

PROGRAMA DE CURSO

Código	Nombre			
MA6915	Seminario Avanzado de Matemáticas I “Inteligencia Artificial y Ecuaciones en Derivadas Parciales”			
Nombre en Inglés				
Artificial Intelligence and Partial Differential Equations				
SCT	Unidades Docentes	Horas de Cátedra	Horas Docencia Auxiliar	Horas de Trabajo Personal
6	10	3		6.5
Requisitos			Carácter del Curso	
MA5606 (Tópicos Matemáticos en Aprendizaje de Máquinas, Redes Neuronales y Aprendizaje Profundo) o AUTOR			Electivo de Carrera, Magíster y Doctorado DIM	
Resultados de Aprendizaje				
La persona que sigue el curso:				
- Aprenderá el concepto de uso de la inteligencia artificial en el Análisis y las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs). - Recordará los resultados y temáticas necesarias de las EDPs para su uso en aprendizaje profundo. - Conocerá en profundidad el método PINNs (Physics Informed Neural Networks) de Raissi y Kardianakis, que permite desarrollar con facilidad resultados de aproximación de soluciones a EDPs provenientes de motivaciones físicas. - Aprenderá métodos de tipo Montecarlo y su adaptación para el estudio de EDPs vía redes neuronales particulares. - Aprenderá cómo representar EDPs vía ecuaciones diferenciales estocásticas para luego trabajar éstas vía métodos de aprendizaje profundo. - Finalmente, aprenderá cómo ciertas EDPs pueden ser consideradas como operadores funcionales, y éstos mismos pueden ser aproximados por técnicas de tipo DeepONets y Fourier Neural Operators				

Metodología Docente	Evaluación General
- Dos clases presenciales de cátedra semanales, más una auxiliar que revisa conceptos numéricos. - En cada unidad se presentará un tópico en particular, para luego programar su implementación en una clase posterior.	Dos tareas teórico/numéricas, donde: - Tarea 1 concentra unidades 3 y 4. - Tarea 2 concentra unidades 5 y 6. Cada Tarea valdrá un 50% de la nota final del curso. Debe ser entregada a tiempo, con un punto de descuento por cada día de atraso.

Unidades Temáticas

Número	Nombre de la Unidad	Duración en Semanas
1	Repaso del Álgebra y el Análisis para Redes Neuronales Artificiales	1.5
Contenidos	Resultados de Aprendizajes de la Unidad	Referencias a la Bibliografía
1. Definiciones básicas. 2. Tipos de redes neuronales. 3. Teoremas de Universalidad. 4. Álgebra de redes neuronales de tipo ReLU. 5. Descenso de Gradiente Estocástico (SGD) y ADAM.	La persona que sigue el curso aprenderá el concepto fundamental de uso de la inteligencia artificial en el Análisis y recordará en esta unidad resultados clásicos de la matemática de redes neuronales que se necesitarán a lo largo del curso mismo. Se profundizará en casos particulares de redes neuronales en donde es posible realizar operaciones entre ellas. También se enfatizará su uso computacional vía clases prácticas.	6, 9, 15.

Número	Nombre de la Unidad	Duración en Semanas
2	Repaso de Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs)	1.5
Contenidos	Resultados de Aprendizajes de la Unidad	Referencias a la Bibliografía
1. Repaso de resultados clásicos en EDPs de tipo calor y ondas. 2. Repaso de métodos y resultados en EDPs Elípticas.	Esta sección permitirá al estudiante recordar los resultados y temáticas necesarias para la comprensión vía métodos de redes neuronales, aprendizaje profundo e inteligencia artificial de las EDPs y sus problemáticas asociadas más importantes, donde estas técnicas han sido eficaces.	3

Número	Nombre de la Unidad	Duración en Semanas
3	Redes Neuronales Físicamente Entrenadas (PINNs)	3
Contenidos	Resultados de Aprendizajes de la Unidad	Referencias a la Bibliografía
1. Descripción teórico-práctica de las PINNs. El método de Raissi y Kardianakis. 2. Implementación práctica vía SGD y otros métodos. 3. Cotas al error producido por PINNs. Teorema de Mishra y Molinaro. 4. El caso de dominios no acotados y EDPs dispersivas.	Se presenta el modelo de consenso más utilizado en ciencias a día de hoy, que permite desarrollar con impresionante facilidad resultados más que satisfactorios de aproximación de soluciones a EDPs provenientes de motivaciones físicas. Primeramente se describe la idea general y su implementación para luego ver el teorema de Mishra y Molinaro. Finalmente se ven extensiones del método a casos más complicados.	14, 13, 2

Número	Nombre de la Unidad	Duración en Semanas
4	Métodos tipo Montecarlo en Redes Neuronales	3
Contenidos	Resultados de Aprendizajes de la Unidad	Referencias a la Bibliografía
1. Definiciones básicas. 2. Representación estocástica de soluciones para ciertas EDPs. 3. Teorema de Grohs y Herrmann. El paseo en esferas. 4. Teorema de Hutzentaler et al. Iteraciones Multinivel de Picard. 5. Aplicaciones numéricas.	Se describe en esta unidad cómo métodos de tipo Montecarlo pueden ser adaptados para el estudio de EDPs vía redes neuronales particulares utilizando sus respectivas representaciones estocásticas. En este caso, se estudiarán dos subcasos: el de ecuaciones elípticas y el de las parabólicas.	4, 8

Número	Nombre de la Unidad	Duración en Semanas
5	Métodos de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas	3
Contenidos	Resultados de Aprendizajes de la Unidad	Referencias a la Bibliografía
1. Descripción del método. 2. Repaso de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas. 3. Método de Han, Jentzen y E. 4. Teorema de Pham, Hure y Warin. 5. Aplicaciones numéricas.	En esta unidad la persona tendrá un breve repaso de las ecuaciones diferenciales estocásticas para luego trabajar los métodos desarrollados por Han et al., y por Pham et. al. para la aproximación de redes neuronales de tipo parabólicas con errores acotados dependientes de las no linealidades presentes.	5, 7

Número	Nombre de la Unidad	Duración en Semanas
6	DeepONets y Fourier Neural Operators (FNOs)	3
Contenidos	Resultados de Aprendizajes de la Unidad	Referencias a la Bibliografía
1. Definiciones básicas. 2. El Teorema de Chen-Chen. 3. El Teorema de Lanthaler, Mishra y Kardianakis. 4. FNOs y Physics Informed Neural Operators (PINOs). 5. Aplicaciones numéricas del método.	Al final de esta unidad la persona conocerá cómo problemas de EDPs pueden ser considerados como operadores funcionales, y éstos mismos ser aproximados por técnicas de tipo DeepONets y Fourier Neural Operators. Ambos métodos serán discutidos con énfasis en las aplicaciones teórico numéricas en EDPs de tipo periódicas.	1, 12, 11, 10.

Bibliografía General

1. T. Chen and H. Chen (1995), *Universal approximation to nonlinear operators by neural networks with arbitrary activation functions and its application to dynamical systems*, IEEE Trans. Neural Netw. 6, 911–917.
2. T. de Ryck, y S. Mishra, *Numerical analysis of physics-informed neural networks and related models in physics-informed machine learning*, Acta Numerica (2024), pp. 633–713 doi:10.1017/S0962492923000089.
3. L. C. Evans (2022), *Partial Differential Equations*, Vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society.
4. P. Grohs and L. Herrmann. *Deep neural network approximation for high-dimensional elliptic PDEs with boundary conditions*. IMA Journal of Numerical Analysis, 2021. <https://doi.org/10.1093/imanum/drab031>.
5. J. Han, A. Jentzen and W. E (2018), *Solving high-dimensional partial differential equations using deep learning*, Proc. Nat. Acad. Sci. 115, 8505–8510.
6. Hornik. *Approximation capabilities of multilayer feedforward networks*, Neural Networks 1 March 1991, doi:10.1016/0893-6080(91)90009-T.
7. C. Huré, H. Pham, and X. Warin, *Deep backward schemes for high-dimensional nonlinear PDEs*, Math. Comp. DOI 10.1090/mcom/3514.
8. M. Hutzenthaler, A. Jentzen, T. Kruse and T. A. Nguyen (2020), *A proof that rectified deep neural networks overcome the curse of dimensionality in the numerical approximation of semilinear heat equations*, SN Partial Differ. Equ. Appl. 1, 1–34.
9. D. P. Kingma and J. Ba (2015), *Adam: A method for stochastic optimization*, in Proceedings of the 3rd International Conference on Learning Representations (ICLR 2015).
10. N. Kovachki, S. Lanthaler and S. Mishra (2021), *On universal approximation and error bounds for Fourier neural operators*, J. Mach. Learn. Res. 22, 13237–13312.
11. S. Lanthaler, S. Mishra and G. E. Karniadakis (2022), *Error estimates for DeepONets: A deep learning framework in infinite dimensions*, Trans. Math. Appl. 6, tnac001.
12. L. Lu, P. Jin, G. Pang, Z. Zhang and G. E. Karniadakis (2021a), *Learning nonlinear operators via DeepONet based on the universal approximation theorem of operators*, Nat. Mach. Intell. 3, 218–229.
13. S. Mishra and R. Molinaro (2023), *Estimates on the generalization error of physics-informed neural networks for approximating PDEs*, IMA J. Numer. Anal. 43, 1–43.

14. M. Raissi, P. Perdikaris and G. E. Karniadakis (2019), *Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations*, J. Comput. Phys. 378, 686–707.
 15. D. Yarotsky. *Error bounds for approximations with deep RELU networks*. Neural Networks, 94:103-114, 2017.
- Literatura adicional sugerida:
16. M. A. Alejo et al., *Error bounds for Physics Informed Neural Networks in Nonlinear Schrödinger equations placed on unbounded domains*, <https://arxiv.org/abs/2409.17938>.
 17. S. Cao, *Choose a Transformer, Fourier or Galerkin*. 35th Conf. on Neural Information Processing systems, 2021. <https://arxiv.org/abs/2105.14995>.
 18. T. De Ryck, A. D. Jagtap and S. Mishra (2024a), *Error estimates for physics-informed neural networks approximating the Navier–Stokes equations*, IMA J. Numer. Anal. 44, 83–119.
 19. D. Elbrachter, D. Perekrestenko, P. Grohs and H. Bölcskei. *Deep Neural Network Approximation Theory*. IEEE Transactions on Information Theory, vol. 67, no. 5, May 2021, pp. 2581–623. <https://doi.org/10.1109/tit.2021.3062161>.
 20. Z. Li et al., *Physics-Informed Neural Operator for Learning Partial Differential Equations*, ACM/JMS Journal of Data Science , Volume 1, Issue 3, Article 9 (September 2024) <https://doi.org/10.1145/3648506>.
 21. M. Raissi and G. E. Karniadakis (2018), *Hidden physics models: Machine learning of nonlinear partial differential equations*, J. Comput. Phys. 357, 125–141.
 22. N. Valenzuela, *A numerical approach for the fractional Laplacian via deep neural networks*, <https://arxiv.org/abs/2308.16272>.
 23. S. Wang, H. Wang and P. Perdikaris (2021b), *Learning the solution operator of parametric partial differential equations with physics-informed DeepONets*, Sci. Adv. 7, eabi8605.

Vigencia desde:	Semestre Primavera 2025
Elaborado por:	Claudio Muñoz - Nicolás Valenzuela
Revisado por:	Sebastián Donoso