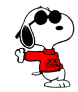
Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1002-8 Cálculo $\frac{d}{dx}$ e $\int$ · Primavera 2025

Auxiliar 13: Más integrales impropias 

Profesora: M. Eugenia Martínez M.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 18 de noviembre de 2025

P1. [Logaritmo]

Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias, e identifique su especie:

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}\,(2x+3)}\,dx$ **d)** $\displaystyle\int_0^{1} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)dx$

P2. [Trabajando]

a) Demuestre que $\displaystyle\lim_{u\to+\infty}\int_{-u}^{u} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \pi$. Pruebe que, sin embargo, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$ diverge.

b) Pruebe que las integrales $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{x\,(\ln(x))^2}\,dx$ y $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ divergen.

c) Pruebe que $\displaystyle\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x\,(\ln(x))^2} - \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$ converge y encuentre su valor.

P3. [Trabajando pt. ii]

a) Demuestre que $\displaystyle\int_1^{+\infty} a^{-x}\,dx$ converge $(\forall\, a > 1)$.

b) Considere $f\colon [1,+\infty) \to (0,\infty)$ una función continua tal que $\exists \displaystyle\lim_{x\to+\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}} < 1$.

Demuestre que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Concluya que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{e}{x}\right)^x dx$ es convergente.

Indicación: Observe que si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) < 1$, entonces $(\exists\, a > 1) : g(x) \leq \dfrac{1}{a}$ para x suficientemente grande.

c) Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es decreciente y derivable en $\mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, muestre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f'(x)|\,dx$ converge.

P4. [Laplace]

Para una función $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ se define la integral $I(f) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} f(x)\,dx$.

a) Demuestre que si $(\exists\, M, b \in \mathbb{R})\,(\forall\, x \in [0,+\infty)) : |f(x)| \leq Me^{bx}$, entonces $I(|f|)$ converge para todo $\alpha > b$. Para las siguieentes partes, asuma que si $I(|g|)$ converge, entonces $I(g)$ también lo hace.

b) Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f \in \mathcal{C}^2$. Asuma que también se satisface que existen M, b reales para los cuales $|f(x)|, |f'(x)|, |f''(x)|$ son a lo más Me^{bx} para todo $x \in [0,+\infty)$.

- **i)** Demuestre, usando integración por partes que para $\alpha > b$, se tiene que $I(f') = \alpha I(f) - f(0)$.
- **ii)** Concluya que $I(f'') = \alpha^2 I(f) - \alpha f(0) - f'(0)$.

c) Use las ecuaciones anteriores para probar que $I\left(\sin(\omega x)\right) = \dfrac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$.

P5. [Determinar]

a) Encuentre los valores para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x^2+\beta x+\alpha}{x\,(2x+\alpha)} - 1\,dx = 1.$

Indicación: Analice primero qué relación debe haber entre α y β para que la integral sea convergente. Para esos valores, calcule la integral y determine los valores buscados.

b) Determine los valores de $\alpha > 0$ para los cuales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha(1-x)}}\,dx$ converge.

Indicación: El comportamiento de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ y $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ usted los tiene en el resumen 8)

P6. [Aplicaciones de la integral, versión impropia (?)]
Considere la curva $\mathcal{C}$ definida por $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, para $a > 0$.

a) Demuestre que la longitud de arco de la curva $\mathcal{C}$ en el primer cuadrante está dada por $s = a^{\frac{1}{3}} \displaystyle\int_0^a \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx$.

b) Muestre que la integral s converge y calcule su valor.

P7. [Resultados conocidos con objetos nuevos]
Considere las integrales $J_n := \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$ y $I_n := \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-anx}\,dx$, para $a > 0$.

a) Demuestre que J_n converge ($\forall\, n \in \mathbb{N}$).

b) Muestre la relación de recurrencia $J_{n+1} = (n+1)\,J_n$ ($\forall\, n \geq 0$). Indicación: Use integración por partes.

c) Concluya que se cumple $I_n = \dfrac{J_n}{(an)^{n+1}}$, para $n \geq 1$.

Impropia I especie racional

- $\displaystyle\int_{a>0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge} & \text{ssi } \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \text{ssi } \alpha \leq 1 \end{cases}$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge} & \text{ssi } \alpha < 1 \\ \text{diverge} & \text{ssi } \alpha \geq 1 \end{cases}$

Impropia II especie racional

- $\displaystyle\int_a^{b^-} \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge} & \text{ssi } \alpha < 1 \\ \text{diverge} & \text{ssi } \alpha \geq 1 \end{cases}$
- $\displaystyle\int_{a^+}^{b} \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge} & \text{ssi } \alpha < 1 \\ \text{diverge} & \text{ssi } \alpha \geq 1 \end{cases}$

Criterio de comparación

El objetivo es acotar superiormente (inferiormente) por funciones cuya i.i. converge (diverge) para concluir que la i.i. de la acotada converge (diverge).

Criterio del cuociente

Calcular $L := \displaystyle\lim_{x\to \text{i.i.}} \frac{f(x)}{g(x)}$ con $g(x)$ conocido (se elige por conveniencia). Si $L \in (0,+\infty) \sim f \approx g$. Si $L = 0 \sim f \ll g$. Si $L = +\infty \sim f \gg g$.

La notación usada es "inventada" por mí (mnemotecnia :D) para resumir el comportamiento de las **INTEGRALES IMPROPIAS** definidas por las funciones: $\approx$ es que se comportan similar; $f \ll g$ es que g domina f (si g converge, f converge; si f diverge, g diverge); $f \gg g$ es que f domina g (si f converge, g converge; si g diverge, f diverge).

Integrales impropias y convergencias conocidas

Integral impropia de I especie, límite superior

Sea $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ función.

f es integrable en $[a,+\infty)$ si y solo si:

$$\begin{cases} \text{i) } (\forall x \in (a,+\infty)) : f \text{ es Riemann integrable en } [a,x] \\ \text{ii) } \exists \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \right) =: \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \end{cases}$$

Integral impropia de I especie, límite inferior

Sea $f\colon [-\infty,b) \to \mathbb{R}$ función.

f es integrable en $[-\infty,b)$ si y solo si:

$$\begin{cases} \text{i) } (\forall x \in (-\infty,b)) : f \text{ es Riemann integrable en } [x,b] \\ \text{ii) } \exists \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \right) =: \displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt \end{cases}$$

Integral impropia de II especie, límite superior

Sea $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ función no acotada.

f es integrable en $[a,b)$ si y solo si (*imaginar que se acerca a asíntota en $x=b$ por la izquierda)*:

$$\begin{cases} \text{i) } (\forall x \in (a,b)) : f \text{ es Riemann integrable en } [a,x] \\ \text{ii) } \exists \lim\limits_{x\to b^-} \left(\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \right) =: \displaystyle\int_a^{b^-} f(t)\,dt \end{cases}$$

Integral impropia de II especie, límite inferior

Sea $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ función no acotada.

f es integrable en $[a,b)$ si y solo si (*imaginar que parte desde asíntota en $x=a$ por la derecha)*:

$$\begin{cases} \text{i) } (\forall x \in (a,b)) : f \text{ es Riemann integrable en } [x,b] \\ \text{ii) } \exists \lim\limits_{x\to a^+} \left(\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \right) =: \displaystyle\int_{a^+}^{b} f(t)\,dt \end{cases}$$

Exponencial

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge (a 1)
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}$ converge (a $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

Racional

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge ssi } \alpha < 1 \\ \text{diverge ssi } \alpha \geq 1 \end{cases}$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ converge

Identidad

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,dx$ diverge

Logaritmo natural

- $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)\,dx$ y $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$ convergen

Impropia I de constante

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \beta\,dx \begin{cases} \text{converge a } 0 \text{ ssi } \beta = 0 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ ssi } \beta > 0 \text{ o a } -\infty \text{ si } \beta < 0 \end{cases}$

Impropia II especie racional, límite superior

- $\displaystyle\int_a^{b^-} \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge ssi } \alpha < 1 \\ \text{diverge ssi } \alpha \geq 1 \end{cases}$
- $\displaystyle\int_a^{b^-} \frac{-1}{(x-b)^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge ssi } \alpha < 1 \\ \text{diverge ssi } \alpha \geq 1 \end{cases}$

Impropia II especie racional, límite inferior

- $\displaystyle\int_{a^+}^{b} \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge ssi } \alpha < 1 \\ \text{diverge ssi } \alpha \geq 1 \end{cases}$
- $\displaystyle\int_{a^+}^{b} \frac{-1}{(a-x)^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge ssi } \alpha < 1 \\ \text{diverge ssi } \alpha \geq 1 \end{cases}$

Impropia I especie racional

$\displaystyle\int_{a>0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge ssi } \alpha > 1 \\ \text{diverge ssi } \alpha \leq 1 \end{cases}$

Integrales impropias

Motivación

La definición de la integral de Riemann está sujeta a dos condiciones: que el intervalo de integración sea cerrado y acotado, y que la función a integrar sea una función acotada en ese intervalo. El estudio de integrales impropias surge con la necesidad de extender está definición para casos no acotados.

Tipos de integrales impropias

I especie: **intervalo** de integración es no acotado, con una función acotada.

II especie: **función no acotada**, en intervalo acotado.

III especie (mixta): integral compuesta por integrales impropias de I y II especie.

Integrales impropias de I especie

Corresponde al caso en que la función es acotada en el intervalo de integración, pero el **intervalo** en que se integra es **no acotado**. Para identificarlas, hay que observar que alguno de los límites de la integral sea ∞.

Integrales impropias de II especie

Corresponde al caso en que la **función** es **no acotada** en el intervalo acotado de integración. Para identificarlas, hay que observar si existen indefiniciones de la función dentro o en bordes del intervalo de integración.

Integral impropia de I especie, límite superior

Sea $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ función.

f es integrable en $[a,+\infty)$ si y solo si:

$$\begin{cases} \text{i) } (\forall\, x \in\ (a,+\infty)) : f \text{ es Riemann integrable en } [a,x] \\ \text{ii) } \exists \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \right) =: \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \end{cases}$$

Integral impropia de I especie, límite inferior

Sea $f\colon [-\infty,b) \to \mathbb{R}$ función.

f es integrable en $[-\infty,b)$ si y solo si:

$$\begin{cases} \text{i) } (\forall\, x \in\ (-\infty,b)) : f \text{ es Riemann integrable en } [x,b] \\ \text{ii) } \exists \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \right) =: \displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt \end{cases}$$

Integral impropia de II especie, límite superior

Sea $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ función no acotada.

f es integrable en $[a,b)$ si y solo si (*imaginar que se acerca a asíntota en $x=b$ por la izquierda*):

$$\begin{cases} \text{i) } (\forall\, x \in\ (a,b)) : f \text{ es Riemann integrable en } [a,x] \\ \text{ii) } \exists \lim\limits_{x\to b^-} \left(\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \right) =: \displaystyle\int_a^{b^-} f(t)\,dt \end{cases}$$

Integral impropia de II especie, límite inferior

Sea $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ función no acotada.

f es integrable en $[a,b)$ si y solo si (*imaginar que parte desde asíntota en $x=a$ por la derecha*):

$$\begin{cases} \text{i) } (\forall\, x \in\ (a,b)) : f \text{ es Riemann integrable en } [x,b] \\ \text{ii) } \exists \lim\limits_{x\to a^+} \left(\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \right) =: \displaystyle\int_{a^+}^{b} f(t)\,dt \end{cases}$$

Separación en impropias de I especie

Si las integrales del lado derecho convergen, entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{+\infty} f(t)\,dt, \text{ algún } c \in \mathbb{R}$$

Separación en impropias de II especie

Si las integrales del lado derecho convergen, entonces:

$$\int_{a^+}^{b^-} f(t)\,dt = \int_{a^+}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{b^-} f(t)\,dt, \text{ algún } c \in (a,b)$$

Criterios de convergencia para integrales impropias

Criterio de comparación

Sea f continua (Riemann integrable) en $[a, x]$.

Sea g continua (Riemann integrable) en $[b, x]$.

Si $(\exists\, c \geq \text{máx}\,\{a, b\}) : 0 \leq f(x) \leq g(x)\,(\forall\, x \geq c)$.

Entonces, para integrales **impropias de I especie**:

i) Caso "g domina a f":

$$\int_b^{+\infty} g \text{ converge} \implies \int_a^{+\infty} f \text{ converge}$$

ii) Caso "f domina a g":

$$\int_a^{+\infty} f \text{ diverge} \implies \int_b^{+\infty} g \text{ diverge}$$

Y para integrales **impropias de II especie**, asumiendo g definida en $[b, c]$ y f definida en $[a, b]$:

i) Caso "g domina a f":

$$\int_b^{c} g \text{ converge} \implies \int_a^{b} f \text{ converge}$$

ii) Caso "f domina a g":

$$\int_a^{b} f \text{ diverge} \implies \int_b^{c} g \text{ converge}$$

El objetivo de este criterio es ver que si la integral de la función que mayora converge, eso obliga la convergencia en la integral de la función mayorada.

En el caso converso, el objetivo es ver que si la integral de función mayorada diverge, eso obliga la divergencia de la en la integral de la mayorada.

Convergencia absoluta

Sea f una función Riemann integrable. Independiente del tipo intervalo I donde se integre: $\int_I f$ es absolutamente convergente (AC) ssi $\int_I |f|$ converge.

Es solo una def y no asegura convergencia de $\int f$.

Criterio del cuociente

Sea f continua (Riemann integrable) en $[a, x]$.

Sea g continua (Riemann integrable) en $[b, x]$.

Si $(\exists\, c \geq \text{máx}\,\{a, b\}) : 0 \leq f(x) \wedge g(x) \ > 0\,(\forall\, x \geq c)$.

Considerar $L := \lim\limits_{x \to \gamma} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$, con $\gamma = \infty$ en el caso de integrales impropias de I especie, o $\gamma \in \{a^+, b^-\}$ en el caso de integrales impropias de II especie. Entonces:

i) Caso $L \in (0, +\infty)$: "ambas se comportan igual" Entonces $\int f, \int g$ ambas convergen o divergen.

ii) Caso $L = 0$ (*denominador crece más rápido*):
Entonces $\int g$ converge $\implies \int f$ converge
$\iff \int f$ diverge $\implies \int g$ diverge

iii) Caso $L = \infty$ (*numerador crece más rápido*)
Entonces $\int f$ converge $\implies \int g$ converge
$\iff \int g$ diverge $\implies \int f$ diverge

El rol de L es comparar el comportamiento asintótico de las funciones. En impropias de **I** clase, importa hacia $+\infty$ o $-\infty$, y en impropias de II clase, importa hacia a^+ o hacia b^-. Una vez conocida el comportamiento de ambas funciones asintóticamente, se puede clasificar el caso de convergencia de las integrales.

Criterio de convergencia absoluta

Si integral converge absolutamente (i.e. converge en valor absoluto), entonces la integral converge.

i) Para integrales **impropias de I especie**:

$$\int_a^{+\infty} |f| \text{ converge} \implies \int_a^{+\infty} f \text{ converge.}$$

ii) Para integrales **impropias de II especie**

$$\int_a^{b} |f| \text{ converge} \implies \int_a^{b} f \text{ converge.}$$

Convergencias conocidas de integrales impropias

Exponencial

- $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge (a 1)
- $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge (a $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

Identidad

- $\int_0^{+\infty} x\,dx$ diverge

Racional

- $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge} & \text{ssi } \alpha < 1 \\ \text{diverge} & \text{ssi } \alpha \geq 1 \end{cases}$
- $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge
- $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ converge

Logaritmo natural

- $\int_0^1 x\ln(x)\,dx$ converge
- $\int_0^1 \ln(x)\,dx$ converge

Impropia I de constante

$\int_0^{+\infty} \beta\,dx \begin{cases} \text{converge a 0 ssi } \beta = 0 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ ssi } \beta > 0 \text{ o a } -\infty \text{ si } \beta < 0 \end{cases}$

Impropia II especie racional, límite superior

- $\int_a^{b^-} \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge} & \text{ssi } \alpha < 1 \\ \text{diverge} & \text{ssi } \alpha \geq 1 \end{cases}$
- $\int_a^{b^-} \frac{-1}{(x-b)^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge} & \text{ssi } \alpha < 1 \\ \text{diverge} & \text{ssi } \alpha \geq 1 \end{cases}$

Impropia II especie racional, límite inferior

- $\int_{a^+}^{b} \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge} & \text{ssi } \alpha < 1 \\ \text{diverge} & \text{ssi } \alpha \geq 1 \end{cases}$
- $\int_{a^+}^{b} \frac{-1}{(a-x)^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge} & \text{ssi } \alpha < 1 \\ \text{diverge} & \text{ssi } \alpha \geq 1 \end{cases}$

Impropia I especie racional

$\int_{a>0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge} & \text{ssi } \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \text{ssi } \alpha \leq 1 \end{cases}$

Álgebra elemental de integrales impropias

convergente + convergente = convergente
convergente + divergente = divergente
divergente + divergente = convergente o divergente

Comportamiento asintótico, para I especie

Si f es función creciente en $[a, +\infty)$, entonces solo hay 2 casos si $x \to +\infty$: $f(x) \to L \in \mathbb{R}$ o $f(x) \to +\infty$.

Si f es función decreciente en $(-\infty, b]$, entonces solo hay dos casos si $x \to -\infty$: $f(x) \to L \in \mathbb{R}$ o $f(x) \to -\infty$.

Comportamiento asintótico, para II especie

Si f es función creciente en $[a, b)$, entonces solo hay dos casos si $x \to b^-$: $f(x) \to L \in \mathbb{R}$ o $f(x) \to +\infty$.

Si f es función decreciente en $(a, b]$, entonces solo hay dos casos si $x \to a^-$: $f(x) \to L \in \mathbb{R}$ o $f(x) \to -\infty$.

Cota para logaritmo natural

$$\ln(x) \leq \sqrt{x}\,(\forall\, x \in (1, +\infty))$$

Otra cota para logaritmo natural

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1\,(\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$