

Auxiliar 8: Escalonadas e integral de Riemann



Profesora: M. Eugenia Martínez M.

Auxiliar: Bianca Zamora Araya

Fecha: 8 de octubre de 2025

P1. [A pensar]

Indique, justificando brevemente, si las siguientes funciones son o no Riemann integrables en $[a, b]$, ($0 < a < b$). Considere (s_n) una sucesión decreciente tal que $s_0 = b$ y $s_n \rightarrow a$.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in (s_n, s_{n-1}], n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ 0, & x = a \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-x}, & x \in [a, b) \\ 0, & x = b \end{cases} \quad \text{c) } h(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \\ 0, & x \in \mathbb{I} \cap [a, b] \end{cases}$$

P2. [Recorrido]

Considere la función $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ g(x), & x \in [1, 3] \end{cases}$, donde $g(x)$ es una función decreciente en $[1, 3]$ que cumple que $g(1) = 2$ y $g(3) = 0$. Dado $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, se pide:

- a) Considere la partición $P = \{0, 1-h, x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ donde $x_i = 1 + ih$ ($\forall i \in [0..n]$) y $h = \frac{2}{n}$. Calcule la suma inferior $s(f, P)$ y la suma superior $S(f, P)$.
- b) Demuestre que $S(f, P) - s(f, P) = h + \sum_{i=1}^n (g(x_{i-1}) - g(x_i))h$. i) Calcule la sumatoria. ii) Deduzca que f cumple la condición de Riemann, indicando para qué valores de h se cumple.
- c) Si $g(x) = -x + 3$, calcule explícitamente $s(f, P)$ en términos de n y pruebe que $\lim_{n \rightarrow \infty} s(f, P) = 3$.

P3. [Por debajo]

Considere la función definida por $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x+1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Se sabe que esta función no es Riemann Integrable en el intervalo $I = [0, 1]$. Considere para $n \in \mathbb{N}$ fijo la partición equiespaciada de I , $P = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$.

- a) Calcule explícitamente, en términos de n , el valor de $s(f, P)$. b) Pruebe que $\lim_{n \rightarrow \infty} s(f, P) = \frac{1}{2}$.

P4. [Exponencial]

Escriba la integral $\int_0^1 e^x dx$ en el sentido de Riemann. Justifique cada paso.

P5. [Sorpresa]

- a) Demuestre que es posible expresar la integral $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} dx$ en el sentido de Riemann. b) Calcule la primitiva.

P6. [De otro mundo]

Decida si es posible expresar $\int_0^1 \ln(1 + (x\pi)^2) dx$ como una integral de Riemann.

INDICACIÓN: Trabaje la expresión $\ln \left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(1 + \left(\frac{i\pi}{n} \right)^2 \right)} \right)$, considerando i índice de un conjunto de n índices.