Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1002-8 Cálculo $\frac{d}{dx}$ e $\int$ · Primavera 2025

Auxiliar 12: Integrales impropias

Profesora: M. Eugenia Martínez M.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 12 de noviembre de 2025

P1. [Converger]
Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias, e identifique su especie:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx$

c) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(2x)}{x^{3/2}}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}+x^2}\,dx$

f) $\displaystyle\int_1^\infty x^{-1/2}\cos(x)\,dx$

g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

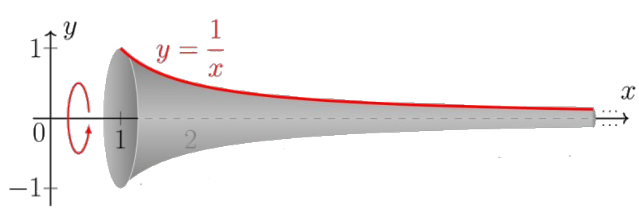
h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^2}\,dx$

P2. [*Gabriel's horn*: sólido de superficie infinita y volumen finito]
Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ con $x \geq 1$. El manto generado al rotar el grafo de esta función respecto al eje horizontal se denomina Trompeta de Torricelli o Cuerno de Gabriel, como se muestra en la figura.

a) Determine el volumen que por la curva.

b) Calcule el área del manto de revolución.

c) Comente respecto a los resultados obtenidos.



P3. [Aplicaciones]
Considere la región R comprendida entre la curva $y = \ln(x)$, la recta $y = x/e$, con $x \in (0, e]$.

a) Demuestre que el área de la región R es finita y calcúlela.

b) Calcule, si existe, el volumen engendrado por la rotación dde la región R en torno al eje OY.

c) Demuestre que la superficie S_{OY} del manto del sólido de revolución de la parte anterior tiene área finita y es acotada por $3\pi e\sqrt{1+e^2}$.
Obs.: S_{OY} está formada por la zona externa (logarítmica) y la zona interna (cono formado por la recta).

Integrales impropias y convergencias conocidas

Integral impropia de I especie, límite superior

Sea $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ función.

f es integrable en $[a,+\infty)$ si y solo si:

$$\begin{cases} \text{i) } (\forall\, x \in\ (a,+\infty)) : f \text{ es Riemann integrable en } [a,x] \\ \text{ii) } \exists \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \right) =: \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \end{cases}$$

Integral impropia de I especie, límite inferior

Sea $f\colon [-\infty,b) \to \mathbb{R}$ función.

f es integrable en $[-\infty,b)$ si y solo si:

$$\begin{cases} \text{i) } (\forall\, x \in\ (-\infty,b)) : f \text{ es Riemann integrable en } [x,b] \\ \text{ii) } \exists \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \right) =: \displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt \end{cases}$$

Integral impropia de II especie, límite superior

Sea $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ función no acotada.

f es integrable en $[a,b)$ si y solo si (*imaginar que se acerca a asíntota en $x=b$ por la izquierda*):

$$\begin{cases} \text{i) } (\forall\, x \in\ (a,b)) : f \text{ es Riemann integrable en } [a,x] \\ \text{ii) } \exists \lim\limits_{x\to b^-} \left(\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \right) =: \displaystyle\int_a^{b^-} f(t)\,dt \end{cases}$$

Integral impropia de II especie, límite inferior

Sea $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ función no acotada.

f es integrable en $[a,b)$ si y solo si (*imaginar que parte desde asíntota en $x=a$ por la derecha*):

$$\begin{cases} \text{i) } (\forall\, x \in\ (a,b)) : f \text{ es Riemann integrable en } [x,b] \\ \text{ii) } \exists \lim\limits_{x\to a^+} \left(\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \right) =: \displaystyle\int_{a^+}^{b} f(t)\,dt \end{cases}$$

Exponencial

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge (a 1)
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}$ converge (a $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$)

Racional

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ diverge
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ converge

Identidad

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,dx$ diverge

Logaritmo natural

- $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)\,dx$ y $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$ convergen

Impropia I de constante

$$\int_0^{+\infty} \beta\,dx \begin{cases} \text{converge a } 0 \text{ ssi } \beta = 0 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ ssi } \beta > 0 \text{ o a } -\infty \text{ si } \beta < 0 \end{cases}$$

Impropia II especie racional, límite superior

- $\displaystyle\int_a^{b^-} \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge ssi } \alpha < 1 \\ \text{diverge ssi } \alpha \geq 1 \end{cases}$
- $\displaystyle\int_a^{b^-} \frac{-1}{(x-b)^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge ssi } \alpha < 1 \\ \text{diverge ssi } \alpha \geq 1 \end{cases}$

Impropia II especie racional, límite inferior

- $\displaystyle\int_{a^+}^{b} \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge ssi } \alpha < 1 \\ \text{diverge ssi } \alpha \geq 1 \end{cases}$
- $\displaystyle\int_{a^+}^{b} \frac{-1}{(a-x)^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge ssi } \alpha < 1 \\ \text{diverge ssi } \alpha \geq 1 \end{cases}$

Impropia I especie racional

$$\int_{a>0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge ssi } \alpha > 1 \\ \text{diverge ssi } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Integrales impropias

Motivación

La definición de la integral de Riemann está sujeta a dos condiciones: que el intervalo de integración sea cerrado y acotado, y que la función a integrar sea una función acotada en ese intervalo. El estudio de integrales impropias surge con la necesidad de extender está definición para casos no acotados.

Tipos de integrales impropias

I especie: **intervalo** de integración es no acotado, con una función acotada.

II especie: **función no acotada**, en intervalo acotado.

III especie (mixta): integral compuesta por integrales impropias de I y II especie.

Integrales impropias de I especie

Corresponde al caso en que la función es acotada en el intervalo de integración, pero el **intervalo** en que se integra es **no acotado**. Para identificarlas, hay que observar que alguno de los límites de la integral sea ∞.

Integrales impropias de II especie

Corresponde al caso en que la **función** es **no acotada** en el intervalo acotado de integración. Para identificarlas, hay que observar si existen indefiniciones de la función dentro o en bordes del intervalo de integración.

Integral impropia de I especie, límite superior

Sea $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ función.

f es integrable en $[a,+\infty)$ si y solo si:

$$\begin{cases} \text{i) } (\forall\, x \in\ (a,+\infty)) : f \text{ es Riemann integrable en } [a,x] \\ \text{ii) } \exists \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \right) =: \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \end{cases}$$

Integral impropia de I especie, límite inferior

Sea $f\colon [-\infty,b) \to \mathbb{R}$ función.

f es integrable en $[-\infty,b)$ si y solo si:

$$\begin{cases} \text{i) } (\forall\, x \in\ (-\infty,b)) : f \text{ es Riemann integrable en } [x,b] \\ \text{ii) } \exists \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \right) =: \displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt \end{cases}$$

Integral impropia de II especie, límite superior

Sea $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ función no acotada.

f es integrable en $[a,b)$ si y solo si (*imaginar que se acerca a asíntota en $x=b$ por la izquierda)*:

$$\begin{cases} \text{i) } (\forall\, x \in\ (a,b)) : f \text{ es Riemann integrable en } [a,x] \\ \text{ii) } \exists \lim\limits_{x\to b^-} \left(\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \right) =: \displaystyle\int_a^{b^-} f(t)\,dt \end{cases}$$

Integral impropia de II especie, límite inferior

Sea $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ función no acotada.

f es integrable en $[a,b)$ si y solo si (*imaginar que parte desde asíntota en $x=a$ por la derecha)*:

$$\begin{cases} \text{i) } (\forall\, x \in\ (a,b)) : f \text{ es Riemann integrable en } [x,b] \\ \text{ii) } \exists \lim\limits_{x\to a^+} \left(\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \right) =: \displaystyle\int_{a^+}^{b} f(t)\,dt \end{cases}$$

Separación en impropias de I especie

Si las integrales del lado derecho convergen, entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{+\infty} f(t)\,dt, \text{ algún } c \in \mathbb{R}$$

Separación en impropias de II especie

Si las integrales del lado derecho convergen, entonces:

$$\int_{a^+}^{b^-} f(t)\,dt = \int_{a^+}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{b^-} f(t)\,dt, \text{ algún } c \in (a,b)$$

Criterios de convergencia para integrales impropias

Criterio de comparación

Sea f continua (Riemann integrable) en $[a, x]$.

Sea g continua (Riemann integrable) en $[b, x]$.

Si $(\exists\, c \geq \text{máx}\,\{a, b\}) : 0 \leq f(x) \leq g(x)\,(\forall\, x \geq c)$.

Entonces, para integrales **impropias de I especie**:

i) Caso "g domina a f":

$$\int_b^{+\infty} g \text{ converge} \implies \int_a^{+\infty} f \text{ converge}$$

ii) Caso "f domina a g":

$$\int_a^{+\infty} f \text{ diverge} \implies \int_b^{+\infty} g \text{ diverge}$$

Y para integrales **impropias de II especie**, asumiendo g definida en $[b, c]$ y f definida en $[a, b]$:

i) Caso "g domina a f":

$$\int_b^{c} g \text{ converge} \implies \int_a^{b} f \text{ converge}$$

ii) Caso "f domina a g":

$$\int_a^{b} f \text{ diverge} \implies \int_b^{c} g \text{ converge}$$

El objetivo de este criterio es ver que si la integral de la función que mayora converge, eso obliga la convergencia en la integral de la función mayorada.

En el caso converso, el objetivo es ver que si la integral de función mayorada diverge, eso obliga la divergencia de la en la integral de la mayorada.

Convergencia absoluta

Sea f una función Riemann integrable. Independiente del tipo intervalo I donde se integre: $\int_I f$ es absolutamente convergente (AC) ssi $\int_I |f|$ converge.

Es solo una def y no asegura convergencia de $\int f$.

Criterio del cuociente

Sea f continua (Riemann integrable) en $[a, x]$.

Sea g continua (Riemann integrable) en $[b, x]$.

Si $(\exists\, c \geq \text{máx}\,\{a, b\}) : 0 \leq f(x) \wedge g(x)\ > 0\,(\forall\, x \geq c)$.

Considerar $L := \lim\limits_{x \to \gamma} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$, con $\gamma = \infty$ en el caso de integrales impropias de I especie, o $\gamma \in \{a^+, b^-\}$ en el caso de integrales impropias de II especie. Entonces:

i) Caso $L \in (0, +\infty)$: "ambas se comportan igual"
Entonces $\int f, \int g$ ambas convergen o divergen.

ii) Caso $L = 0$ (*denominador crece más rápido*):
Entonces $\int g$ converge $\implies \int f$ converge
$\iff \int f$ diverge $\implies \int g$ diverge

iii) Caso $L = \infty$ (*numerador crece más rápido*)
Entonces $\int f$ converge $\implies \int g$ converge
$\iff \int g$ diverge $\implies \int f$ diverge

El rol de L es comparar el comportamiento asintótico de las funciones. En impropias de **I** clase, importa hacia $+\infty$ o $-\infty$, y en impropias de II clase, importa hacia a^+ o hacia b^-. Una vez conocida el comportamiento de ambas funciones asintóticamente, se puede clasificar el caso de convergencia de las integrales.

Criterio de convergencia absoluta

Si integral converge absolutamente (i.e. converge en valor absoluto), entonces la integral converge.

i) Para integrales **impropias de I especie**:

$$\int_a^{+\infty} |f| \text{ converge} \implies \int_a^{+\infty} f \text{ converge.}$$

ii) Para integrales **impropias de II especie**

$$\int_a^{b} |f| \text{ converge} \implies \int_a^{b} f \text{ converge.}$$

Convergencias conocidas de integrales impropias

Exponencial

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge (a 1)
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}$ converge (a $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

Identidad

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,dx$ diverge

Racional

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ diverge
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ converge

Logaritmo natural

- $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)\,dx$ converge
- $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$ converge

Impropia I de constante

$$\int_0^{+\infty} \beta\,dx \begin{cases} \text{converge a } 0 \text{ ssi } \beta = 0 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ ssi } \beta > 0 \text{ o a } -\infty \text{ si } \beta < 0 \end{cases}$$

Impropia II especie racional, límite superior

- $$\int_a^{b^-} \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge ssi } \alpha < 1 \\ \text{diverge ssi } \alpha \geq 1 \end{cases}$$
- $$\int_a^{b^-} \frac{-1}{(x-b)^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge ssi } \alpha < 1 \\ \text{diverge ssi } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Impropia II especie racional, límite inferior

- $$\int_{a^+}^{b} \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge ssi } \alpha < 1 \\ \text{diverge ssi } \alpha \geq 1 \end{cases}$$
- $$\int_{a^+}^{b} \frac{-1}{(a-x)^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge ssi } \alpha < 1 \\ \text{diverge ssi } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Impropia I especie racional

$$\int_{a>0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge ssi } \alpha > 1 \\ \text{diverge ssi } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Álgebra elemental de integrales impropias

convergente + convergente = convergente
convergente + divergente = divergente
divergente + divergente = convergente o divergente

Comportamiento asintótico, para I especie

Si f es función creciente en $[a, +\infty)$, entonces solo hay 2 casos si $x \to +\infty$: $f(x) \to L \in \mathbb{R}$ o $f(x) \to +\infty$.

Si f es función decreciente en $(-\infty, b]$, entonces solo hay dos casos si $x \to -\infty$: $f(x) \to L \in \mathbb{R}$ o $f(x) \to -\infty$.

Comportamiento asintótico, para II especie

Si f es función creciente en $[a, b)$, entonces solo hay dos casos si $x \to b^-$: $f(x) \to L \in \mathbb{R}$ o $f(x) \to +\infty$.

Si f es función decreciente en $(a, b]$, entonces solo hay dos casos si $x \to a^-$: $f(x) \to L \in \mathbb{R}$ o $f(x) \to -\infty$.

Cota para logaritmo natural

$$\ln(x) \leq \sqrt{x}\,(\forall\, x \in (1, +\infty))$$

Otra cota para logaritmo natural

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1\,(\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$