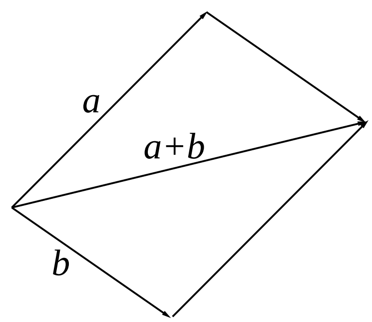


Figura 1.1: Ley del paralelogramo

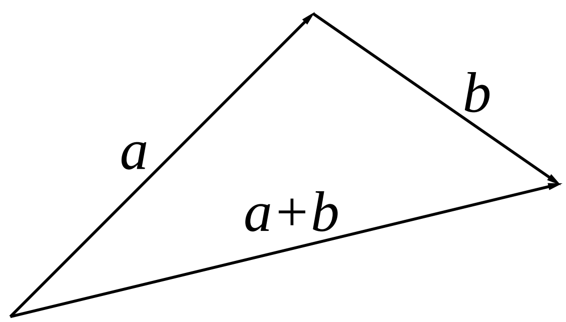


Figura 1.2: Ley del triángulo

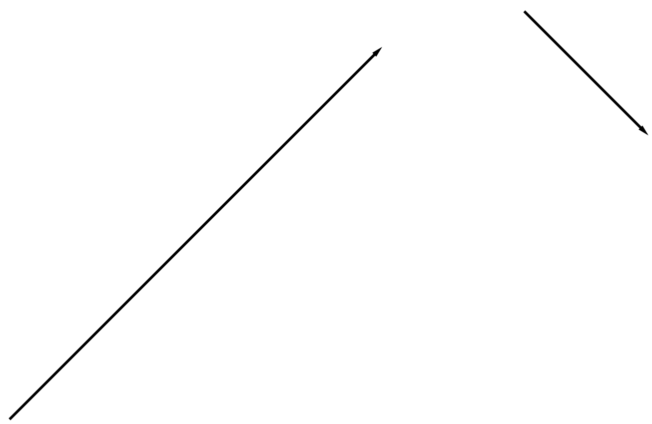
Notas:

1. La ley del triángulo se usa mucho más que la del paralelogramo. $\vec{a}$ y $\vec{b}$ recorren el triángulo en *el mismo* sentido. $\vec{a}+\vec{b}$ lo recorre en sentido *opuesto.*

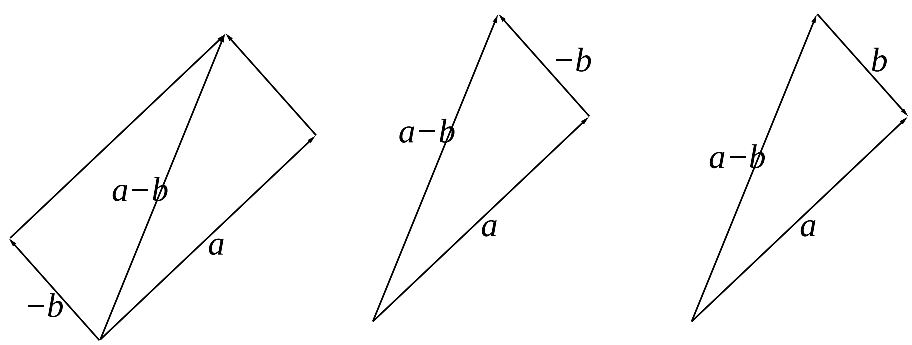
2. Para definir la substracción, usamos
$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right).$$

1.2.1. Ejemplo

Determinar $\vec{a} - \vec{b}$ para los siguientes vectores:



Solución Podemos construir los siguientes diagramas



Observaciones

I Para determinar $\vec{a} - \vec{b}$, se requiere que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ recorran el triángulo en sentidos *opuestos* mientras que $\vec{a} - \vec{b}$ recorre el triángulo en el mismo sentido que $\vec{b}$.

II La suma de tres vectores que recorren los lados del triángulo en el mismo sentido es el cero vector.

1.3. Multiplicación de un vector por un escalar

Si m es un número real positivo cualquiera, $m\vec{a}$ se define como un vector en la misma dirección de $\vec{a}$, pero de m veces su magnitud.

$-m\vec{a}$ es un vector en la dirección *opuesta* a $\vec{a}$, pero de m veces su magnitud.

Nota: $\vec{a} = a\hat{a}$ y de ahí

$$\frac{1}{a}\vec{a} = \hat{a}$$

Si un vector se multiplica por el inverso de su magnitud, obtenemos un vector unitario en la misma dirección. Este proceso se llama *normalizar un vector.*

1.4. Leyes del álgebra que obedecen los vectores

1. Ley conmutativa de la adición

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

2. Ley asociativa de la adición

$$\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

3. Ley asociativa de la multiplicación por escalar

$$m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a} = mn\vec{a}.$$

4. Leyes distributivas de la multiplicación por escalar

$$(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$$

y

$$m\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = m\vec{a} + m\vec{b}$$

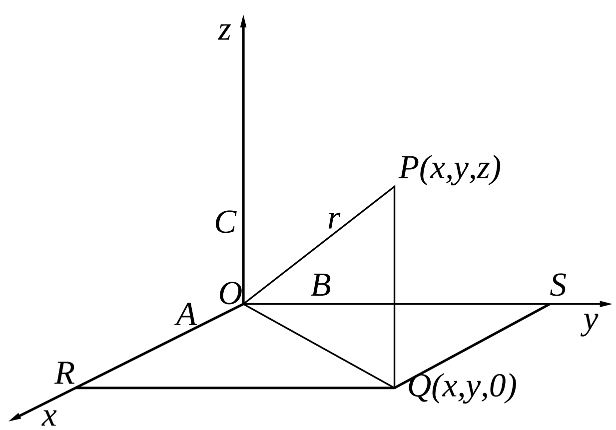
Capítulo 2

Vectores por componente

2.1. Las componentes de un vector

Los vectores en el espacio se definen en términos de *vectores unitarios* puestos a lo largo de los ejes x, y y z en un sistema de referencia cartesiano. Estos vectores unitarios serán denotados respectivamente por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ (omitimos las flechas y los sombreritos).

Consideremos el siguiente diagrama



En el diagrama, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{i}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{j}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{k}$. P es el punto con coordenadas (x, y, z).

Por la ley del triángulo,

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP}.$$

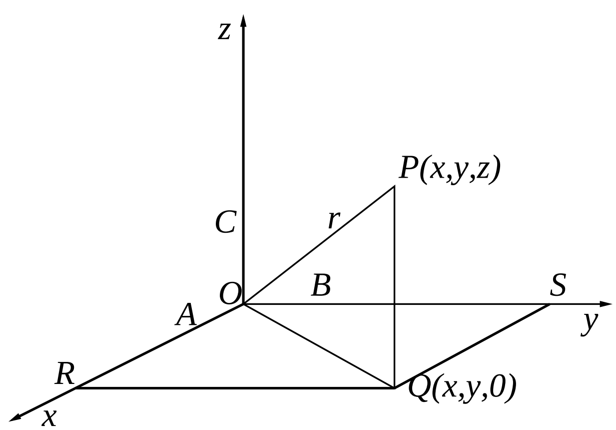
Es decir,

$$\vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Nota: Los vectores que parten del origen no son un caso especial dado que estamos usando vectores libres. Sin embargo, $\overrightarrow{OP}$ es llamado el vector posición del punto P.

Los números x, y y z son llamados las *componentes* de $\overrightarrow{OP}$ (o de cualquier otro vector en el espacio con la misma magnitud y dirección que $\overrightarrow{OP}$).

2.2. La magnitud de un vector por componentes



Por el teorema de Pitágoras,

$$(OP)^2 = (OQ)^2 + (QP)^2 = (OR)^2 + (RQ)^2 + (QP)^2.$$

Es decir,

$$r = |x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

2.2.1. Ejemplo

Determine la magnitud del vector

$$\vec{a} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y obtenga un vector unitario en la misma dirección.

Solución

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{30}.$$

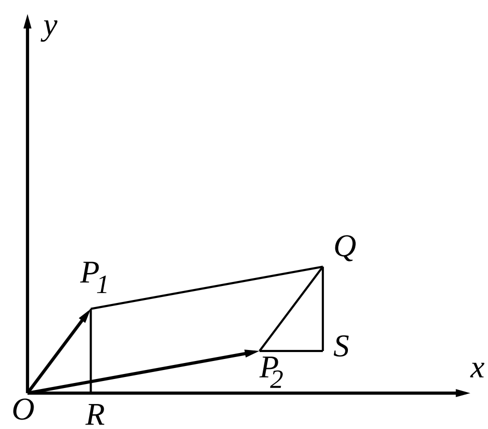
Un vector unitario en la misma dirección que $\vec{a}$ se obtiene normalizando $\vec{a}$, es decir, dividiéndolo por su propia magnitud.

El vector unitario requerido es

$$\hat{a} = \frac{1}{a}\vec{a} = \frac{5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{30}}.$$

2.3. La suma y diferencia de vectores por componente

Consideremos una situación en dos dimensiones primero



En el diagrama, supongamos que P_1 tiene coordenadas (x_1, y_1) y P_2 tiene coordenadas (x_2, y_2).

El $\triangle ORP_1$ es congruente con $\triangle P_2SQ$. Por lo tanto, las coordenadas de Q deben ser $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

Por la ley del paralelogramo, $\overrightarrow{OQ}$ es la suma de $\overrightarrow{OP_1}$ y de $\overrightarrow{OP_2}$. Es decir,

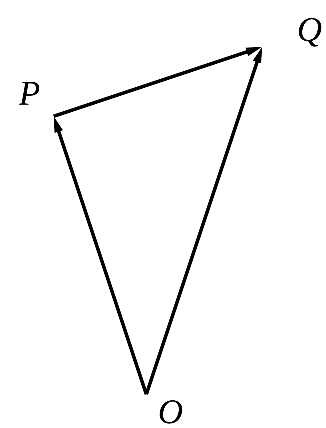
$$(x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}) + (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}) = (x_1 + x_2)\mathbf{i} + (y_1 + y_2)\mathbf{j}$$

Puede demostrarse que este resultado también es cierto en tres dimensiones.

Para encontrar la diferencia de dos vectores, calculamos la diferencia de sus componentes.

2.3.1. Ejemplo

Dos puntos P y Q en el espacio tienen coordenadas cartesianas $(-3, 1, 4)$ y $(2, -2, 5)$ respectivamente. Determine el vector $\overrightarrow{PQ}$.



Solución

$$\overrightarrow{OP} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$
$$\overrightarrow{OQ} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

Por la ley del triángulo

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \vec{OP} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Nota El vector desde el origen al punto $(5, -3, 1)$ es el *mismo* que el vector $\overrightarrow{PQ}$.

2.4. Los cosenos directores de un vector

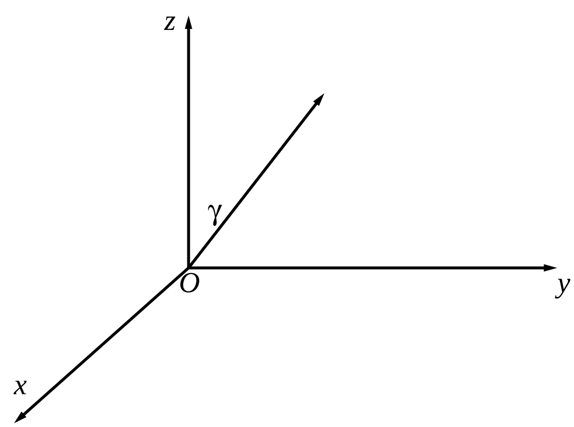
Supongamos que

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

y que $\overrightarrow{OP}$ hace ángulos α, β y γ con Ox, Oy y Oz respectivamente.

Entonces

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}.$$



$\cos\alpha, \cos\beta$ y $\cos\gamma$ se llaman los *cosenos directores* de $\vec{r}$.

Tres números cualquiera en la misma razón que los cosenos directores se dice que forman un conjunto de *razones directrices* para el vector $\vec{r}$.

$x : y : z$ es un conjunto posible de razones directrices.

Ejemplo Los cosenos directores del vector

$$6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

son

$$\frac{6}{\sqrt{41}}, \frac{2}{\sqrt{41}} \text{ y } \frac{-1}{\sqrt{41}}$$

dado que el vector tiene magnitud $\sqrt{36+4+1} = \sqrt{41}$.

Un conjunto de razones directrices para este vector es $6 : 2 : -1$.

Capítulo 3

Multiplicación de un vector por otro

3.1. El producto escalar (o punto)

3.1.1. Definición

El producto escalar, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se define como $ab \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre las direcciones de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, dibujados de modo que tengan un principio común y se dirijan hacia afuera de él.

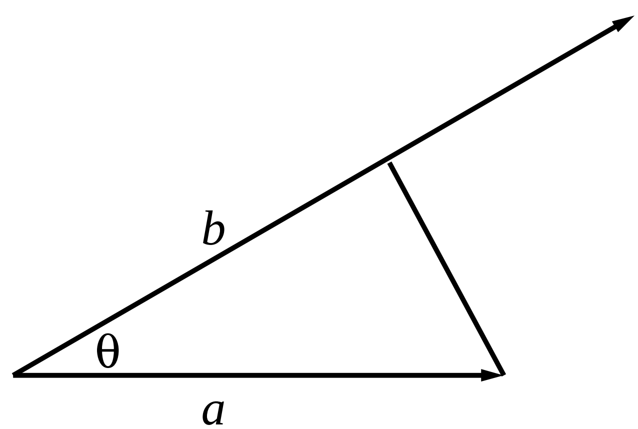


Figura 3.1: $0 \leq \theta \leq \pi$

3.1.2. Aplicación científica

Si $\vec{b}$ fuera una fuerza de magnitud b, entonces $b\cos\theta$ sería su componente a lo largo del vector $\vec{a}$. Luego $\vec{a}\cdot\vec{b}$ representa el trabajo hecho por $\vec{b}$ al mover un objeto a lo largo del vector $\vec{a}$.

3.2. Deducciones de la definición del producto punto

1. $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$

   Demostración

   $$\vec{a}\cdot\vec{a} = aa\cos 0 = a^2$$

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}$ puede interpretarse como la magnitud de un vector multiplicado por la proyección perpendicular del otro vector sobre él.

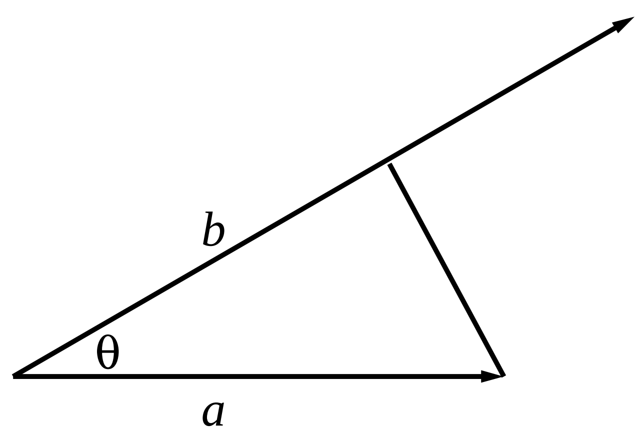


Figura 3.2: $0 \leq \theta \leq \pi$

   Demostración $b\cos\theta$ es la proyección perpendicular de $\vec{b}$ en $\vec{a}$ y $a\cos\theta$ es la proyección perpendicular de $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

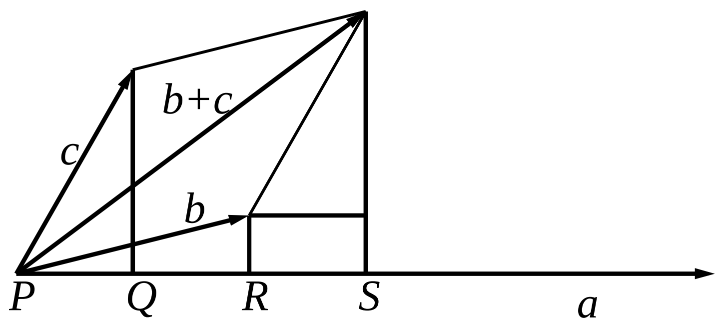
3. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

Demostración Se sigue de $ab\cos\theta = ba\cos\theta$

4. Dos vectores no nulos son perpendiculares si y sólo si su producto escalar es cero.

   Demostración $\vec{a}$ esp perpendicular a $\vec{b}$ si y sólo si $\theta = \pi/2$. Es decir, si y sólo si $\cos\theta = 0$ y por lo tanto $ab\cos\theta = 0$.

5. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$



   Demostración El resultado se sigue de 2 dado que las proyecciones PR y PQ de $\vec{b}$ y $\vec{c}$ respectivamente sobre $\vec{a}$ suman la proyección PS de $\vec{b}+\vec{c}$ sobre $\vec{a}$.

   Nota: RS mide lo mismo que PQ.

6. El producto escalar de dos cualquiera de los vectores unitarios estándar $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ está dado por la siguiente tabla de multiplicación

   Es decir, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1$ y $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$, pero $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0$ y $\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0$.

3.3. La fórmula estándar para el producto punto

Si

$$\vec{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \vec{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k},$$

·	**i**	**j**	**k**
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	0

Cuadro 3.1: Producto escalar

entonces

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Demostración Este resultado se sigue fácilmente de la tabla de multiplicación para el producto punto.

3.3.1. El ángulo entre dos vectores

Si θ es el ángulo entre los dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, entonces

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}$$

Demostración Este resultado es sólo reescribir la definición del producto escalar.

3.3.2. Ejemplo

Si

$$\vec{a} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \vec{b} = 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k},$$

entonces,

$$\cos\theta = \frac{2 \times 0 + 2 \times 3 + (-1) \times (-4)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

Por lo tanto,

$$\theta = 48{,}19^{\text{o}} \quad \text{o} \quad 0{,}84 \text{ radianes}.$$

3.4. El producto vectorial (o producto cruz)

3.4.1. Definición

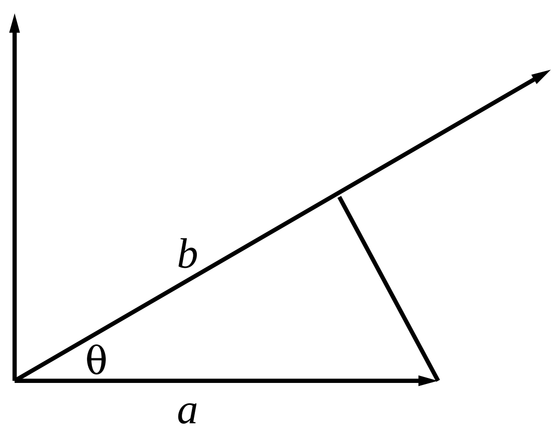
Si θ es el ángulo entre dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, dibujados de modo que partan del mismo punto, entonces el *producto vectorial* de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se define como un vector de magnitud

$$ab \operatorname{sen}\theta.$$

La dirección del producto vectorial es perpendicular al plano que contiene a $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y en un sentido que obedezca la *regla de la mano derecha* yendo desde $\vec{a}$ hasta $\vec{b}$.

El producto vectorial se denota por

$$\vec{a} \times \vec{b}.$$



3.4.2. Aplicación científica

Consideremos el diagrama 3.3

Supongamos que el vector $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ representa una fuerza actuando en el punto O y que el vector $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ es el vector posición del punto B. Sea el ángulo entre los dos vectores θ. Entonces, el *momento* de la fuerza $\overrightarrow{OA}$ en el punto B es un vector cuya magnitud es

$$ab \operatorname{sen}\theta$$

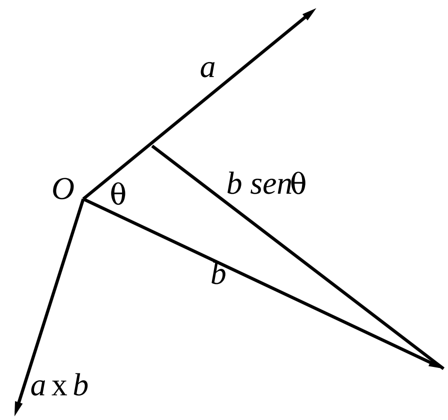


Figura 3.3: Aplicación científica

y cuya dirección es perpendicular al plano de O, A y B en un sentido que obedezca la regla de la mano derecha yendo de $\overrightarrow{OA}$ a $\overrightarrow{OB}$. Es decir,

$$\text{momento} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

3.5. Deducciones de la definición del producto cruz

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) = \left(-\vec{b}\right) \times \vec{a} = \vec{b} \times (-\vec{a})$

   Demostración Esto se sigue facilmente al considerar las implicaciones de la regla de la mano derecha.

2. Dos vectores son paralelos si y sólo si su producto cruz es el cero vector.

   Demostración Dos vectores son paralelos si y sólo si el ángulo θ entre ellos es cero o π. En cualquier caso, $\operatorname{sen}\theta = 0$, lo que significa que $ab \sin\theta = 0$, es decir, $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 0$

3. El producto cruz de un vector consigo mismo es un cero vector

Demostración
$$|\vec{a} \times \vec{a}| = a^2 \operatorname{sen} 0 = 0.$$

4. $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$

   Demostración Esto es más fácil de demostrar usando la fórmula estándar para el producto cruz por componentes.

5. La tabla de multiplicación del producto cruz de los vectores unitarios estándar **i**, **j** y **k** es

$\times$	**i**	**j**	**k**
i	0	**k**	0
j	$-$**k**	0	**i**
k	**j**	$-$**i**	0

Cuadro 3.2: Producto vectorial

3.6. La fórmula estándar para el producto cruz

Si
$$\vec{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \vec{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$
entonces
$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}.$$

Esto usualmente se abrevia
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$
El símbolo de la derecha se llama un *determinante.*

3.6.1. Ejemplos

1. Si $\vec{a} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\vec{b} = 3j - 4\mathbf{k}$, encontrar $\vec{a} \times \vec{b}$.

Solución

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = (-8+3)\mathbf{i} - (-8-0)\mathbf{j} + (6-0)\mathbf{k} =$$

$$= -5\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

2. Demostrar que, para dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cualquiera,

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = 2\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$$

Solución El lado izquierdo es

$$\vec{a} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b}.$$

Esto es

$$0 + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{a} = 2\left(\vec{b} \times \vec{a}\right).$$

3. Determine el área del triángulo definido por los vectores

$$\vec{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \vec{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Solución Si θ es el ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, entonces el área del triángulo es $\frac{1}{2}ab \operatorname{sen}\theta$ de la trigonometría elemental. El área, por lo tanto, es

$$\frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|.$$

Es decir,

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}|.$$

Esto nos da

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\sqrt{16+1+25} = \frac{1}{2}\sqrt{42} \simeq 3,24$$

Capítulo 4

Productos triples

4.1. El producto triple escalar

Definición Dados tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, expresiones como

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right),\quad \vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right),\quad \vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$
$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c},\quad \left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a},\quad \left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$$

se llaman *productos escalares triples* pues sus resultados son todos cantidades escalares.

Los paréntesis son opcionales, pues no hay ambigüedad sin ellos

Tomaremos $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ como el producto triple escalar típico.

4.1.1. La fórmula para el producto triple escalar

Supongamos que

$$\vec{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},\quad \vec{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k},\quad \vec{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}.$$

Entonces

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}\right)\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

De la fórmula básica del producto escalar, esto resulta ser

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Notas

1. Por propiedades del determinante (intercambiando filas)

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) &= -\vec{a} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{b}\right) = \vec{c} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{b}\right) = \\ &= -\vec{c} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{a}\right) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) \end{aligned}$$

Las *permutaciones cíclicas* de $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ son todas iguales en valor numérico y signo. Las permutaciones restantes son iguales a $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ en valor numérico pero de signo contrario.

2. $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ frecuentemente se denota por $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

4.1.2. Ejemplo

Evaluar el producto triple escalar, $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$, en el caso cuando

$$\vec{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}, \quad \vec{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad \vec{c} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

Solución

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2(-2) - 0(2) + 1(2) = -2$$

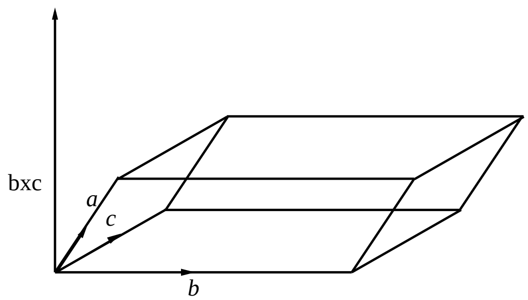


Figura 4.1: Paralelepípedo

4.1.3. Una aplicación geométrica del producto triple escalar

Supongamos que $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ yacen en tres aristas adyacentes de un paralelepípedo (ver figura 4.1).

El área de la base del paralelepípedo es la magnitud del vector $\vec{b} \times \vec{c}$ que es perpendicular a la base.

La altura perpendicular del paralelepípedo es la proyección del vector $\vec{a}$ sobre $\vec{b} \times \vec{c}$. Luego, es

$$\frac{\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)}{\left|\vec{b} \times \vec{c}\right|}.$$

El volumen V del paralelepípedo es igual al área de la base multiplicada por la altura perpendicular. Luego,

$$V = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right).$$

Este es el resultado numéricamente, pues el producto triple escalar podría ser negativo.

Nota: La aplicación geométrica de arriba también nos da una condición para que tres vectores estén en el mismo plano. La condición para que sean *coplanares* es

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = 0.$$

Es decir, que los tres vectores determinen un paralelepípedo cuyo volumen sea cero.

4.2. El producto triple vectorial

Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son tres vectores cualquiera, entonces la expresión

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$$

se llama el *producto triple vectorial* de $\vec{a}$ con $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Notas:

1. El producto triple vectorial es claramente una cantidad vectorial.
2. Los paréntesis son importantes pues puede demostrarse que en general
$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \neq \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}.$$

Ilustración Sean tres vectores posición, con el origen como punto común. Entonces, $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ es perpendicular tanto a $\vec{a}$ como a $\vec{b} \times \vec{c}$. Pero $\vec{b} \times \vec{c}$ ya era perpendicular a $\vec{b}$ y a $\vec{c}$. Es decir, $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ está en el plano de $\vec{b}$ y $\vec{c}$.
Consecuentemente, $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$, que es lo mismo que $-\vec{c} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$, estará en el plano de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

4.2.1. La fórmula para el producto triple vectorial

Supongamos que

$$\vec{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \quad \vec{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}, \quad \vec{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) &= \vec{a} \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ (b_2c_3 - b_3c_2) & (b_3c_1 - b_1c_3) & (b_1c_2 - b_2c_1) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

La componente **i** de este vector es igual a

$$a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) = b_1(a_2c_2 + a_3b_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3).$$

Añadiendo y substrayendo $a_1b_1c_1$, la expresión de la derecha puede arreglarse de la forma

$$(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1.$$

Esta es la componente **i** del vector

$$(\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c}.$$

Expresiones similares pueden obtenerse para las componentes **j** y **k**. Concluimos que

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c}.$$

4.2.2. Ejemplo

Determinar el producto triple vectorial de $\vec{a}$ con $\vec{b}$ y $\vec{c}$, donde

$$\vec{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \vec{b} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \quad \vec{c} = 3\mathbf{k}.$$

Solución

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = -3 \quad \text{y} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 4.$$

Por lo tanto,

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = -3\vec{b} - 4\vec{c} = 6\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 12\mathbf{k}.$$