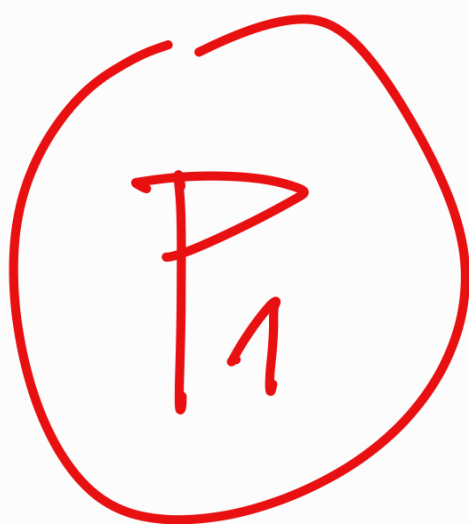


DESARROLLO PARA LA AUX 13

MÁS INTEGRALES IMPROPIAS

MA1002-8
2025-2

Profesora: M. Eugenia Martínez M.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya



P1 Estudian la convergencia de las siguientes integrales impropias. Identifican su especie.

Para ver su convergencia, hay 3 métodos más usados: comparación, cociente o calcular la integral como límite

Para identificar su especie, hay que ver si el no acotamiento ocurre en el límite de la integral (I especie) o si ocurre en la función en borde de límite (II especie).



Identificar el tipo de especie de la integral es fundamental porque uno permite saber con respecto a qué tipo de integral impropia, de convergencia conocida, comparar.

P1 a) $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ tiene $\infty \rightarrow$ (I) especie
no se indefinire en límite de integral $\rightarrow$ no es de (II) especie



Como la i.i. es de (I) especie, se conoce que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \begin{cases} \text{converge } \alpha > 1 \\ \text{diverge } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

POR CUOCIENTE



comparar con función de convergencia (i.i.) conocida!

$\hookrightarrow$ intuición dice usar $\frac{1}{x^2}$, $\alpha > 1$ (converge)

$$\text{Sea } L := \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{\ln(x)}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^2} \right) \left(= \frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}} \right) = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \right) = 0 //$$

O sea, $L = 0 \sim f \ll g$

Por criterio del cociente, g domina a f : si g converge (i.i.), entonces i.i. de f tbn!

Como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge, entonces $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ tbn! $\square$

POR COMPARACIÓN



acotar superiormente por algo convergente

Se sabe que

$$0 \leq \ln(x) \leq \sqrt{x} \quad (\forall x > 1) \quad \cdot \frac{1}{x^2} > 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{\ln(x)}{x^2} \leq \frac{\sqrt{x}}{x^2} = x^{-\frac{1}{2}-2} = \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$$

y $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} dx$ converge pues $\frac{5}{2} > 1$.

Como $\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$ domina a $\frac{\ln(x)}{x^2}$,

por criterio de comparación, se concluye que $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ converge. $\square$

CALCULAR



Resolver con la def. de límite.

$$I := \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\int_1^{\beta} \frac{\ln(x)}{x^2} dx \right)$$

$$\text{haciendo i.p.p.: } u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{x}$$

$$\therefore I = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(-\left[\frac{1}{x} \ln(x) \right]_1^{\beta} - \int_1^{\beta} \left(-\frac{1}{x} \right) \frac{1}{x} dx \right)$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\left[\frac{\ln(x)}{x} \right]_1^{\beta} + \int_1^{\beta} \frac{1}{x^2} dx \right)$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{-\ln(\beta)}{\beta} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\beta} \right)$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{-\ln(\beta)}{\beta} + 1 - \frac{1}{\beta} \right)$$

$$= 1 - \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(\beta) + 1}{\beta} \right) \left(= \frac{\infty}{\infty} \right) \stackrel{L'H}{=} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{\beta}}{1} \right) = 0$$

$= 1 < \infty \rightarrow$ convergente. $\square$

(P₁) b) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} dx$ $\xrightarrow{\text{tiempo } +\infty \rightarrow \textcircled{I} \text{ especie}}$
 $\rightarrow$ no se indefinire en límite de integral $\rightarrow$ no es $\textcircled{II}$ especie.



Como la i.i. es de $\textcircled{I}$ especie, se conoce que

$$\int_{a>0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \begin{cases} \text{converge } \alpha > 1 \\ \text{diverge } \alpha \leq 1 \end{cases}$$



Hacemos por comparación $\rightarrow$ acotar repetidamente por algo que sea convergente.

Si $x \gg 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{\ln(x)}{x^3} \leq \dots$ $\swarrow$ buscamos cota aquí

Notar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} \right) \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{x}}{1} \right) = 0.$

O sea, para x suficientemente grande, $\left| \frac{\ln(x)}{x} \right| \leq \varepsilon$, para cualquier $\varepsilon > 0$. $\swarrow$ nosotros elegimos } def. convergencia

Entonces: $0 \leq \frac{\ln(x)}{x^3} = \frac{\ln(x)}{x} \cdot \frac{1}{x^2} \leq 1 \cdot \frac{1}{x^2}$

y $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ es convergente pues $2 > 1$.

Por criterio de comparación, como $\frac{1}{x^2}$ domina $\frac{\ln(x)}{x^3}$, y $\frac{1}{x^2}$ tiene i.i. convergente, entonces $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} dx$ es convergente. $\square$

(P₁) $\hookrightarrow$ hay $\infty \rightarrow$ es de (I) especie
 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}(2x+3)} dx$ $\rightarrow$ se indefinire en $x=0$ que es borde de integral $\rightarrow$ es de (I) especie.

Como la i.i. es de (III) especie, hay que analizarla por separado (I) y (II).
 Para esto, hay que separar integral en intervalos convenientes.

En efecto,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}(2x+3)} dx = \int_{0^+}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}(2x+3)} dx = \underbrace{\int_{0^+}^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}(2x+3)} dx}_{\text{(II) especie}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}(2x+3)} dx}_{\text{(I) especie}}$$

Por álgebra de límites convergentes, esto converge si cada una converge.

basta que una sea divergente para que sea divergente.

$$\int_{0^+}^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}(2x+3)} dx$$

es de (II) especie en lim. inferior, y se usa de referencia

$$\int_{a^+}^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx \begin{cases} \text{converge } \alpha < 1 \\ \text{diverge } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}(2x+3)} dx$$

es de (I) especie y se usa de referencia

$$\int_{a>0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \begin{cases} \text{converge } \alpha > 1 \\ \text{diverge } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Nota que en este caso, es útil la referencia

$$\int_{0^+}^1 \frac{1}{(x-0)^\alpha} dx = \int_{0^+}^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \begin{cases} \text{converge } \alpha < 1 \\ \text{diverge } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Como hay un $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, y varios factores, la "intuición" dice que sería útil usar un cociente, y para simplificar las cosas $\rightarrow$ uso $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}(2x+3)}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{-x}}{2x+3} \right) = \frac{1}{3}$$

Por criterio del cociente,

Como $L = \frac{1}{3} \in (0, +\infty) \sim f \neq 0$ i.e. la convergencia de las i.i. de las funciones es igual.

$$\text{Como } \int_{0^+}^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx \text{ converge} \Rightarrow \int_{0^+}^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}(2x+3)} dx \text{ converge}$$

Nota que en este caso, es útil la referencia

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \begin{cases} \text{converge } \alpha > 1 \\ \text{diverge } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Por comparación,

Si $x \rightarrow +\infty$:

$$\frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}(2x+3)} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}(2x+3)} \leq \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$$

grado $\frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$
 y $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} dx$ converge pues $\frac{4}{3} > 1$.

Como $\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$ domina $\frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}(2x+3)}$, y la i.i. de la dominante converge, entonces $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}(2x+3)} dx$ también converge.

$\therefore$ Como ambos integrales convergen, la integral de (III) especie es convergente.

(P1) d) $\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) dx =: I$ no hay $\infty \rightarrow$ no es di $\oplus$ especie
se indefin en $x=1$ que está en el borde $\rightarrow$ es de $\oplus$ especie.

 Como no tiene un factor polinómico, y solo se tiene de referencia la convergencia de expresiones racionales y polinómicas, se resolverá por def. del límite.

En efecto:

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) dx = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) dx = \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \left(\int_0^\beta \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) dx \right)$$

prop. ln(·) $\rightarrow$
$$= \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \left(\int_0^\beta \ln(1) - \ln(1-x) dx \right) = \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \left(- \int_0^\beta \ln(1-x) \cdot 1 dx \right)$$

Haciendo l.p.p.:
$$\begin{cases} u = \ln(1-x) \Rightarrow du = \frac{-1}{1-x} dx \\ dv = 1 dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \left(- \left([x \ln(1-x)]_0^\beta - \int_0^\beta x \frac{-1}{1-x} dx \right) \right) \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \left(- \int_0^\beta \frac{x}{1-x} dx + \left(- [x \ln(1-x)]_0^\beta \right) \right) \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \left(- \int_0^\beta \frac{x-1+1}{1-x} dx + [0 \ln(1-0) - \beta \ln(1-\beta)] \right) \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \left(\int_0^\beta \frac{x-1}{x-1} dx - \int_0^\beta \frac{1}{1-x} dx - \beta \ln(1-\beta) \right) \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \left(\int_0^\beta dx - \int_0^\beta \frac{1}{1-x} dx - \beta \ln(1-\beta) \right) \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \left([x]_0^\beta + [\ln(1-x)]_0^\beta - \beta \ln(1-\beta) \right) \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \left([\beta - 0] + [\ln(1-\beta) - \ln(1-0)] - \beta \ln(1-\beta) \right) \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \left(\beta + \ln(1-\beta) - \beta \ln(1-\beta) \right) = \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \left(\beta + (1-\beta) \ln(1-\beta) \right) = 1 + \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \left(\frac{\ln(1-\beta)}{\frac{1}{1-\beta}} \right) \left(\frac{-\infty}{0} \right) \\ &\stackrel{L'H}{=} 1 + \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \left(\frac{\frac{1}{1-\beta}(-1)}{\frac{1}{(1-\beta)^2}} \right) = 1 - \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{1-\beta} \right) = 1 < \infty \rightarrow \text{converge.} \end{aligned}$$

P_2

(P₂) b) P.D.O. $\int_1^2 \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx$ y $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx$ divergen

no tiene $\infty \rightarrow$ no en (I)
se indefinen en $x=1$, límite $\rightarrow$ (II) especie

conviene solo si
no sea de III especie

Para ver la divergencia, hay 3 formas: por comparación (acotar inferiormente por una divergente), wolante (comparar adecuadamente), por def. (calcular límite).

En efecto:

Procediendo por definición:

$$\int_1^2 \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx = \int_{1^+}^2 \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx =: I_1$$

Calculando la primitiva asociada:

$$\int \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx ; u = \ln(x) \\ \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ = \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\ln(x)} + C, C \in \mathbb{R}$$

Luego, calculando el límite:

$$I_1 = \lim_{\beta \rightarrow 1^+} \left(\int_{\beta}^2 \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx \right) = \lim_{\beta \rightarrow 1^+} \left(\left[-\frac{1}{\ln(x)} \right]_{\beta}^2 \right) \\ = \lim_{\beta \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(\beta)} \right) \left(= \frac{1}{0} - \frac{1}{\ln(2)} = \infty \right) \\ = \infty //$$

$\therefore I_1$ diverge.

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int_{1^+}^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx =: I_2$$

Calculando la primitiva asociada:

$$\int \frac{1}{(x-1)^2} dx ; u = x-1 \\ \Rightarrow du = dx \\ = \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{x-1} + C, C \in \mathbb{R}$$

Luego, calculando el límite:

$$I_2 = \lim_{\beta \rightarrow 1^+} \left(\int_{\beta}^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx \right) = \lim_{\beta \rightarrow 1^+} \left(\left[-\frac{1}{x-1} \right]_{\beta}^2 \right) \\ = \lim_{\beta \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{\beta-1} \right) \left(= 1 - \frac{1}{1-1} = 1 - \frac{1}{0} = \infty \right) \\ = \infty //$$

$\therefore I_2$ diverge.

Demostrando así lo pedido. $\square$

P_3

P_3 a) P.D.A. $\int_1^{+\infty} a^{-x} dx$ converge ($\forall a > 1$)
 $\xrightarrow{+\infty}$ tiene $+\infty \rightarrow I$ especie
 $\rightarrow$ no se indefinire en límite $\rightarrow$ no es II especie

Como es de I especie pero no se conoce una i.i. de esa forma, conviene hacerlo por def.

En efecto,
 Por definición: $\int_1^{+\infty} a^{-x} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\int_1^{\beta} a^{-x} dx \right) =: I$

Primero se verá la primitiva asociada:

$$a > 1 : \int a^{-x} dx = \int e^{\ln(a^{-x})} dx = \int e^{-x \ln(a)} dx = \frac{1}{\ln(a)} e^{-x \ln(a)} (-1) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto $I = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{\ln(a)} \left[e^{-x \ln(a)} \right]_1^{\beta} \right)$

$$= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln(a)} \left[e^{-\ln(a)} - e^{-\beta \ln(a)} \right] \right)$$

$$= \frac{1}{\ln(a)} e^{-\ln(a)} - \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(e^{-\beta \ln(a)} \right)$$

$a > 1 \Rightarrow \ln(a) > 0$
 $\Rightarrow e^{-\beta \ln(a)} \rightarrow 0$

$$= \frac{1}{\ln(a)} e^{-\ln(a)} < \infty \rightarrow \text{converge.}$$

(P₃) b) $f: [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ función continua t.q. $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}} < 1$

(i) P.D.Q. $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge

Verlo por pedazos para acotar apropiadamente

(ii) Concluir que $\int_1^{+\infty} \left(\frac{e}{x}\right)^x dx$ es convergente

Usar $f(x) = \left(\frac{e}{x}\right)^x$, por lo demostrado

Observen que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) < 1 \Rightarrow (\exists a > 1): g(x) \leq \frac{1}{a^x}$ para x grande.

En efecto,

(i) Noten que f es continua en $[1, +\infty)$, entonces en particular, lo es en $[1, M]$ y por tanto es integrable en $[1, M]$, así que:

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \underbrace{\int_1^M f(x) dx}_{\text{finita}} + \underbrace{\int_M^{+\infty} f(x) dx}_{\text{I especie}}$$

Hay que indagar en la convergencia de esa i.i.

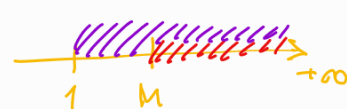
Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}} < 1$, entonces por la indicación, $(f(x))^{\frac{1}{x}} \leq a^{-1}$, algún $a > 1$
 $\Rightarrow f(x) \leq a^{-x}$

$\exists x \rightarrow +\infty$
 $\Leftrightarrow \forall x \in [M, +\infty)$,
 algún $M > 1$

O sea que:

$$\int_M^{+\infty} f(x) dx \leq \int_M^{+\infty} a^{-x} dx \leq \int_1^{+\infty} a^{-x} dx < \infty$$

monotonía de integral indicación intervalo $[M, +\infty) \subseteq [1, +\infty)$ parte anterior



Y además $\text{Cod}(f) = (0, +\infty) \Leftrightarrow f \geq 0$, o sea que se tiene la desigualdad:

$$0 \leq \int_M^{+\infty} f(x) dx \leq \int_1^{+\infty} a^{-x} dx < \infty$$

Por criterio de comparación, entonces $\int_M^{+\infty} f(x) dx$ es convergente. $\square$

(ii) Aplicando este resultado a $f(x) = \left(\frac{e}{x}\right)^x$, que tiene codominio $(0, +\infty)$ y dominio es $[1, +\infty)$

dado también $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{e}{x}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{x}\right) = 0 < 1. \therefore \int_1^{+\infty} \left(\frac{e}{x}\right)^x dx$ es convergente. $\square$

DemostRANDO así lo pedido. $\square$

(P₃) c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

* f decreciente en $\mathbb{R}$

* f derivable en $\mathbb{R}$

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

P.D. $\int_0^{+\infty} |f'(x)| dx$ convergente



No se conoce la forma de la función, ni su comportamiento wrt a otra función. Entonces no es conveniente usar comparación o cociente, si no que conviene hacerlo por definición ☺

En efecto:

$$\int_0^{+\infty} |f'(x)| dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\beta} |f'(x)| dx \right) ; f \text{ decreciente} \Leftrightarrow f' \leq 0 \Leftrightarrow |f'| = -f'$$

def. i.i.

$$= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\beta} -f'(x) dx \right)$$

def. l.o.l

$$= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(-[f(x)]_0^{\beta} \right)$$

primitiva de f'

$$= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(f(0) - f(\beta) \right) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\beta \rightarrow +\infty} f(\beta) = 0 \text{ (enunciado)}$$

T.F.C.

$$= f(0) < \infty \rightarrow \text{convergente.}$$