Auxiliar 10: Aplicaciones de la integral

Profesora: M. Eugenia Martínez M.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 22 de octubre de 2025

P1. [Espacios]

a) Calcule el área encerrada entre las curvas $y^2 = x$ e $y = x$, entre $x = 0$ y $x = 4$.

b) Sea $f\colon [0,2]$ definida por $f(x) = x\sqrt{2-x}$. Considere la región $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,2] \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$.

- **i)** Calcule el área de la región $\mathcal{R}$.
- **ii)** Calcule V_{OX}, el volumen del sólido engendrado por la rotación de $\mathcal{R}$ en torno al eje OX.
- **iii)** Calcule V_{OY}, el volumen del sólido engendrado por la rotación de $\mathcal{R}$ en torno al eje OY.

P2. [Frazadas]

a) Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{3}\left(2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}$, con $x \in [1,2]$.

- **i)** Calcule el largo de la curva de ecuación $y = f(x)$ si $x \in [1,2]$.
- **ii)** Calcule el área del manto del sólido generado por la rotación de la región bajo la curva $y = f(x)$ en torno al eje OY.

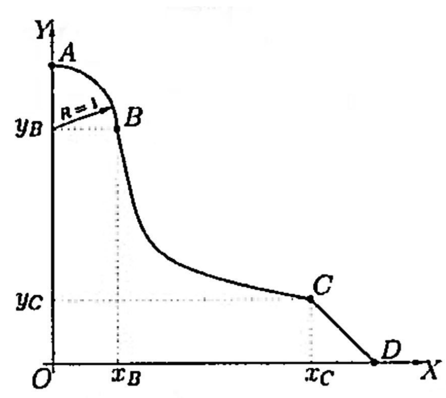
b) Considere la función $f(x) = \cosh(x)$.

- **i)** Calcule la longitud de la curva definida por f en el intervalo $[0,1]$.
- **ii)** Se define la región $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1] \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$. Calcule la superficie del manto del sólido que se genera al rotar la región Ω en torno al eje OX.

c) Dada la elipse de ecuación $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, encontrar la superficie del manto del sólido de revolución generado al rotar la eclipse en torno al eje OX.

P3. [Contexto]

Un adorno de halloween se forma por la rotación en torno al eje OY de la región del primer cuadrante encerrada por la curva $OABCDO$ de la figura:



- AB: es un tramo de circunferencia de radio $R = 1$, centrada en $(0, y_B)$, donde y_B debe calcularse.
- BC: es un tramo de la curva de ecuación $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$.
- C: es un punto de abscisa $x_C = 3\sqrt{3}$.
- CD: es un trazo de recta de pendiente $m = -1$.

a) Encuentre las coordenadas de los puntos A, B, C y D.

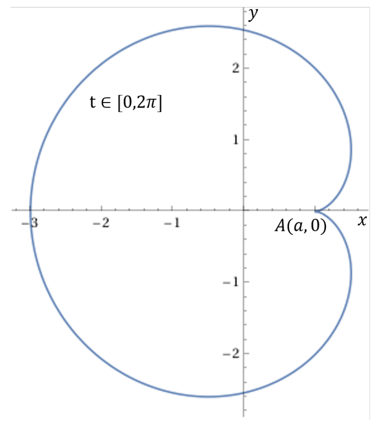
b) Escriba las ecuaciones de los tramos AB, BC y CD de la curva, presentando cada uno en la forma $y = f(x)$.

c) Escriba explícitamente las 3 integrales, cuya suma permite calcular el volumen del adorno y calcúlelas.
Indicación: Puede usar el reemplazo $u = 4 - x^{\frac{2}{3}}$ donde corresponda.

d) Escriba explícitamente las 3 integrales, cuya suma permite calcula el área total del manto generado por la curva $ABCD$ y calcúlelas.

P4. [Contexto]

Las ecuaciones parámetricas que se indican definen una curva cerrada, que luce como se muestra en la figura. Cuando $t = 0$, parte en el punto $A(a, 0)$, y vuelve a ese punto paea $t = 2\pi$.



$$\begin{cases} x(t) = a\,(2\cos(t) - \cos(2t)) \\ y(t) = a\,(2\sin(t) - \sin(2t)) \end{cases}$$

Calcule la longitud de la curva.