

Auxiliar 11: Más aplicaciones de la integral



Profesora: M. Eugenia Martínez M.

Auxiliar: Bianca Zamora Araya

Fecha: 5 de noviembre de 2025

P1. [Visualizar]

La parábola $f(x) = -6x^2 + 5x + 1$ corta al eje Y en el punto $P(0, 1)$. Considere el punto $Q(a, f(a))$ en la parábola, con $a \geq 0$. Demuestre que el área comprendida entre la parábola y el segmento PQ es igual a a^3 .

P2. [Mantos]

- Determine el área del manto del sólido engendrado al rotar, en torno al eje OY , el trozo de la curva $y = \frac{1}{2}x^2$ comprendido entre 0 y 1.
- Considere la función $f: [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -\ln(1 - x^2)$.
 - Calcule el largo de la curva $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in [0, \frac{1}{2}]\}$
 - Calcule el volumen del sólido de revolución engendrado por la rotación en torno al eje OY de la región $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \in [0, \frac{1}{2}] \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$.
 - Calcule el área del manto generado por la rotación en torno al eje OY de Γ .

P3. [Tiempo]

Considere la espiral de ecuación paramétrica $x(t) = e^{2t} \cos(t), y(t) = e^{2t} \sin(t)$.

- Encuentre el largo L de la curva obtenida al variar el parámetro t desde 0 hasta 2π .
- Determine t_0 tal que la longitud de la curva obtenida al variar t desde 0 hasta t_0 sea igual a la mitad de L .

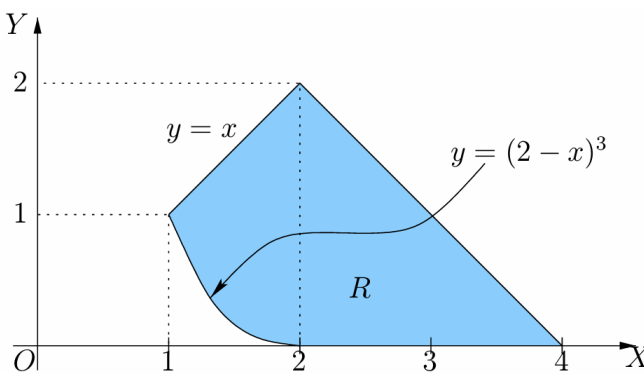
P4. [Caminar]

Una hormiga, que se encuentra inicialmente en el origen, sube una montaña que está descrita en alto, ancho y profundidad a través de las ecuaciones $x(t) = t^2 \cos(t)$, $y(t) = t^2 \sin(t)$, $z(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}t^3$. Determine la distancia al plano OXY que se encuentra la hormiga cuando ha recorrido una distancia $d = \frac{14}{3}$ por la montaña.

P5. [Por partes]

En un proyecto de biomecánica se debe diseñar una pieza como la que se muestra en la figura. En dicho contexto, le piden que calcule ciertas características para conocer mejor el comportamiento de la muestra.

- Calcule el área de R .
- Calcule el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de R en torno al eje OY .
- Calcule el área del manto total del sólido de revolución generado por la rotación de R en torno al eje OX .



Aplicaciones de la integral

Área bajo una curva

$$A_a^b(f) := \int_a^b |f(x)| dx = \int_{f(a)}^{f(b)} |f^{-1}(y)| dy$$

Área comprendida entre dos curvas

$$A_a^b(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Área bajo una curva en coordenadas polares

$$A_\alpha^\beta(f) := \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} (f(\phi))^2 d\phi$$

Longitud del arco de una curva

$$\mathcal{L}_a^b(f) := \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Volumen del sólido engendrado en torno a OX

También conocido como el **método de las cáscaras**.

$$V_{OX} := \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

Volumen del sólido engendrado en torno a OY

También conocido como el **método de los discos**.

$$V_{OY} := \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

Manto de revolución engendrada en torno a OX

$$S_{OX} := \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Manto de revolución engendrada en torno a OY

$$S_{OY} := \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Coordenadas polares

Un punto (x, y) en el plano cartesiano, se puede visitar en el plano polar con la conversión $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, donde r es el largo de la línea recta que une el punto con el origen y satisface $r^2 = x^2 + y^2$, y θ es el ángulo que subtiende la línea de largo r desde el eje OX tal que $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$.

Sólido de revolución

Es la figura geométrica que se obtiene por la rotación de un área plana en torno a un eje fijo. Destacan los casos en que se rota en torno al eje OX o al OY .