Auxiliar 6: Primeras primitivas

Profesora: M. Eugenia Martínez M.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 24 de septiembre de 2025

P1. [Al revés]
Calcule las siguientes primitivas:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x\left(\ln(x)+(\ln(x))^2\right)}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{r^3}{(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\,dr$ **c)** $\displaystyle\int \frac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^2+2)^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int \left(3x^2-1\right)\ln\left(x+1\right)\,dx$ **e)** $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)\,(1+x)}\,dx$ **f)** $\displaystyle\int \sin(x)^2\,dx$

g) $\displaystyle\int \left(\arcsin(x)\right)^2\,dx$ **h)** $\displaystyle\int \frac{3x+2}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$ **i)** $\displaystyle\int \frac{e^{3\theta}}{1+e^{2\theta}}\,d\theta$

j) $\displaystyle\int \ln\left(\cos^2(x)\right)\sin(x)\,dx$ **k)** $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$ **l)** $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

m) $\displaystyle\int x^2\sin(x)\,dx$ **n)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ **ñ)** $\displaystyle\int \ln\left(1+x^2\right)\,dx$

o) $\displaystyle\int e^{-\sqrt{x}}\,dx$ **p)** $\displaystyle\int \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)\,dx$ **q)** $\displaystyle\int \frac{\arctan(x)}{x^2}\,dx$

P2. [Paso a paso]
Considere la primitiva $I=\displaystyle\int \frac{1}{x^2\,(1+x^2)}\,dx$.

a) Determine las constantes $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ tales que $\dfrac{1}{x^2\,(1+x^2)}=\dfrac{\alpha}{x}+\dfrac{\beta}{x^2}+\dfrac{2\gamma x+\delta}{1+x^2}$.

b) Calcule la primitiva I. Puede dejarla en términos de las constantes ya conocidas $\alpha,\beta,\gamma,\delta$.

P3. [REC]

a) Considere la integral $I_n=\displaystyle\int \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$, $n\in\mathbb{N}$.

  i) Muestre, integrando por partes, que I_n satisface la recurrencia $I_n=\dfrac{t}{2\,(n-1)\,(1+t^2)^{n-1}}+\dfrac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$.

  ii) Calcule $I_2=\displaystyle\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt$

b) Defina $I_n=\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x}}\,dx$ ($\forall\, n\in\mathbb{N}$). Pruebe que para $n\geq 1$ se tiene que $(1+2n)\,I_n=2x^n\sqrt{1+x}-2nI_{n-1}$.

c) Pruebe que $I_n=\displaystyle\int \frac{e^{ax}}{x^n}$ para $n\geq 2$ satisface la recurrencia $I_n=-\dfrac{e^{ax}}{(n-1)x^{n-1}}+\dfrac{a}{n-1}I_{n-1}$.

d) Encuentre una fórmula de recurrencia para $I_n=\displaystyle\int (x+1)^n\sqrt{x}\,dx$, para $n\in\mathbb{N}$.