Auxiliar 9: Integral de Riemann y mucho TFC

Profesora: M. Eugenia Martínez M.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 15 de octubre de 2025

P1. [A partir]
Demuestre que las siguientes integrales se pueden calcular en el sentido de Riemann. Para esto, deberá encontrar una función y una partición adecuadas, y posteriormente calcular el límite.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx$ **c)** $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)\,dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

P2. [Caminar]
Considere una función $f\colon [a,b] \to [c,d]$ continua, biyectiva y estrictamente creciente.

a) Explique por qué f^{-1} preserva sus propiedades.

b) Considere la partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a,b]$ y su correspondiente partición imagen $Q = \{f(x_0), \ldots, f(x_n)\}$ del intervalo $[c,d]$. Demuestre que $S(f,P) + s\left(f^{-1}, Q\right) = bd - ac$

c) Demuestre que $\displaystyle\int_c^d f^{-1} = bd - ac - \int_a^b f$. Justifique cada paso.

P3. [Al revés v3]
Calcule las siguientes integrales definidas. Indicación: Use las distintas herramientas conocidas (cambio de variable, integración por partes, etc.) y Teorema Fundamental del Cálculo.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4+3\cos(x)}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1-\tan(x))\,dx$

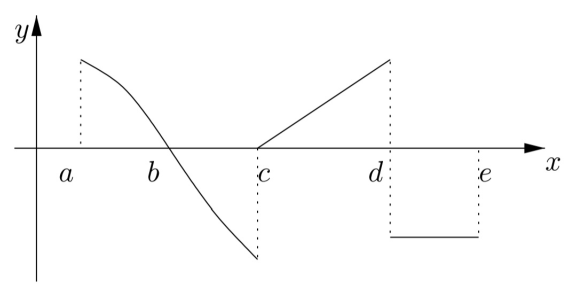
c) Demuestre que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = \pi \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$. Indicación: Recuerde que $\arccos(u)+\arccos(-u) = \pi$.

P4. [Límites]

a) Pruebe que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \int_1^{2\pi} \frac{\sin(nx)}{x}\,dx \right| = 0$. Indicación: Integre por partes y acote apropiadamente.

b) Calcule el siguiente límite: $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\displaystyle\int_1^x (x-1)\sin(t^2)\,dt}{\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \sin(t^2-1)\,dt}$.

P5. [El orden de los factores no altera el producto v2]
La figura muestra el gráfico de una función $f(x)$ en el intervalo $[a,e]$. Con ella se define la función $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Indique, argumentando apropiadamente, cuales son los crecimientos, concavidades y continuidad de la función F.



P6. [Nuevas ideas]

Considere las funciones $G(y) = \displaystyle\int_{\sqrt{y}}^{1} y f(t)\,dt$ y $H(x) = \displaystyle\int_{0}^{x^2} t f(t)\,dt$ donde f es continua en $\mathbb{R}$.

a) Calcule $G'(y)$ y $H'(y)$.

b) Pruebe que si $f(x) = x$ entones $\displaystyle\int_0^1 G(y)\,dy = \int_0^1 H(x)\,dx$.

P7. [Aplicaciones]

Encuentre una función f y un real $a > 0$ tales que $6 + \displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t}$ $(\forall\, x > 0)$