PROGRAMA DE CURSO
TEORÍA DE LA MEDIDA

A. Antecedentes generales del curso:

Departamento	DIM					
Nombre del curso	Teoría de la medida	Código	MA3802	Créditos	9	
Nombre del curso en inglés	Measure Theory					
Horas semanales	Docencia	4,5	Auxiliares	1,5	Trabajo personal	9
Carácter del curso	Obligatorio	X	Electivo			
Requisitos	MA3801: Análisis					

B. Propósito del curso:

El curso tiene como propósito que los y las estudiantes comprendan los elementos básicos de la teoría de la medida e integración: medida, integral, teoremas de convergencia, espacios Lp y dualidad, Teorema de Radon-Nikodym, medida producto, medida de Lebesgue en Rn y las construcciones básicas de medidas en productos infinitos.

El curso tributa a las siguientes competencias específicas (CE) y genéricas (CG):

CE1: Interpretar y utilizar el lenguaje formal matemático, para analizar y verificar la veracidad de afirmaciones matemáticas.

CE2: Calcular y manipular objetos matemáticos y herramientas conceptuales de diversas áreas de las matemáticas, tales como análisis, simulación numérica, ecuaciones diferenciales, matemáticas discretas, optimización, probabilidades y estadísticas, entre otras, para la resolución de problemas.

CG1: Comunicación académica y profesional

Comunicar en español de forma estratégica, clara y eficaz, tanto en modalidad oral como escrita, puntos de vista, propuestas de proyectos y resultados de investigación fundamentados, en situaciones de comunicación compleja, en ambientes sociales, académicos y profesionales.

CG3: Compromiso ético

Actuar de manera responsable y honesta, dando cuenta en forma crítica de sus propias acciones y sus consecuencias, en el marco del respeto hacia la dignidad de las personas y el cuidado del medio social, cultural y natural.

CG6:	Innovación Concebir ideas viables y novedosas que generen valor para resolver necesidades latentes, materializadas en productos, servicios o en mejoras a procesos dentro de un sistema u organización, considerando el contexto sociocultural y económico y los beneficios para el usuario.

C. Resultados de aprendizaje:

Competencias	Resultados de aprendizaje
CE1, CE2	RA1: Evalúa si un objeto dado es una medida, un espacio de medida, una función medible, una medida producto, un espacio producto o un elemento de algún espacio de funciones integrables, entre otras opciones, aplicando las nociones de la teoría de la medida, en particular, sus construcciones y teoremas de extensión, propiedades de funciones medibles y teoremas de convergencia.
CE1, CE2	RA2: Interpreta los conceptos de la teoría de la medida en el ámbito de las probabilidades y el cálculo. En particular, aplica el concepto de función absolutamente continua y sus propiedades fundamentales en contextos que involucran el Teorema Fundamental del Cálculo y sus generalizaciones usando la integral de Lebesgue.
CE1, CE2, CG6	RA3: Produce demostraciones de proposiciones de la teoría de la medida, sintetizando los argumentos de sus teoremas, seleccionando las herramientas pertinentes, tales como: desigualdades (Hölder, Minkowski), derivadas de Radon-Nikodym, dualidad y medidas de Radon, así como resultados sobre funciones medibles y teoremas de convergencia, en problemas que involucran secuencias de funciones.
CG1	RA4: Argumenta por escrito, tanto en controles, exámenes o tareas asociadas, los resultados obtenidos en la solución de problemas, con especial cuidado en la claridad y precisión en el uso de los términos matemáticos.
CG3	RA5: Realiza las actividades programadas, cumpliendo con sus requerimientos, plazos y de manera honesta, en particular, sin plagiar trabajos en tareas o informes, ni copiar en evaluaciones.

Por su naturaleza, los resultados de aprendizaje RA4 y RA5 son parte de cada una de las unidades y su validación se hará en las actividades de evaluación.

D. Unidades temáticas:

Resumen de unidades temáticas

Número	Nombre de la unidad	Duración en semanas
1	Espacios de medida	2.5
2	Funciones integrables y teoremas de convergencia	2.5
3	Espacios Lp	1.0
4	Funciones absolutamente continuas	1.0
5	Teorema de Radon-Nykodin. Dualidad en los espacios Lp	2.0
6	Medida producto	1.0
7	Medida de Lebesgue en Rn	2.0
8	Medidas de Radon	1.0
9	Aplicaciones a Probabilidades	2.0
	TOTAL	15

<table>
<tr><th>Número</th><th>RA a los que tributan</th><th>Nombre de la unidad</th><th>Duración en semanas</th></tr>
<tr><td>1</td><td>RA1, RA2, RA3</td><td>Espacios de medida</td><td>2 semanas</td></tr>
<tr><th colspan="2">Contenidos</th><th colspan="2">Indicador de logro</th></tr>
<tr><td colspan="2">1.1. Construcción de una medida.
1.2. Teorema de Carathéodory y Hahn.
1.3. Medida de Lebesgue-Stieltjes.
1.4. Medida de Lebesgue.
1.5. Medidas regulares.
1.6. Medidas con signo.</td><td colspan="2">El/la estudiante:
1. Explica las nociones básicas de medida y su construcción vía la extensión de Carathéodory.
2. Enuncia los ejemplos más importantes de medidas en R, el problema de regularidad de medidas y las medidas con signo.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Bibliografía de la unidad</th><td colspan="2">[3,8,9].</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Número</th><th>RA a los que tributan</th><th>Nombre de la unidad</th><th>Duración en semanas</th></tr>
<tr><td>2</td><td>RA1, RA2,RA3</td><td>Funciones integrables</td><td>2 semanas</td></tr>
<tr><th colspan="2">Contenidos</th><th colspan="2">Indicador de logro</th></tr>
<tr><td colspan="2">2.1. Funciones medibles.
2.2. Aproximación por funciones simples.
2.3. Definición de integral.
2.4. Teorema de convergencia monótona.
2.5. Lema de Fatou.
2.6. Teorema de convergencia dominada de Lebesgue.
2.7. Integral de Riemann y su relación con la integral de Lebesgue.
2.8. Teorema de Egoroff.
2.9. Teorema de Lusin.</td><td colspan="2">El/la estudiante:
1. Explica el rol de las funciones medibles en la teoría de integración y el rol de las funciones simples en esta teoría.
2. Aplica los teoremas de convergencia, validando sus hipótesis.
3. Contrasta la integral de Lebesgue con la integral de Riemann introducida en los primeros cursos de Cálculo.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Bibliografía de la unidad</th><td colspan="2">[3,8,9].</td></tr>
</table>

Número	RA a los que tributan	Nombre de la unidad	Duración en semanas
3	RA1, RA2, RA3	Espacios Lp	1 semana
Contenidos		**Indicador de logro**	
3.1. Relación de equivalencia c.t.p. 3.2. Espacios Lp y las normas asociadas. 3.3. Desigualdad de Hölder. 3.4. Completitud de los espacios Lp. 3.5. Relación entre la convergencia en norma p y otras nociones de convergencia. Relaciones entre los distintos espacios $\mathbf{L}^p$.		El/la estudiante: 1. Aplica la construcción de los espacios $\mathbf{L}^p$, sus propiedades básicas, la la desigualdad de Hölder y la demostración de su completitud a situaciones similares. 2. Distingue el espacio $\mathbf{L}^2$ de los espacios $\mathbf{L}^p$, como un espacio de Hilbert. 3. Compara las distintas nociones de convergencia y la convergencia c.t.p.	
Bibliografía de la unidad		[3,8,9].	

Número	RA a los que tributan	Nombre de la unidad	Duración en semanas
4	RA1, RA2, RA3	Funciones absolutamente continuas	1 semana
Contenidos		**Indicador de logro**	
4.1. Diferenciabilidad de funciones monótonas. 4.2. Funciones de variación acotada. 4.3. Funciones absolutamente continuas.		El/la estudiante: 1. Analiza la diferenciabilidad c.t.p. de funciones monótonas, la diferenciabilidad de una integral y el problema de la reconstrucción de una función a partir de su derivada.	
Bibliografía de la unidad		[1,4,6,8].	

Número	RA a los que tributan	Nombre de la unidad	Duración en semanas
5	RA1, RA2, RA3	Teorema de Radon-Nykodin. Dualidad en los espacios Lp	2 semanas
Contenidos		**Indicador de logro**	
5.1. Medidas absolutamente continuas y singulares. 5.2. Teorema de Radon-Nykodin. 5.3. Dualidad en los espacios Lp.		El/la estudiante: 1. Enuncia el problema general de representación de una medida con respecto a otra y la existencia de una densidad. 2. Explica la absoluta continuidad de la integral. 3. Aplica el Teorema de Radon-Nykodin al problema de la dualidad en los espacios $\mathbf{L}^p$.	
Bibliografía de la unidad		[3,8,9].	

Número	RA a los que tributan	Nombre de la unidad	Duración en semanas
6	RA1, RA2, RA3	Medida Producto	2 semanas
Contenidos		**Indicador de logro**	
6.1. Conjuntos medibles en el espacio producto fibras y construcción de la medida producto. 6.2. Teorema de Tonelli y Teorema de Fubini.		El/la estudiante: 1. Aplica la extensión de medidas unidimensionales a varias dimensiones y el Teorema de Fubini en el cálculo de integrales iteradas.	
Bibliografía de la unidad		[3,6,8,9].	

Número	RA a los que tributan	Nombre de la unidad	Duración en semanas
7	RA1, RA2, RA3	Medida de Lebesgue en Rn	2 semanas
Contenidos		**Indicador de logro**	
7.1. Medida de Lebesgue en Rn, su construcción y propiedades básicas. 7.2. Teorema del cambio de variables 7.3. Convolución y regularización de funciones 7.4. Compacidad en los espacios Lp 7.5. de un dominio de Rn.		El/la estudiante: 1. Explica la construcción de la medida de Lebesgue en $\mathbf{R}^n$ como una medida producto. 2. Aplica el Teorema de cambio de variables y la propiedad de la invarianza de la medida de Lebesgue bajo traslaciones a la convolución de funciones y la regularización de funciones. 3. Explica los criterios básicos de compacidad en los espacios $\mathbf{L}^p$ de un dominio de $\mathbf{R}^n$.	
Bibliografía de la unidad		[1,6,8,9].	

Número	RA a los que tributan	Nombre de la unidad	Duración en semanas
8	RA1, RA2, RA3	Medidas de Radon	1 semana
Contenidos		**Indicador de logro**	
8.1. Medidas de Radon. 8.2. Teorema de representación de Riesz. 8.3. El dual de C(K).		El/la estudiante: 1. Analiza las medidas de Radon y su relación con funcionales lineales continuos sobre las funciones continuas de un espacio topológico.	
Bibliografía de la unidad		[3,8,9].	

Número	RA a los que tributan	Nombre de la unidad	Duración en semanas
9	RA1, RA2, RA3	Aplicaciones a Probabilidades	2 semanas
Contenidos		**Indicador de logro**	
9.1. Medida producto generales. 9.2. Teorema de consistencia de Kolmogorov. 9.3. Esperanzas condicionales.		El/la estudiante: 1. Interpreta los rudimentos de la teoría de procesos estocásticos como la medida producto en $\mathbf{R}^T$. 2. Construye ejemplos básicos de la teoría, aplicando la independencia estocástica. 3. Enuncia la noción de esperanza condicional y versiones regulares de ésta.	
Bibliografía de la unidad		[8].	

E. Estrategias de enseñanza - aprendizaje:

El curso considera las siguientes estrategias de enseñanza-aprendizaje:

- Clases de cátedra expositivas.
- Clases auxiliares: exposición de problemas y resolución de problemas guiados.

F. Estrategias de evaluación:

Al inicio de cada semestre, el cuerpo académico informará oficialmente sobre la cantidad y tipo de evaluaciones, así como de sus ponderaciones. También anunciará si una inasistencia justificada se recupera mediante una evaluación adicional en las semanas siguientes a la evaluación original o al final del semestre, dependiendo del porcentaje de asistencia del estudiantado a la misma, o por la nota del examen.

Tradicionalmente hay distintas instancias de evaluación tales como:
- Evaluaciones parciales (controles, tareas, trabajo en clases, entre otros). Con un máximo de 3 controles por semestre.
- Examen final.

La ponderación de cada evaluación respetará los reglamentos de la Escuela. En cada uno de estos controles y examen final se evaluará la capacidad del estudiante para escribir proposiciones abstractas de manera clara y precisa. Esta evaluación se realiza de manera integral en la revisión de las evaluaciones y puede afectar un porcentaje de la calificación de cada una de ellas.

Según el reglamento de estudios de la FCFM, el profesor tiene la facultad de realizar un examen oral a un estudiante. Esta instancia podrá darse, por ejemplo, cuando el alumno presente inasistencias reiteradas a los controles. De ser examinado en ambas formas (escrita y oral), recibirá calificaciones parciales separadas, las que se promediarán aritméticamente para dar la calificación del examen.

G. Recursos bibliográficos:

Bibliografía obligatoria:

[1] Evans L., Gariepy R. “Measure Theory and fine properties of Functions”, CRC press, Boca Raton, FL, 1992.

[2] Friedmann A. "Foundations of Modern Analysis", Dover Publications, New York, 1982.

[3] Halmos P. “Measure Theory”, Van Nostrand, New York, 1950.

[4] Kolmogorov A., Fomin S. “Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis”, Ed. MIR, Moscú, 1957.

[5] Royden H. L. “Real Analysis”, Mac Millan Publishing Co., New York, 1988.

[6] Rudin W. “Real and Complex Analysis”, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987.

[7] Saks S., “Theory of the Integral”, Murray Printing Co., Wakefield, 1937.

[8] San Martín J. “Medida e integración”, apuntes del curso de medida Departamento de Ingeniería Matemática, U. De Chile, Santiago, primera ed. 1996, última ed. 2009.

[9] Wagschal C. “Cours d’Analyse, Chapitre 6, Integration”, apuntes de curso de la Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1978.

H. Datos generales sobre elaboración y vigencia del programa de curso:

Vigencia desde:	2024
Elaborado por:	Jaime San Martín - Sebastián Donoso
Validado por:	Jefe Docente (2024)