

## PROGRAMA DE CURSO

### INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA SIMBÓLICA

#### A. Antecedentes generales del curso:

Departamento	Ingeniería Matemática					
Nombre del curso	Introducción a la Dinámica Simbólica	Código	MA5503	Créditos	6	
Nombre del curso en inglés	Introduction to Symbolic Dynamics					
Horas semanales	Docencia	3 horas	Auxiliares	0 horas	Trabajo personal	7 horas
Carácter del curso	Obligatorio			Electivo	Carrera, Magister y Doctorado.	
Requisitos	MA3801 Análisis					

#### B. Propósito del curso:

El curso tiene como propósito que los y las estudiantes comprendan los fundamentos de la teoría de los sistemas dinámicos simbólicos, un campo clave dentro de la investigación en sistemas dinámicos que continúa desarrollándose activamente en la actualidad.

Dentro del curso, se abordarán diversas clases de subshifts (o shifts), poniendo especial énfasis en la teoría básica de los subshifts de tipo finito y los sistemas sóficos en dimensión uno (representaciones, morfismos, invariantes bajo conjugación, Teorema de Krieger, Teoremas de factorización entre subshifts de tipo finito). Además, se presentará una introducción a la teoría contemporánea de los subshifts multidimensionales y sobre grupos numerables generales, una línea de investigación que ha cobrado un impulso significativo en los últimos años, permitiendo la elección de tópicos especiales para la finalización del curso.

El curso tributa a las siguientes competencias específicas (CE):

- CE1: Interpretar y utilizar el lenguaje formal matemático, para analizar y verificar la veracidad de afirmaciones matemáticas.
- CE2: Calcular y manipular objetos matemáticos y herramientas conceptuales de diversas áreas de las matemáticas, tales como análisis, simulación numérica, ecuaciones diferenciales, matemáticas discretas, optimización, probabilidades y estadísticas, entre otras, para la resolución de problemas.
- CE3: Modelar matemáticamente problemas de diferentes áreas en situaciones simples, es decir, traducir la realidad a una estructura matemática de forma tal que se facilite su análisis.
- CE4: Generar y divulgar conocimiento en algunas de las distintas ciencias exactas y naturales, tales como matemáticas, física y biología.

El curso tributa a las siguientes competencias genéricas (CG):

- CG1: Comunicación académica y profesional

	<p>Comunicar en español de forma estratégica, clara y eficaz, tanto en modalidad oral como escrita, puntos de vista, propuestas de proyectos y resultados de investigación fundamentados, en situaciones de comunicación compleja, en ambientes sociales, académicos y profesionales.</p>
CG2:	<p>Comunicación en inglés</p> <p>Leer y escuchar de manera comprensiva en inglés una variedad de textos e informaciones sobre temas concretos o abstractos, comunicando experiencias y opiniones, adecuándose a diferentes contextos y a las características de la audiencia.</p>
CG3:	<p>Compromiso ético</p> <p>Actuar de manera responsable y honesta, dando cuenta en forma crítica de sus propias acciones y sus consecuencias, en el marco del respeto hacia la dignidad de las personas y el cuidado del medio social, cultural y natural.</p>
CG4:	<p>Trabajo en equipo</p> <p>Trabajar en equipo, de forma estratégica y colaborativa, en diversas actividades formativas, a partir de la autogestión de sí mismo y de la relación con el otro, interactuando con los demás en diversos roles: de líder, colaborador u otros, según requerimientos u objetivos del trabajo, sin discriminar por género u otra razón.</p>

**C. Resultados de aprendizaje:**

Competencias específicas	Resultados de aprendizaje
CE1, CE2	RA1: Enuncia las definiciones, propiedades y teoremas de los sistemas dinámicos simbólicos y reproduce los argumentos usados en sus demostraciones.
CE1, CE2, CE3	RA2: Construye de manera autónoma diferentes tipos de subshifts, tales como subshifts sturmianos, sistemas substitutivos, sistemas de Toeplitz, secuencias automáticas, subshifts de tipo finito, subshifts sóficos, aplicando los conceptos tales como lenguaje, complejidad, transitividad, expansividad, minimalidad, recurrencia.
CE1, CE2, CE3	RA3: Calcula e interpreta los elementos básicos de la teoría de los subshifts de tipo finito y subshifts sóficos en dimensión uno, así como representa un subshift de tipo finito y un subshift sófico mediante grafos dirigidos y matrices, aplicando algoritmos específicos para su estudio. Además, identifica las dificultades, limitaciones y resultados conocidos para la resolución de los problemas de conjugación, factorización y subsistema entre dos subshifts de tipo finito.

CE1, CE2, CE4	RA4: Contrasta la teoría de subshifts unidimensionales, con lo conocido en el caso multidimensional y grupos numerables generales.
<b>Competencias genéricas</b>	<b>Resultados de aprendizaje</b>
CG1	RA5: Argumenta por escrito, tanto en controles, exámenes o tareas asociadas, los resultados obtenidos en la solución de problemas, con especial cuidado en la claridad y precisión en el uso de los términos matemáticos.
CG2	RA6: Argumenta de forma oral y escrita, los resultados obtenidos en textos académicos relacionados con la investigación en la teoría de subshifts, y realiza exposiciones en español y en inglés, adecuando el idioma al nivel requerido y al público objetivo.
CG3	RA7: Realiza las actividades programadas, cumpliendo con sus requerimientos, plazos y de manera honesta, en particular, sin plagiar trabajos en tareas o informes, ni copiar en evaluaciones.
CG4	RA8: Colabora en el cumplimiento de las actividades grupales programadas.

Por su naturaleza, los resultados de aprendizaje RA5, RA6 y RA7 son parte de cada una de las unidades y su validación se hará en las actividades de evaluación. Por su parte, el resultado de aprendizaje RA8 se valida en los trabajos asociados a presentaciones.

#### D. Unidades temáticas:

##### Resumen de unidades temáticas

Número	Nombre de la unidad	Duración en semanas
1	Los sistemas dinámicos simbólicos – definiciones básicas	2
2	Teoría de los subshifts de tipo finito unidimensionales(SFTs)	3
3	Teoría de los subshifts sóficos	2
4	El problema de clasificación de los subshifts de tipo finito – invariantes, conjugación y equivalencia (fuerte) del shift	3
5	Códigos entre subshifts – factores y embeddings	3
6	Tópicos especiales en investigación	2
	TOTAL	15

Número	RA al que tributa	Nombre de la unidad	Duración en semanas
1	RA1, RA2, RA3, RA4	Los sistemas dinámicos simbólicos – definiciones básicas	2 semanas
<b>Contenidos</b>		<b>Indicador de logro</b>	
<p>1.1. Definiciones básicas de sistemas simbólicos. La topología del full-shift. La acción del shift sobre un grupo numerable.</p> <p>1.2. Subshifts. Lenguaje de un subshift. Complejidad de un subshift unidimensional. Primeros ejemplos de clases de subshifts (subshifts sturmianos, sistemas sustitutivos, secuencias automáticas, sistemas de Toeplitz, subshifts de tipo finito, subshifts sóficos, etc.)</p> <p>1.3. Morfismos entre subshifts. Códigos de ventana deslizantes. El Teorema de Curtis-Hedlund-Lyndon. Noción de factor, embedding (inyección) y conjugación topológica.</p>		<p>El/la estudiante:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Explica la topología de un full-shift, y la definición de un subshift.</li> <li>Explica las propiedades que debe cumplir un conjunto para ser el lenguaje de un subshift.</li> <li>Enuncia los ejemplos más importantes de tipos de subshifts.</li> <li>Explica los morfismos entre subshifts a través del Teorema de Curtis-Hedlund-Lyndon.</li> <li>Explica las primeras invariantes bajo conjugación entre subshifts.</li> </ol>	
<b>Bibliografía de la unidad</b>		<b>[1-13]</b>	

Número	RA al que tributa	Nombre de la unidad	Duración en semanas
2	RA1, RA2, RA3, RA4	Teoría de los subshifts de tipo finito unidimensionales (SFTs)	3 semanas
<b>Contenidos</b>		<b>Indicador de logro</b>	
<p>2.1. Definición de los shifts de tipo finito (SFTs). M-paso. Caracterización de SFTs por palabras sincronizantes. Caracterización de SFTs como sistemas dinámicos topológicos.</p> <p>2.2. Representación de un SFT a través de grafos dirigidos. Método de separación de estados. Presentaciones higher-</p>		<p>El/la estudiante:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Explica un subshift de tipo finito.</li> <li>Calcula las palabras sincronizantes de un SFT unidimensional.</li> <li>Calcula el grafo dirigido que representa un SFT unidimensional.</li> <li>Realiza los procesos de separación y amalgamaciones para obtener shifts de arcos conjugados.</li> <li>Prueba la transitividad e irreducibilidad de un SFT.</li> </ol>	

<p>bloque y higher-power.</p> <p>2.3. SFTs irreducibles y mezcladores. Descomposición en componentes irreducibles de un SFT.</p> <p>2.4. La entropía topológica de un shift. Cálculo de la entropía de un SFT. El Teorema de Perrón-Frobenius. La función zeta de Artin-Mazur.</p> <p>2.5. Relación entre SFTs y sistemas dinámicos que tienen particiones de Markov.</p>	<p>6. Explica el concepto de entropía de un subshift.</p> <p>7. Calcula la entropía de un SFT irreducible.</p> <p>8. Explica la relación entre SFTs y particiones de Markov.</p> <p>9. Reconoce las primeras diferencias entre la teoría de los SFTs unidimensionales con la teoría de SFTs multidimensionales y sobre acciones de grupos numerables generales.</p>
<b>Bibliografía de la unidad</b>	[1-5]

Número	RA al que tributa	Nombre de la unidad	Duración en semanas
3	RA1, RA2, RA3, RA4	Teoría de los subshifts sóficos	2 semanas
<b>Contenidos</b>		<b>Indicador de logro</b>	
<p>3.1. Definición de un shift sófico. Representación de un shift sófico por grafos dirigidos etiquetados. Caracterización de un shift sófico por su lenguaje.</p> <p>3.2. Conjuntos de sucesores. La extensión canónica mínima de Krieger y de Fischer. Las invariantes de conjugación de shifts sóficos.</p>		<p>El/la estudiante:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Explica la noción de shift sófico.</li> <li>2. Representa un shift sófico a través de un grafo etiquetado.</li> <li>3. Caracteriza los shifts sóficos a través de su conjunto de sucesores y a través de su lenguaje.</li> </ol>	
<b>Bibliografía de la unidad</b>		[2-6], [8]	

Número	RA al que tributa	Nombre de la unidad	Duración en semanas
4	RA1, RA2, RA3, RA4	El problema de clasificación de los subshifts de tipo finito – invariantes, conjugación y equivalencia (fuerte) del shift	3 semanas
<b>Contenidos</b>		<b>Indicador de logro</b>	
<p>4.1. Conjugaciones elementales de un SFT. El Teorema de descomposición de Williams.</p> <p>4.2. La equivalencia de shift y la equivalencia fuerte de shift.</p> <p>4.3. Las invariantes de la equivalencia</p>		<p>El/la estudiante:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Explica la relación entre el problema de conjugación entre SFTs unidimensionales y la equivalencia fuerte de shift.</li> <li>2. Calcula la forma de Jordan fuera del 0, el grupo de</li> </ol>	

de shift (forma de Jordan fuera del cero, el grupo de Bowen-Franks, el grupo de dimensión, clasificación respecto a equivalencia de flujo)	Bowen-Franks y el grupo de dimensión de una matriz entera. 3. Calcula el triple de dimensión de una matriz entera.
Bibliografía de la unidad	[3], [5]

Número	RA al que tributa	Nombre de la unidad	Duración en semanas
5	RA1, RA2, RA3, RA4	Códigos entre subshifts – factores y embeddings	3 semanas
Contenidos		Indicador de logro	
5.1. Códigos finito-a-1, acotado-a-1 y equivalencia finita. 5.2. El teorema de embedding de Krieger. 5.3. El teorema de factores de Boyle.		El/la estudiante: 1. Enuncia el teorema de embedding de Krieger. 2. Enuncia el teorema de factores de Boyle.	
Bibliografía de la unidad		[3, 5]	

Número	RA al que tributa	Nombre de la unidad	Duración en semanas
6	RA1, RA2, RA3, RA4	Tópicos especiales en investigación	2 semanas
Contenidos		Indicador de logro	
6.1. Shifts fuertemente irreducibles, mezcladores multidimensionales y sobre grupos numerables generales. 6.2. El grupo de automorfismo de un shift. Pares asintóticos. Complejidad no super-lineal. 6.3. El diagrama de Bratteli-Vershik. 6.4. Shifts de Toeplitz sobre grupos residualmente finitos, entre otros.		El/la estudiante: 1. Explica resultados recientes en la teoría de sistemas simbólicos en diferentes familias de subshifts.	
Bibliografía de la unidad		[1-13]	

### E. Estrategias de enseñanza - aprendizaje:

El curso considera las siguientes estrategias de enseñanza-aprendizaje:
<ul style="list-style-type: none"> <li>Clases de cátedra expositivas.</li> </ul>

## F. Estrategias de evaluación:

Al inicio de cada semestre, el cuerpo académico informará sobre la cantidad y tipo de evaluaciones, así como las ponderaciones correspondientes. También anunciará si una inasistencia justificada se recupera mediante una evaluación adicional en las semanas siguientes a la evaluación original o al final del semestre, dependiendo del porcentaje de asistencia del estudiantado a la misma, o por la nota del examen.

Las instancias de evaluación que se contemplan son:

- Tareas, las cuales se deberán entregar con una periodicidad que se informará en la primera semana de clases.
- Dos presentaciones, la primera se realizará a mediados del semestre y la segunda a fines del semestre.
- 1 Examen final.

La ponderación de cada evaluación será de la siguiente manera. El examen final constituirá el 50% de la nota final. El promedio de las tareas constituirá el 25% de la nota final, y el promedio de las presentaciones constituirá un 25% de la nota final.

## G. Recursos bibliográficos:

### Bibliografía obligatoria:

- [1] T. Ceccherini-Silberstein and M. Coornaert, Cellular automata and groups. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [2] M. Denker, C. Grillenberger and K. Sigmund, Ergodic Theory on Compact Spaces. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 527. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976..
- [3] B. Kitchens, Symbolic dynamics. One-sided, two-sided and countable state Markov shifts. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [4] P. Kůrka, Topological and symbolic dynamics. Cours Spéc., 11[Specialized Courses] Société Mathématique de France, Paris, 2003.
- [5] D. Lind and B. Marcus: Introduction to Symbolic Dynamics and Coding Second edition [of MR1369092]. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2021.

### Bibliografía complementaria:

- [6] R. L. Adler, Symbolic dynamics and Markov partitions. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 35 (1998), no. 1, 1–56.
- [7] J.-P. Allouche, J. Shallit, Automatic sequences, Theory and applications, Cambridge University Press (2003).

[8] M.-P. Béal, Codage Symbolique. Masson, 1993.

[9] V. Berthé, M. Rigo (Eds.), Combinatorics, Automata and Number Theory, Cambridge University Press (2010).

[10] T. Downarowicz, Survey of odometers and Toeplitz flows, Contemporary Mathematics 385 (2005): 7-38.

[11] F. Durand and D. Perrin, Dimension groups and dynamical systems—substitutions, Bratteli diagrams and Cantor systems. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 196. Cambridge University Press, Cambridge, 2022.

[12] N. P. Fogg, Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics. Edited by V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Siegel. Lecture Notes in Mathematics, 1794. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[13] M. Queffélec, Substitution dynamical systems—spectral analysis. Second edition. Lecture Notes in Mathematics, 1294. Springer-Verlag, Berlin, 2010.

#### H. Datos generales sobre elaboración y vigencia del programa de curso:

Vigencia desde:	Primavera 2025
Elaborado por:	Christopher Cabezas y Haritha Cheriya
Validado por:	CTD Departamental
Revisado por:	Jefe Docente – Sebastián Donoso