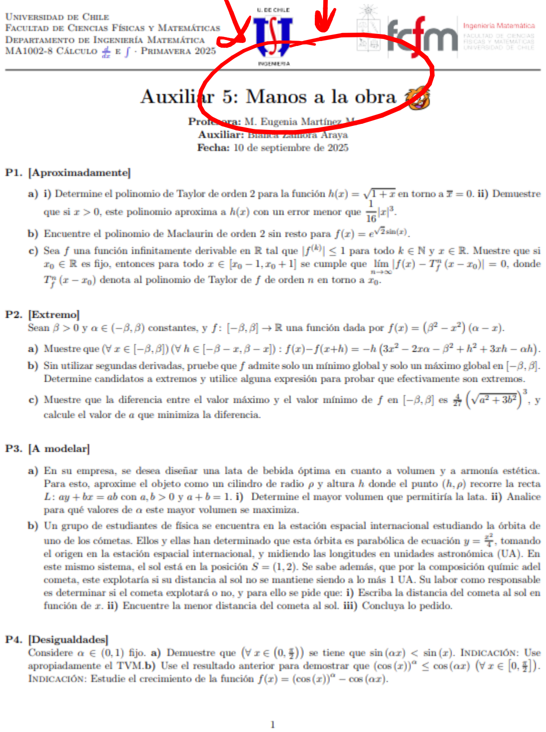
AUX 5

Disclaimer
RP
baja asistencia

{ Derivabilidad
Continuidad



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA
MA1002-8 CÁLCULO $\frac{d}{dx}$ E $\int$ · PRIMAVERA 2025

Auxiliar 5: Manos a la obra

Profesora: M. Eugenia Martínez M.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 10 de septiembre de 2025

P1. [Aproximadamente]

a) **i)** Determine el polinomio de Taylor de orden 2 para la función $h(x)=\sqrt{1+x}$ en torno a $\overline{x}=0$. **ii)** Demuestre que si $x>0$, este polinomio aproxima a $h(x)$ con un error menor que $\frac{1}{16}|x|^3$.

b) Encuentre el polinomio de Maclaurin de orden 2 sin resto para $f(x)=e^{\sqrt{2}\sin(x)}$.

c) Sea f una función infinitamente derivable en $\mathbb{R}$ tal que $|f^{(k)}|\leq 1$ para todo $k\in\mathbb{N}$ y $x\in\mathbb{R}$. Muestre que si $x_0\in\mathbb{R}$ es fijo, entonces para todo $x\in[x_0-1,x_0+1]$ se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty}|f(x)-T_f^n(x-x_0)|=0$, donde $T_f^n(x-x_0)$ denota al polinomio de Taylor de f de orden n en torno a x_0.

P2. [Extremo]
Sean $\beta>0$ y $\alpha\in(-\beta,\beta)$ constantes, y $f\colon[-\beta,\beta]\to\mathbb{R}$ una función dada por $f(x)=\left(\beta^2-x^2\right)(\alpha-x)$.

a) Muestre que $(\forall\, x\in[-\beta,\beta])\,(\forall\, h\in[-\beta-x,\beta-x]):f(x)-f(x+h)=-h\left(3x^2-2x\alpha-\beta^2+h^2+3xh-\alpha h\right)$.

b) Sin utilizar segundas derivadas, pruebe que f admite solo un mínimo global y solo un máximo global en $[-\beta,\beta]$. Determine candidatos a extremos y utilice alguna expresión para probar que efectivamente son extremos.

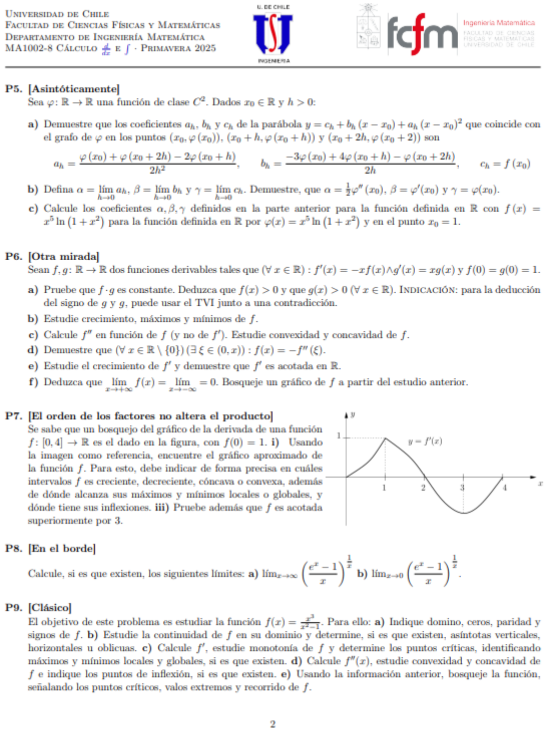
c) Muestre que la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de f en $[-\beta,\beta]$ es $\frac{4}{27}\left(\sqrt{a^2+3b^2}\right)^3$, y calcule el valor de a que minimiza la diferencia.

P3. [A modelar]

a) En su empresa, se desea diseñar una lata de bebida óptima en cuanto a volumen y a armonía estética. Para esto, aproxime el objeto como un cilindro de radio ρ y altura h donde el punto (h,ρ) recorre la recta $L\colon ay+bx=ab$ con $a,b>0$ y $a+b=1$. **i)** Determine el mayor volumen que permitiría la lata. **ii)** Analice para qué valores de α este mayor volumen se maximiza.

b) Un grupo de estudiantes de física se encuentra en la estación espacial internacional estudiando la órbita de uno de los cómetas. Ellos y ellas han determinado que esta órbita es parabólica de ecuación $y=\frac{x^2}{4}$, tomando el origen en la estación espacial internacional, y midiendo las longitudes en unidades astronómica (UA). En este mismo sistema, el sol está en la posición $S=(1,2)$. Se sabe además, que por la composición químic adel cometa, este explotaría si su distancia al sol no se mantiene siendo a lo más 1 UA. Su labor como responsable es determinar si el cometa explotará o no, y para ello se pide que: **i)** Escriba la distancia del cometa al sol en función de x. **ii)** Encuentre la menor distancia del cometa al sol. **iii)** Concluya lo pedido.

P4. [Desigualdades]
Considere $\alpha\in(0,1)$ fijo. **a)** Demuestre que $\left(\forall\, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$ se tiene que $\sin(\alpha x)<\sin(x)$. INDICACIÓN: Use apropiadamente el TVM.**b)** Use el resultado anterior para demostrar que $(\cos(x))^\alpha\leq\cos(\alpha x)$ $\left(\forall\, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$. INDICACIÓN: Estudie el crecimiento de la función $f(x)=(\cos(x))^\alpha-\cos(\alpha x)$.



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA
MA1002-8 CÁLCULO $\frac{d}{dx}$ E $\int$ · PRIMAVERA 2025

P5. [Asintóticamente]
Sea $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función de clase C^2. Dados $x_0\in\mathbb{R}$ y $h>0$:

a) Demuestre que los coeficientes a_h, b_h y c_h de la parábola $y=c_h+b_h(x-x_0)+a_h(x-x_0)^2$ que coincide con el grafo de φ en los puntos $(x_0,\varphi(x_0))$, $(x_0+h,\varphi(x_0+h))$ y $(x_0+2h,\varphi(x_0+2))$ son

$$a_h=\frac{\varphi(x_0)+\varphi(x_0+2h)-2\varphi(x_0+h)}{2h^2},\qquad b_h=\frac{-3\varphi(x_0)+4\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0+2h)}{2h},\qquad c_h=f(x_0)$$

b) Defina $\alpha=\lim\limits_{h\to0}a_h$, $\beta=\lim\limits_{h\to0}b_h$ y $\gamma=\lim\limits_{h\to0}c_h$. Demuestre, que $\alpha=\frac{1}{2}\varphi''(x_0)$, $\beta=\varphi'(x_0)$ y $\gamma=\varphi(x_0)$.

c) Calcule los coeficientes α,β,γ definidos en la parte anterior para la función definida en $\mathbb{R}$ con $f(x)=x^5\ln\left(1+x^2\right)$ para la función definida en $\mathbb{R}$ por $\varphi(x)=x^5\ln\left(1+x^2\right)$ y en el punto $x_0=1$.

P6. [Otra mirada]
Sean $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que $(\forall\, x\in\mathbb{R}):f'(x)=-xf(x)\wedge g'(x)=xg(x)$ y $f(0)=g(0)=1$.

a) Pruebe que $f\cdot g$ es constante. Deduzca que $f(x)>0$ y que $g(x)>0$ $(\forall\, x\in\mathbb{R})$. INDICACIÓN: para la deducción del signo de g y g, puede usar el TVI junto a una contradicción.

b) Estudie crecimiento, máximos y mínimos de f.

c) Calcule f'' en función de f (y no de f'). Estudie convexidad y concavidad de f.

d) Demuestre que $(\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\})\,(\exists\,\xi\in(0,x)):f(x)=-f''(\xi)$.

e) Estudie el crecimiento de f' y demuestre que f' es acotada en $\mathbb{R}$.

f) Deduzca que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}=0$. Bosqueje un gráfico de f a partir del estudio anterior.

P7. [El orden de los factores no altera el producto]
Se sabe que un bosquejo del gráfico de la derivada de una función $f\colon[0,4]\to\mathbb{R}$ es el dado en la figura, con $f(0)=1$. **i)** Usando la imagen como referencia, encuentre el gráfico aproximado de la función f. Para esto, debe indicar de forma precisa en cuáles intervalos f es creciente, decreciente, cóncava o convexa, además de dónde alcanza sus máximos y mínimos locales o globales, y dónde tiene sus inflexiones. **iii)** Pruebe además que f es acotada superiormente por 3.

P8. [En el borde]

Calcule, si es que existen, los siguientes límites: **a)** $\text{lím}_{x\to\infty}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ **b)** $\text{lím}_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

P9. [Clásico]
El objetivo de este problema es estudiar la función $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$. Para ello: **a)** Indique domino, ceros, paridad y signos de f. **b)** Estudie la continuidad de f en su dominio y determine, si es que existen, asíntotas verticales, horizontales u oblicuas. **c)** Calcule f', estudie monotonía de f y determine los puntos críticas, identificando máximos y mínimos locales y globales, si es que existen. **d)** Calcule $f''(x)$, estudie convexidad y concavidad de f e indique los puntos de inflexión, si es que existen. **e)** Usando la información anterior, bosqueje la función, señalando los puntos críticos, valos extremos y recorrido de f.

P_1 a)

a) **i)** Determine el polinomio de Taylor de orden 2 para la función $h(x) = \sqrt{1+x}$ en torno a $\overline{x} = 0$. **ii)** Demuestre que si $x > 0$, este polinomio aproxima a $h(x)$ con un error menor que $\frac{1}{16}|x|^3$.

Fórmula de Taylor (función = aprox. + error)

Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ $k+1$ veces derivable en $\overline{x} \in (a,b)$. Su **desarrollo de Taylor de orden** n **en torno a** x_0 es: $T^n_{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Entonces $(\forall\, x > x_0)\,(\exists\, \xi \in (x_0, x))$ se satisface que

$$f(x) = T^n_{x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Polinomio de Taylor de f suficientemente derivable, en torno a x_0 : $f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x-x_0)^3$

grado

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

(P1) a) i) $T^{n=2}_{\bar{x}=0}(h)(x) = h(\bar{x}) + h'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{1}{2}h''(\bar{x})(x-\bar{x})^2 \,\Big|\, \bar{x}=0$

$= h(0) + h'(0)(x-0) + \frac{1}{2}h''(0)(x-0)^2$

$= h(0) + h'(0)x + \frac{1}{2}h''(0)x^2$

⚠ 1°) derivo
2°) evalúo

a) i) Determine el polinomio de Taylor de orden 2 para la función $h(x)=\sqrt{1+x}$ en torno a $\overline{x}=0$. **ii)** Demuestre que si $x>0$, este polinomio aproxima a $h(x)$ con un error menor que $\frac{1}{16}|x|^3$.

Fórmula de Taylor (función = aprox. + error)

Sea $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ $k+1$ veces derivable en $\overline{x}\in(a,b)$. Su **desarrollo de Taylor de orden** n **en torno a** x_0 es: $T^n_{x_0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Entonces $(\forall\, x>x_0)\,(\exists\, \xi\in(x_0,x))$ se satisface que

$$f(x)=T^n_{x_0}(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

(P1) a) i)

$$T^{n=2}_{\bar{x}=0}(h)(x)=h(\bar{x})+h'(\bar{x})(x-\bar{x})+\frac{1}{2}h''(\bar{x})(x-\bar{x})^2\Big|_{\bar{x}=0}$$

$$=h(0)+h'(0)(x-0)+\frac{1}{2}h''(0)(x-0)^2$$

$$=\boxed{h(0)}+\boxed{h'(0)}x+\frac{1}{2}\boxed{h''(0)}x^2$$

⚠ 1°) derivo
2°) evalúo

$$h(x)=\sqrt{1+x}\Rightarrow h(0)=\sqrt{1+0}=1$$

$$h'(x)=\left[\sqrt{1+x}\right]'=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\left[\cancelto{1}{1+x}\right]'=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\Rightarrow h'(0)=\frac{1}{2\sqrt{1+0}}=\frac{1}{2}$$

$$h''(x)=\left[\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right]'=\frac{d^2h}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dh}{dx}(x)\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right]'=\frac{1}{2}\left[(1+x)^{-\frac{1}{2}}\right]'=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\Leftrightarrow h''(x)=-\frac{1}{4}\frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow h''(0)=-\frac{1}{4}\frac{1}{(1+0)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{4}$$

a) i) Determine el polinomio de Taylor de orden 2 para la función $h(x) = \sqrt{1+x}$ en torno a $\overline{x} = 0$. **ii)** Demuestre que si $x > 0$, este polinomio aproxima a $h(x)$ con un error menor que $\frac{1}{16}|x|^3$.

Fórmula de Taylor (función = aprox. + error)

Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ $k+1$ veces derivable en $\overline{x} \in (a,b)$. Su **desarrollo de Taylor de orden** n **en torno a** x_0 es: $T^n_{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Entonces $(\forall\, x > x_0)\,(\exists\, \xi \in (x_0, x))$ se satisface que

$$f(x) = T^n_{x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

ⓟ₁ a) i)

$$T^{n=2}_{\bar{x}=0}(h)(x) = h(\bar{x}) + h'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{1}{2}h''(\bar{x})(x-\bar{x})^2 \quad \Big| \quad \bar{x} = 0$$

$$= h(0) + h'(0)(x-0) + \frac{1}{2}h''(0)(x-0)^2$$

$$= \boxed{h(0)} + \boxed{h'(0)}x + \frac{1}{2}\boxed{h''(0)}x^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)x^2$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{T^{n=2}_{\bar{x}=0}(h)(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2}$$

⚠ 1°) derivo
2°) evalúo

a) i) Determine el polinomio de Taylor de orden 2 para la función $h(x) = \sqrt{1+x}$ en torno a $\overline{x} = 0$. **ii)** Demuestre que si $x > 0$, este polinomio aproxima a $h(x)$ con un error menor que $\frac{1}{16}|x|^3$.

Fórmula de Taylor (función = aprox. + error)

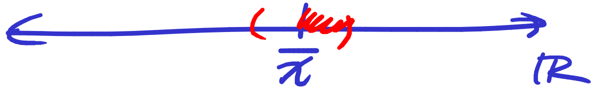
Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ $k+1$ veces derivable en $\overline{x} \in (a,b)$. Su **desarrollo de Taylor de orden** n **en torno a** x_0 es: $T^n_{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Entonces $(\forall\, x > x_0)\,(\exists\, \xi \in (x_0, x))$ se satisface que

$$f(x) = T^n_{x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

$$\boxed{T^{n=2}_{\overline{x}=0}(h)(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2}$$

$$h(\overline{x}) = T^n_{\overline{x}}(h)(x) + R^n_{\overline{x}}(h)(x)$$



(P_1) a) ii) El error está dado por (del polinomio de Taylor de orden n en torno a $\overline{x}$, de h) : $\frac{h^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-\overline{x})^{n+1}$, $\xi \in (\overline{x}, x)$

$$\xrightarrow[\overline{x}=0]{n=2} R^n_{\overline{x}}(h) = \frac{h^{(3)}(\xi)}{3!}(x-0)^3 \quad , \quad \xi \in (0,x)$$

$$= \frac{h^{(3)}(\xi)}{3!}x^3, \quad \xi \in (0,x)$$

a) **i)** Determine el polinomio de Taylor de orden 2 para la función $h(x)=\sqrt{1+x}$ en torno a $\overline{x}=0$. **ii)** Demuestre que si $x>0$, este polinomio aproxima a $h(x)$ con un error menor que $\frac{1}{16}|x|^3$.

Fórmula de Taylor (función = aprox. + error)

Sea $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ $k+1$ veces derivable en $\overline{x}\in(a,b)$. Su **desarrollo de Taylor de orden** n **en torno a** x_0 es: $T^n_{x_0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Entonces $(\forall\, x>x_0)\,(\exists\,\xi\in(x_0,x))$ se satisface que

$$f(x)=T^n_{x_0}(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

(P1) a) ii) El error está dado por

$$\xrightarrow[\overline{x}=0]{n=2} R^n_{\overline{x}}(h)=\frac{h^{(3)}(\xi)}{3!}x^3,\quad \xi\in(0,x)$$

Queremos ver que $|R^n_{\overline{x}}h|\le\frac{1}{16}|x|^3$

$$(1+x)^{-\frac{5}{2}}=(1+x)^{-2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$h'''(x)=\left[-\frac{1}{4}\frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\right]'=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2h}{dx}(x)\right)=-\frac{1}{4}\left[(1+x)^{-\frac{3}{2}}\right]'=-\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{8}\frac{1}{(1+x)^2\sqrt{1+x}}$$

$$\Rightarrow R^n_{\overline{x}}(h)=\frac{1}{\cancel{6}_2}\frac{\cancel{3}}{8}\frac{1}{(1+\xi)^2\sqrt{1+\xi}}x^3,\quad \xi\in(0,x)=\frac{1}{16}\frac{1}{(1+\xi)^2\sqrt{1+\xi}}x^3,\quad \xi\in(0,x)$$

$$\Rightarrow |R^n_{\overline{x}}(h)|=\left|\frac{1}{16}\frac{1}{(1+\xi)^2\sqrt{1+\xi}}x^3\right|=\frac{1}{16}\frac{1}{(1+\xi)^2\sqrt{1+\xi}}|x|^3\le\frac{1}{16}\frac{1}{\underbrace{\cancel{(1+0)^2}}_{1}\underbrace{\cancel{\sqrt{1+0}}}_{1}}|x|^3=\frac{1}{16}|x|^3 \quad ∎$$

⚠ mayorar pues $\xi>0$

P_1 b)

b) Encuentre el polinomio de Maclaurin de orden 2 sin resto para $f(x) = e^{\sqrt{2}\sin(x)}$.

Polinomio de Taylor centrado en $x_0 = 0$

$$T^{n=2}_{x_0=0}(f)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 \Bigg|_{x_0=0}$$

$$= \boxed{f(0)} + \boxed{f'(0)}x + \frac{1}{2}\boxed{f''(0)}x^2$$

$$f(x) = e^{\sqrt{2}\,\text{sen}(x)} \Rightarrow f(0) = e^{\sqrt{2}\,\text{sen}(0)} = e^0 = 1$$

$$f'(x) = \left[e^{\sqrt{2}\,\text{sen}(x)}\right]' = e^{\sqrt{2}\,\text{sen}(x)}\left[\sqrt{2}\,\text{sen}(x)\right]' = \sqrt{2}\cos(x)\,e^{\sqrt{2}\,\text{sen}(x)} \Rightarrow f'(0) = \sqrt{2}\cancelto{1}{\cos(0)}\,\cancelto{1}{e^{\sqrt{2}\cancelto{0}{\text{sen}(0)}}} = \sqrt{2}$$

$$f''(x) = \left[\sqrt{2}\cos(x)\,e^{\sqrt{2}\,\text{sen}(x)}\right]' = \sqrt{2}\left[\cos(x)\,e^{\sqrt{2}\,\text{sen}(x)}\right]' = \sqrt{2}\left[-\text{sen}(x)\,e^{\sqrt{2}\,\text{sen}(x)} + \cos(x)\sqrt{2}\cos(x)\,e^{\sqrt{2}\,\text{sen}(x)}\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[-\text{sen}(x) + \sqrt{2}\cos^2(x)\right]e^{\sqrt{2}\,\text{sen}(x)} \Rightarrow f''(0) = \sqrt{2}\left[-\cancelto{0}{\text{sen}(0)} + \sqrt{2}\cancelto{1}{\cos(0)}\right]\cancelto{1}{e^{\sqrt{2}\cancelto{0}{\text{sen}(0)}}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$$

b) Encuentre el polinomio de Maclaurin de orden 2 sin resto para $f(x) = e^{\sqrt{2}\sin(x)}$.

Polinomio de Taylor
centrado en $x_0 = 0$

$$T^{n=2}_{x_0=0}(f)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 \quad \Big| \; x_0 = 0$$

$$= \boxed{f(0)} + \boxed{f'(0)}x + \frac{1}{2}\boxed{f''(0)}x^2$$

$$= 1 + \sqrt{2}x + \frac{1}{2}2x^2$$

$$\Longleftarrow \boxed{T^{n=2}_{x_0=0}(f)(x) = 1 + \sqrt{2}x + x^2}$$

P_1 $x)$

$|f^{(k)}(x)| \le 1$ $\longrightarrow$

c) Sea f una función infinitamente derivable en $\mathbb{R}$ tal que $|f^{(k)}| \le 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$. Muestre que si $x_0 \in \mathbb{R}$ es fijo, entonces para todo $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} |f(x) - T_f^n(x - x_0)| = 0$, donde $T_f^n(x - x_0)$ denota al polinomio de Taylor de f de orden n en torno a x_0.

Fórmula de Taylor (función = aprox. + error)

Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ $k+1$ veces derivable en $\overline{x} \in (a,b)$. Su **desarrollo de Taylor de orden** n **en torno a** x_0 es: $T^n_{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$.

Entonces $(\forall\, x > x_0)\,(\exists\, \xi \in (x_0, x))$ se satisface que

$$f(x) = T^n_{x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

P.D.Q. $x_0 \in \mathbb{R}$; $|f^{(k)}(x)| \le 1$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} |f(x) - T_f^n(x - x_0)| = 0$ $(\forall\, x \in [x_0 - 1, x_0 + 1])$

En efecto,

Sea $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$.

Por def. $f(x) - T_f^n(x - x_0)$ es el Resto del polinomio de Taylor.

Así que $f(x) - T_f^n(x - x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, algún $\xi \in (x_0, x)$

$\Rightarrow$ para algún $\xi \in (x_0, x)$: $|f(x) - T_f^n(x - x_0)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \le \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi)|\, |(x - x_0)^{n+1}|$

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(k)}(x)| \le 1 \Rightarrow |f^{(n+1)}(\xi)| \le 1$ $\quad \le \frac{1}{(n+1)!} \cdot 1 \cdot 1$

$x \in [x_0 - 1, x_0 + 1] \Leftrightarrow x_0 - 1 \le x \le x_0 + 1 \underset{-x_0}{\Leftrightarrow} -1 \le x - x_0 \le 1 \Leftrightarrow |x - x_0| \le 1$

$\Rightarrow |(x - x_0)^{n+1}| \le 1^{n+1} = 1$

$|f^{(k)}(x)| \leq 1 \longrightarrow$

c) Sea f una función infinitamente derivable en $\mathbb{R}$ tal que $|f^{(k)}| \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$. Muestre que si $x_0 \in \mathbb{R}$ es fijo, entonces para todo $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} |f(x) - T_f^n(x - x_0)| = 0$, donde $T_f^n(x - x_0)$ denota al polinomio de Taylor de f de orden n en torno a x_0.

Fórmula de Taylor (función = aprox. + error)

Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ $k+1$ veces derivable en $\overline{x} \in (a,b)$. Su **desarrollo de Taylor de orden n en torno a x_0** es: $T^n_{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$.

Entonces $(\forall\, x > x_0)\,(\exists\, \xi \in (x_0, x))$ se satisface que

$$f(x) = T^n_{x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Vemos que, para algún $\xi \in (x_0, x)$:

$$\left| f(x) - T_f^n(x - x_0) \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\iff -\frac{1}{(n+1)!} \leq f(x) - T_f^n(x - x_0) \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\overset{\lim_{n\to+\infty}}{\Longrightarrow} \overset{\to 0}{\lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{1}{(n+1)!}\right]} \leq \lim_{n\to+\infty}\left[f(x) - T_f^n(x - x_0)\right] \leq \overset{\to 0}{\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{(n+1)!}\right]}$$

$$\underset{\text{Teo. del Sandwich}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to+\infty}\left[f(x) - T_f^n(x - x_0)\right] = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left| f(x) - T_f^n(x - x_0) \right| = 0$$

P2

P2. [Extremo]

Sean $\beta > 0$ y $\alpha \in (-\beta, \beta)$ constantes, y $f\colon [-\beta, \beta] \to \mathbb{R}$ una función dada por $f(x) = (\beta^2 - x^2)(\alpha - x)$.

a) Muestre que $(\forall\, x \in [-\beta, \beta])\,(\forall\, h \in [-\beta - x, \beta - x])\ f(x) - f(x+h) = -h\left(3x^2 - 2x\alpha - \beta^2 + h^2 + 3xh - \alpha h\right)$.

b) Sin utilizar segundas derivadas, pruebe que f admite solo un mínimo global y solo un máximo global en $[-\beta, \beta]$. Determine candidatos a extremos y utilice alguna expresión para probar que efectivamente son extremos.

c) Muestre que la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de f en $[-\beta, \beta]$ es $\frac{4}{27}\left(\sqrt{\alpha^2 + 3\beta^2}\right)^3$, y calcule el valor de α que minimiza la diferencia.

$\beta > 0$

$\alpha \in (-\beta, \beta)$

$$\begin{cases} f : [-\beta, \beta] \to \mathbb{R} \\ \qquad x \mapsto f(x) = (\beta^2 - x^2)(\alpha - x) \end{cases}$$

$$f(x) = (\beta^2 - x^2)(\alpha - x)$$

Ⓟ₂ a)

$x, y \in [-\beta, \beta]$:
$$f(x) - f(y) = (\beta^2 - x^2)(\alpha - x) - (\beta^2 - y^2)(\alpha - y)$$
$$= \beta^2\alpha - \beta^2 x - \alpha x^2 + x^3 - \left[\beta^2\alpha - \beta^2 y - \alpha y^2 + y^3\right]$$
$$= \cancel{\beta^2\alpha} - \beta^2 x - \alpha x^2 + x^3 \cancel{- \beta^2\alpha} + \beta^2 y + \alpha y^2 - y^3$$
$$= \beta^2(y - x) + \alpha(y^2 - x^2) + (x^3 - y^3)$$

$$= \beta^2(y-x) + \alpha(y+x)(y-x) + (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$(y-x) = -(x-y)$$

$$= -\beta^2(x-y) + -\alpha(x+y)(x-y) + (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$= (x-y)\left[-\beta^2 - \alpha(x+y) + (x^2+xy+y^2)\right]$$

$$\Longleftrightarrow f(x) - f(y) = (x-y)\left[-\beta^2 - \alpha(x+y) + (x^2+xy+y^2)\right] ; \quad y = x+h$$

$$\Longrightarrow x-y = x-(x+h) = -h$$

$$\Longrightarrow x+y = x+(x+h) = 2x+h$$

$$\Longrightarrow f(x) - f(x+h) = -h\left[-\beta^2 - \alpha(2x+h) + (x^2 + x(x+h) + (x+h)^2)\right]$$

$$= -h\left[-\beta^2 - 2\alpha x - \alpha h + x^2 + x^2 + hx + x^2 + 2hx + h^2\right]$$

$$= -h\left[3x^2 - 2x\alpha - \beta^2 + h^2 + 3xh - \alpha h\right] \quad \blacksquare$$

P2. [Extremo]

Sean $\beta > 0$ y $\alpha \in (-\beta, \beta)$ constantes, y $f\colon [-\beta,\beta] \to \mathbb{R}$ una función dada por $f(x) = (\beta^2 - x^2)(\alpha - x)$.

a) Muestre que $(\forall\, x \in [-\beta,\beta])\,(\forall\, h \in [-\beta - x, \beta - x]) : f(x) - f(x+h) = -h\left(3x^2 - 2x\alpha - \beta^2 + h^2 + 3xh - \alpha h\right)$.

b) Sin utilizar segundas derivadas, pruebe que f admite solo un mínimo global y solo un máximo global en $[-\beta,\beta]$. Determine candidatos a extremos y utilice alguna expresión para probar que efectivamente son extremos.

c) Muestre que la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de f en $[-\beta,\beta]$ es $\frac{4}{27}\left(\sqrt{\alpha^2 + 3\beta^2}\right)^3$, y calcule el valor de α que minimiza la diferencia.

Teorema de Weierstrass: MÁXIMOS y mínimos

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces:

- f es acotada, simbólicamente:

$$(\exists\, M > 0)\,(\forall\, x \in [a,b]) : |f(x)| \le M$$

- f alcanza su MÁXIMO en $[a,b]$, simbólicamente:

$$(\exists\, x_{\max} \in [a,b])\,(\forall\, x \in [a,b]) : f(x) \le f(x_{\max})$$

- f alcanza su mínimo en $[a,b]$, simbólicamente:

$$(\exists\, x_{\min} \in [a,b])\,(\forall\, x \in [a,b]) : f(x_{\min}) \le f(x)$$

Puntos críticos de una función

Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función que admite derivada. $\overline{x} \in A$ es **punto crítico** si $f'(\overline{x})$ no existe o si $f'(\overline{x}) = 0$.

$$f'(x) = \left[(\beta^2 - x^2)(\alpha - x)\right]'$$

$$= \left[\beta^2\alpha - \beta^2 x - \alpha x^2 + x^3\right]' = -\beta^2 - 2\alpha x + 3x^2$$

x es crítico si $f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 2\alpha x - \beta^2 = 0$

$$\iff x = \frac{-(-2\alpha) \pm \sqrt{(-2\alpha)^2 - 4(3)(-\beta^2)}}{2\cdot 3}$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a = 3$

$b = -2\alpha$

$c = -\beta^2$

$$\iff x = \frac{2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 + 12\beta^2}}{2\cdot 3} = \frac{\cancel{2}\alpha \pm \cancel{2}\sqrt{\alpha^2 + 3\beta^2}}{\cancel{2}\cdot 3}$$

$$\iff x = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 3\beta^2}}{3}$$

Llamemos : $u = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2+3\beta^2}}{3}$ y $v = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2+3\beta^2}}{3}$

$$\iff u = \frac{\alpha+\Delta}{3} \quad y \quad v = \frac{\alpha-\Delta}{3}$$

Son solución de la ecuación $f'(x)=0 \iff 3x^2-2\alpha x-\beta^2 = 0$

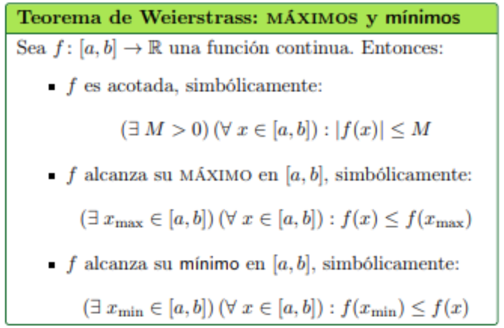
$$\iff ax^2+bx+c$$

$a=3$, $b=-2\alpha$, $c=-\beta^2$

$$* \; u+v = -\frac{b}{a} = \frac{-(-2\alpha)}{3} = \frac{2\alpha}{3}$$

$$* \; uv = \frac{c}{a} = \frac{(-\beta^2)}{3} = \frac{-\beta^2}{3}$$

$$* \; u-v = \frac{\alpha+\Delta}{3} - \frac{\alpha-\Delta}{3} = \frac{2\Delta}{3}$$



Teorema de Weierstrass: MÁXIMOS y mínimos

Sea $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Entonces:

- f es acotada, simbólicamente:

$$(\exists\, M>0)\,(\forall\, x\in[a,b]) : |f(x)|\le M$$

- f alcanza su MÁXIMO en $[a,b]$, simbólicamente:

$$(\exists\, x_{\max}\in[a,b])\,(\forall\, x\in[a,b]) : f(x)\le f(x_{\max})$$

- f alcanza su mínimo en $[a,b]$, simbólicamente:

$$(\exists\, x_{\min}\in[a,b])\,(\forall\, x\in[a,b]) : f(x_{\min})\le f(x)$$

En virtud del Teorema de Weierstrass, como f está definida en un cerrado y acotado $[-\beta,\beta]$ y es continua (por álg./comp. de continuas), es acotada y alcanza su MÁX. y mín. en $[-\beta,\beta]$.

$$\boxed{f(x)=(\beta^2-x^2)(\alpha-x)}$$

Estudiamos los puntos críticos: $u, v, -\beta, \beta$.

Queremos ver cuánto vale la f en esos puntos.

- $f(\beta)=0$
- $f(-\beta)=0$
- $f(u)<0$
- $f(v)>0$

(ver abajo)

Entonces necesariamente u es MÁX. Global en $[-\beta,\beta]$

v es mín. global en $[-\beta,\beta]$

$$* \; f(u) = \underbrace{\left(\beta^2 - u^2\right)}_{>0}\underbrace{\left(\alpha - u\right)}_{<0} < 0 \quad ; \quad u = \frac{\alpha + \Delta}{3} \quad ; \quad \Delta = \sqrt{\alpha^2 + 3\beta^2}$$

$$\Rightarrow u^2 = \frac{\alpha^2 - 2\alpha\Delta + \Delta^2}{9}$$

$$\Rightarrow u^2 = \frac{\alpha^2 - 2\alpha\sqrt{\alpha^2+3\beta^2} + (\alpha^2 + 3\beta^2)}{9}$$

$$\Rightarrow -u^2 = \frac{-\alpha^2 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2+3\beta^2} - (\alpha^2 + 3\beta^2)}{9}$$

$$\Rightarrow \beta^2 - u^2 = \frac{9\beta^2}{9} + \frac{-\alpha^2 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2+3\beta} - \alpha^2 - 3\beta^2}{9}$$

$$= \frac{6\beta^2 - 2\alpha^2 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2+3\beta}}{9}$$

$$= \frac{\boxed{6\beta^2 - 2\alpha^2} + 2\alpha\Delta}{9} \geq 0$$

$$6\beta^2 - 2\alpha^2 = 2\underbrace{\left(3\beta^2 - \alpha^2\right)}_{>0} \quad ; \quad \alpha < \beta < 3\beta$$

$$\Rightarrow \alpha^2 < 3\beta^2$$

$$\Rightarrow 0 < 3\beta^2 - \alpha^2$$

$$u = \frac{\alpha + \Delta}{3} \Rightarrow -u = \frac{-\alpha - \Delta}{3}$$

$$\Rightarrow \alpha - u = \frac{3\alpha}{3} + \frac{-\alpha - \Delta}{3}$$

$$= \frac{2\alpha - \Delta}{3}$$

$$= \frac{\boxed{2\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 3\beta^2}}}{3} < 0$$

$$\alpha < \alpha \Rightarrow \alpha^2 \le \alpha^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha < \beta \Rightarrow \alpha^2 < \beta^2 \Rightarrow 3\alpha^2 < 3\beta^2\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha^2 + 3\alpha^2 < \alpha^2 + 3\beta^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{4\alpha^2} < \sqrt{\alpha^2 + 3\beta^3}$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha < \sqrt{\alpha^2 + 3\beta^2}$$

$$\Rightarrow 2\alpha \leftarrow \sqrt{\alpha^2 + 3\beta^2} < 0$$

$*$ $f(v)$ es análogo, y se ve que $f(v) > 0$

P2. [Extremo]

Sean $\beta > 0$ y $\alpha \in (-\beta, \beta)$ constantes, y $f\colon [-\beta, \beta] \to \mathbb{R}$ una función dada por $f(x) = (\beta^2 - x^2)(\alpha - x)$.

a) Muestre que $(\forall\, x \in [-\beta, \beta])\,(\forall\, h \in [-\beta - x, \beta - x]) : f(x) - f(x+h) = -h\left(3x^2 - 2x\alpha - \beta^2 + h^2 + 3xh - \alpha h\right)$.

b) Sin utilizar segundas derivadas, pruebe que f admite solo un mínimo global y solo un máximo global en $[-\beta, \beta]$. Determine candidatos a extremos y utilice alguna expresión para probar que efectivamente son extremos.

c) Muestre que la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de f en $[-\beta, \beta]$ es $\frac{4}{27}\left(\underbrace{\sqrt{\alpha^2 + 3\beta^2}}_{= \Delta}\right)^3$, y calcule el valor de α que minimiza la diferencia.

ⓅⓂ

(P2) c) $|f(u) - f(v)| = |u - v|\left|-\beta^2 - \alpha(u+v) + (u^2 + uv + v^2)\right|$

$u + v = -\frac{b}{a} = \frac{-(-2\alpha)}{3} = \frac{2\alpha}{3}$

$uv = \frac{c}{a} = \frac{(-\beta^2)}{3} = \frac{-\beta^2}{3}$

$u - v = \frac{\alpha + \Delta}{3} - \frac{\alpha - \Delta}{3} = \frac{2\Delta}{3}$

$= |u - v|\left|-\beta^2 - \alpha(u+v) + (u+v)^2 - uv\right|$

$= \left|\frac{2\Delta}{3}\right|\left|-\beta^2 - \alpha\frac{2\alpha}{3} + \left(\frac{2\alpha}{3}\right)^2 - \left(\frac{-\beta^2}{3}\right)\right|$

$= \left|\frac{2\Delta}{3}\right|\left|-\beta^2 - \frac{2\alpha^2}{3} + \frac{4\alpha^2}{9} + \frac{\beta^2}{3}\right|$

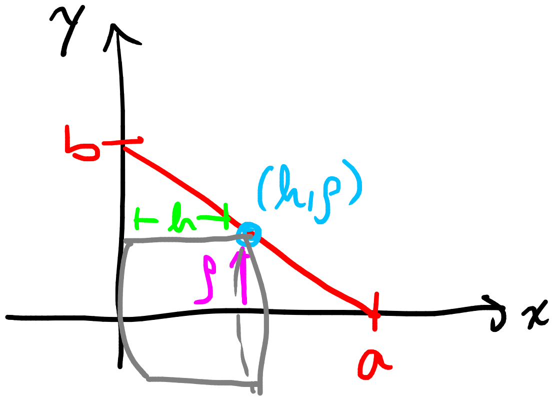
$= \frac{2\Delta}{3}\left|\frac{-9\beta^2 - 6\alpha^2 + 4\alpha^2 + 3\beta^2}{9}\right| = \frac{2\Delta}{3}\left|\frac{-6\beta^2 - 2\alpha^2}{9}\right| = \frac{2\Delta}{3}\left|\frac{-2\overbrace{(3\beta^2 + \alpha^2)}^{= \Delta^2}}{9}\right|$

$= \frac{4}{27}\Delta \cdot \Delta^2 = \frac{4}{27}\Delta^3 = \frac{4}{27}\left(\sqrt{\boxed{\alpha^2} + 3\beta^2}\right)^3$ ▨

Como $\alpha \in (-\beta, \beta) \Rightarrow \alpha^2 \leq \beta^2$ y $\boxed{0 \leq \alpha^2}$; el α que minimiza es $\alpha = 0$ ($\sqrt{\cdot}$ creciente) ▨

P3 a)

a) En su empresa, se desea diseñar una lata de bebida óptima en cuanto a volumen y a armonía estética. Para esto, aproxime el objeto como un cilindro de radio ρ y altura h donde el punto (h,ρ) recorre la recta $L: ay+bx=ab$ con $a,b>0$ y $a+b=1$. **i)** Determine el mayor volumen que permitiría la lata. **ii)** Analice para qué valores de a este mayor volumen se maximiza.



$$L: ay+bx=ab$$

$$\Leftrightarrow \quad y=-\frac{b}{a}x+b$$

$$(h,\rho)\in L$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho=-\frac{b}{a}h+b$$

$$\Leftrightarrow \quad h=(b-\rho)\frac{a}{b}$$

Necesitamos expresión para volumen de la lata:

$$V_{cilindro}=A_{basal}\cdot h$$

$$=\pi\rho^2\cdot h$$

$$=\pi\rho^2(b-\rho)\frac{a}{b}$$

$$=\frac{\pi a}{b}\rho^2(b-\rho)$$

$$\Leftrightarrow V(\rho)=\frac{\pi a}{b}\left[b\rho^2-\rho^3\right]$$

Veamos los puntos extremos:

Se buscan ρ : $V'(\rho)=0$

$$\iff \frac{\pi a}{b}\left[2b\rho-3\rho^2\right]=0$$

$$\iff \frac{\pi a}{b}\rho\left[2b-3\rho\right]=0$$

$$\implies \boxed{\rho=0} \vee \boxed{\rho=\frac{2b}{3}}$$

Evaluemos para ver si son MÁX o mín:

$$V(\rho) = \frac{\pi a}{b}\rho^2(b-\rho)$$

$V(0)=0$

$$V\left(\frac{2b}{3}\right)= \frac{\pi a}{b}\,\frac{4b^2}{9}\left(b-\frac{2b}{3}\right)= \frac{\pi a}{\cancel{b}}\,\frac{4b^2}{9}\,\frac{\cancel{b}}{3} = \frac{4}{27}\pi a b^2 > 0 = V(0)$$

Por lo tanto $\rho=\frac{2b}{3}$ es un MAX de la función del volumen del cilindro

Como ahí se alcanza el máximo, el volumen mayor es

$$V_{MAX} := \frac{4}{27}\pi a b^2$$

Si bien es la expresión del volumen máximo (o mayor), depende de los parámetros a, b

Hay que ver $V_{MAX} = V_{MAX}(a) = \frac{4}{27}\pi a b^2$, con $\underbrace{b = b(a)}$

$$b + a = 1$$

$$\Leftrightarrow b = 1 - a$$

$$\Leftrightarrow b(a) = (1 - a)$$

$$\Leftrightarrow V_{MAX}(a) = \frac{4}{27}\pi a (1-a)^2$$

Ahora que la función está en términos de a, se puede maximizar para ese valor.

$$V_{MAX}(a) = \frac{4}{27}\pi\left[a\left(1-2a+a^2\right)\right]$$

$$= \frac{4}{27}\pi\left[a-2a^2+a^3\right]$$

$$\Rightarrow V_{MAX}'(a) = \frac{4}{27}\pi\left[1-4a+3a^2\right]$$

Queremos ver $a : V_{MAX}'(a) = 0$

$$\Leftrightarrow 1-4a+3a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a^2-4a+1 = 0 \qquad \begin{matrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(3a-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a=1} \vee \boxed{a=\frac{1}{3}}$$

Evaluaremos para ver en qué punto el volumen es mayor:

Como $V_{MAX}(a) = \frac{4}{27}\pi a(1-a)^2$;

* $V_{MAX}(a=1) = \frac{4}{27}\pi \cdot 1 \cdot \cancel{(1-1)^2}^{\,0} = 0$

* $V_{MAX}(a=\frac{1}{3}) = \frac{4}{27}\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4^2}{27^2}\pi = \left(\frac{4}{27}\right)^2\pi > 0 = V_{MAX}(0)$

Necesariamente en $a = \frac{1}{3}$ se alcanza un máximo.

↑

Son puntos extremos, y la función es mayor en $a = \frac{1}{3}$

P3 b)

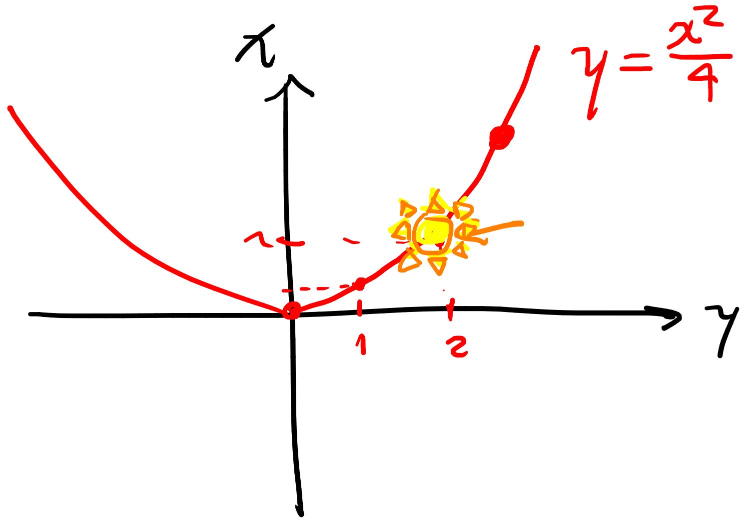
b) Un grupo de estudiantes de física se encuentra en la estación espacial internacional estudiando la órbita de uno de los cómetas. Ellos y ellas han determinado que esta órbita es parabólica de ecuación $y = \frac{x^2}{4}$, tomando el origen en la estación espacial internacional, y midiendo las longitudes en unidades astronómica (UA). En este mismo sistema, el sol está en la posición $S = (1, 2)$. Se sabe además, que por la composición química del cometa, este explotaría si su distancia al sol no se mantiene siendo a lo más 1 UA. Su labor como responsable es determinar si el cometa explotará o no, y para ello se pide que: **i)** Escriba la distancia del cometa al sol en función de x. **ii)** Encuentre la menor distancia del cometa al sol. **iii)** Concluya lo pedido.

no explota si $d \leq 1$

$\Leftrightarrow$ sí explota si $d > 1$

explota si $\overline{d \leq 1}$

$\Leftrightarrow$ explota si $d > 1$



cometa: $\left(x, \frac{x^2}{4}\right)$

sol: $(1,2)$

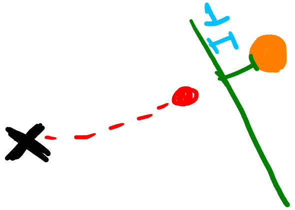
i) $d(x) = \sqrt{(x-1)^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 2\right)^2}$

ii) Como $\sqrt{\cdot}$ es monótona creciente, basta estudiar el argumento $A(x) = (x-1)^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 2\right)^2$

$\Rightarrow A'(x) = 2(x-1) + 2\left(\frac{x^2}{4} - 2\right) \cdot \frac{x}{2} = \cancel{2x} - 2 + \frac{x^3}{4} \cancel{-2x}$

Buscamos x : $A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{4} - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8$

$\Leftrightarrow x = 2$



$$A'(x) = \frac{x^3}{4} - 2$$

	...	2	...
A'	−	0	+
A	↘	Min	↗

Como 2 es un mínimo, d(2) es la menor distancia

$$= \sqrt{(2-1)^2 + \left(\frac{2^2}{4} - 2\right)^2}$$

$$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$ → menor distancia entre el cometa y el sol

iii) no explota si $d \leq 1$

$\Leftrightarrow$ sí explota si $d > 1$

explota si $\overline{d \leq 1}$

$\Leftrightarrow$ explota si $d > 1$

$\sqrt{2} > 1 \Leftrightarrow$ explota ☹

P_4

P4. [Desigualdades]

Considere $\alpha \in (0,1)$ fijo. **a)** Demuestre que $(\forall\, x \in (0, \frac{\pi}{2}])$ se tiene que $\sin(\alpha x) < \sin(x)$. INDICACIÓN: Use apropiadamente el TVM. **b)** Use el resultado anterior para demostrar que $(\cos(x))^\alpha \leq \cos(\alpha x)$ $(\forall\, x \in [0, \frac{\pi}{2}])$. INDICACIÓN: Estudie el crecimiento de la función $f(x) = \cos(\alpha x) - (\cos(x))^\alpha$.

$\alpha \in (0,1)$

Alternativa: Notar que $\alpha x < x$ y que $\operatorname{sen}(\cdot)$ crece en $(0, \frac{\pi}{2}]$

a) P.D.Q. $\operatorname{sen}(\alpha x) < \operatorname{sen}(x)$

Sea $x \in (0, \frac{\pi}{2}] \iff 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

Notar que $0 < \alpha x < x$ $\left([\alpha x, x] \subseteq (0, \frac{\pi}{2}] \right)$.

y sen es continua, derivable en $\mathbb{R}$; en particular es continua en $[\alpha x, x]$ derivable en $(\alpha x, x)$.

En virtud del TVM:

$$\frac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(\alpha x)}{x - \alpha x} = \cos(\xi), \text{ algún } \xi \in (\alpha x, x) \subseteq (0, \tfrac{\pi}{2}]$$

Pero $\cos(\xi) > 0$ si $\xi \in (0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(\alpha x) > 0 \iff \operatorname{sen}(x) > \operatorname{sen}(\alpha x)$ $(\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}])$

▨

P4. [Desigualdades]

Considere $\alpha \in (0,1)$ fijo. **a)** Demuestre que $(\forall\, x \in (0, \frac{\pi}{2}])$ se tiene que $\sin(\alpha x) < \sin(x)$. INDICACIÓN: Use apropiadamente el TVM. **b)** Use el resultado anterior para demostrar que $(\cos(x))^\alpha \leq \cos(\alpha x)$ $(\forall\, x \in [0, \frac{\pi}{2}])$. INDICACIÓN: Estudie el crecimiento de la función $f(x) = \cos(\alpha x) - (\cos(x))^\alpha$.

$[\text{sen}(x)]' = \cos(x)$

$[\cos(x)]' = -\text{sen}(x)$

b) P.D.Q. $(\cos(x))^\alpha \leq \cos(\alpha x)$ $(\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}])$

Siguiendo la indicación,
Se verá el crecim con la derivada.

f es derivable $\Rightarrow f'(x) = -\alpha\,\text{sen}(\alpha x) - \alpha \cos(x)^{\alpha-1}[\cos(x)]'$

$$= -\alpha\,\text{sen}(\alpha x) + \alpha \cos(x)^{\alpha-1}\,\text{sen}(x)$$

$\text{sen}(\alpha x) < \text{sen}(x)$

$\Rightarrow -\text{sen}(\alpha x) > -\text{sen}(x)$

$$> -\alpha\,\text{sen}(x) + \alpha \cos(x)^{\alpha-1}\,\text{sen}(x)$$

$$= \underbrace{\alpha\,\text{sen}(x)}_{>0 \qquad \geq 0}\left[\cos(x)^{\alpha-1} - 1\right]$$

Estamos estudiando $f(x) = \cos(\alpha x) - \cos(x)^{\alpha} \rightarrow f(0) = 0$

Queremos demostrar que $\underline{\cos(x)^{\alpha} \leq \cos(\alpha x)}$

Si vemos que f es creciente $\Longrightarrow f(0) \leq f(x) \quad \forall x \geq 0 \wedge x \leq \frac{\pi}{2}$

$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\Longleftrightarrow 0 \leq \cos(\alpha x) - \cos(x)^{\alpha}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\cos(x)^{\alpha} \leq \cos(\alpha x)}$$

Queremos ver que $f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \alpha \operatorname{sen}(x)\left[\cos(x)^{\alpha-1} - 1\right] \geq 0$

y eso ocurre solo si $\left[\cos(x)^{\alpha-1} - 1\right] \geq 0$

$$\cos(x)^{\alpha-1} - 1 \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \cos(x)^{\alpha-1} \geq 1 \quad x \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\Longleftrightarrow 1 \geq \frac{1}{\cos(x)^{\alpha-1}} \Longleftrightarrow 1 \geq \cos(x)^{1-\alpha}$$

pensemos

Notar $\cos(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow \cos(x)^{1-\alpha} \leq 1^{1-\alpha}$, con $1-\alpha > 0 \Leftrightarrow 1 > \alpha$

$\Leftrightarrow \cos(x)^{1-\alpha} \leq 1$ ⤵ $x \neq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{\cos(x)^{1-\alpha}}$

$\Leftrightarrow 1 \leq \cos(x)^{\alpha-1}$

$\Leftrightarrow 0 \leq \cos(x)^{\alpha-1} - 1$

O sea:

Volviendo al desarrollo:

$$\Rightarrow f'(x) = -\alpha \operatorname{sen}(\alpha x) - \alpha \cos(x)^{\alpha-1}[\cos(x)]'$$

$$= -\alpha \operatorname{sen}(\alpha x) + \alpha \cos(x)^{\alpha-1} \operatorname{sen}(x)$$

$\operatorname{sen}(\alpha x) < \operatorname{sen}(x)$

$\Rightarrow -\operatorname{sen}(\alpha x) > -\operatorname{sen}(x)$

$$> -\alpha \operatorname{sen}(x) + \alpha \cos(x)^{\alpha-1} \operatorname{sen}(x)$$

$$= \underbrace{\alpha}_{>0} \underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{\geq 0} \underbrace{\left[\cos(x)^{\alpha-1} - 1\right]}_{\geq 0} \geq 0$$

Luego, como $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ creciente.

$$\Rightarrow f(0) \leq f(x), \quad \forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \cos(\alpha x) - \cos(x)^{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha x) \leq \cos(x)^{\alpha} \left(\forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}]\right)$$

P_5

P5. [Asintóticamente] $\longrightarrow +\infty, 0,$

Sea $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Dados $x_0 \in \mathbb{R}$ y $h > 0$:

a) Demuestre que los coeficientes a_h, b_h y c_h de la parábola $\boxed{y = c_h + b_h(x - x_0) + a_h(x - x_0)^2}$ que coincide con el grafo de φ en los puntos $(x_0, \varphi(x_0))$, $(x_0 + h, \varphi(x_0 + h))$ y $(x_0 + 2h, \varphi(x_0 + 2))$ son

$$a_h = \frac{\varphi(x_0) + \varphi(x_0 + 2h) - 2\varphi(x_0 + h)}{2h^2}, \quad b_h = \frac{-3\varphi(x_0) + 4\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0 + 2h)}{2h}, \quad c_h = \varphi(x_0)$$

b) Defina $\alpha = \lim\limits_{h\to 0} a_h$, $\beta = \lim\limits_{h\to 0} b_h$ y $\gamma = \lim\limits_{h\to 0} c_h$. Demuestre, que $\alpha = \frac{1}{2}\varphi''(x_0)$, $\beta = \varphi'(x_0)$ y $\gamma = \varphi(x_0)$.

c) Calcule los coeficientes α, β, γ para la función definida en $\mathbb{R}$ por $\varphi(x) = x^5 \ln(1 + x^2)$ y en el punto $x_0 = 1$.

P5 a)

$$*\,(x_0, \varphi(x_0)) \in P \iff \varphi(x_0) = c_h + b_h\cancelto{0}{\underbrace{(x_0 - x_0)}_{=0}} + a_h\cancelto{0}{\underbrace{(x_0 - x_0)}_{=0}}^2$$

$$\iff \varphi(x_0) = c_h$$

$$*\,(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)) \in P \iff \varphi(x_0 + h) = c_h + b_h(\underbrace{[x_0 + h] - x_0}_{=h}) + a_h(\underbrace{[x_0 + h] - x_0}_{=h})^2$$

$$\iff \varphi(x_0 + h) = c_h + b_h h + a_h h^2$$

$$\iff \boxed{\varphi(x_0 + h) = \varphi(x_0) + b_h h + a_h h^2}$$

$$+\ (x_0+2h, \varphi(x_0+2h)) \in P \iff \varphi(x_0+2h) = c_h + b_h(\underbrace{[x_0+2h]-x_0}_{=2h}) + a_h(\underbrace{[x_0+2h]-x_0}_{=2h})^2$$

$$\iff \varphi(x_0+2h) = c_h + b_h 2h + a_h 4h^2$$

$$\iff \boxed{\varphi(x_0+2h) = \varphi(x_0) + b_h 2h + a_h 4h^2}$$

$$\varphi(x_0+h) = \varphi(x_0) + b_h h + a_h h^2 \quad ①$$

$$\varphi(x_0+2h) = \varphi(x_0) + b_h 2h + a_h 4h^2 \quad ②$$

$$② - 2①: \ \varphi(x_0+2h) - 2\varphi(x_0+h) = -\varphi(x_0) + a_h 2h^2$$

$$\iff a_h = \frac{\varphi(x_0) + \varphi(x_0+2h) - 2\varphi(x_0+h)}{2h^2}$$

② - 4 ① : $\varphi(x_0+2h) - 4\varphi(x_0+h) = -3\varphi(x_0) - 2b_h h$

$$\iff b_h = \frac{-3\varphi(x_0) - \varphi(x_0+2h) + 4\varphi(x_0+h)}{2h}$$

Ps b)

$$+\alpha := \lim_{h\to 0} a_h = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\varphi(x_0) + \varphi(x_0+2h) - 2\varphi(x_0+h)}{2h^2}\right] \quad \left(\varphi \text{ continua } = \frac{\varphi(x_0)+\varphi(x_0)-2\varphi(x_0)}{0} = \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{h\to 0}\left[\frac{\varphi'(x_0+2h)\cdot 2 - 2\varphi'(x_0+h)}{4h}\right] \quad \left(\varphi\in\mathcal{C}^2 \Rightarrow \varphi' \text{ continua } = \frac{\varphi'(x_0)\cdot 2 - 2\varphi'(x_0)}{0} = \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{h\to 0}\left[\frac{\varphi''(x_0+2h)\cdot 2\cdot 2 - 2\varphi''(x_0+h)}{4}\right] \quad \left(\varphi\in\mathcal{C}^2 \Rightarrow \varphi'' \text{ continua } = \frac{\varphi''(x_0)4 - 2\varphi''(x_0)}{4} = \frac{2\varphi''(x_0)}{4}\right)$$

$$= \frac{\varphi''(x_0)}{2} \; //$$

$$* \quad \beta := \lim_{h\to 0} b_h = \lim_{h\to 0}\left[\frac{-3\varphi(x_0) - \varphi(x_0+2h) + 4\varphi(x_0+h)}{2h}\right] \left(\overset{\varphi \text{ continua}}{=} \frac{-3\varphi(x_0) - \varphi(x_0) + 4\varphi(x_0)}{0} = \frac{0}{0} \right)$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{h\to 0}\left[\frac{-\varphi'(x_0+2h)\cdot 2 + 4\varphi'(x_0+h)}{2}\right] \left(\overset{\varphi\in C^2 \Rightarrow \varphi' \text{ continua}}{=} \frac{-\varphi'(x_0)\cdot 2 + 4\varphi'(x_0)}{2} \right)$$

$$= \frac{2\varphi'(x_0)}{2} = \varphi'(x_0) \; //$$

$$* \quad \gamma := \lim_{h\to 0} c_h = \lim_{h\to 0} \varphi(x_0) = \varphi(x_0) \; //$$

(P5) c) $\varphi(x) = x^5 \ln(1+x^2)$; $x_0 = 1 \Rightarrow \varphi(1) = 1\cdot\ln(1+1) = \ln(2)$

$$* \quad \varphi'(x) = 5x^4\ln(1+x^2) + x^5 \frac{1}{1+x^2} 2x \Rightarrow \varphi'(1) = 5\cdot 1\cdot \ln(2) + 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 = 5\ln(2)+1$$

$$* \quad \varphi''(x) = 20x^3\ln(1+x^2) + 5x^4\frac{1}{1+x^2}2x + 12x^5\frac{1}{1+x^2} + 2x^6(-1)\frac{1}{(1+x^2)^2}2x$$

$$\Rightarrow \varphi''(1) = 20 \cdot 1 \cdot \ln(1+1) + 5 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 + 12 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1+1} - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{(1+1)^2} \cdot 2 \cdot 1$$

$$= 20\ln(2) + 5 + 6 - 1$$

$$= 20\ln(2) + 10$$

$$= 10(2\ln(2)+1)$$

Y reemplazamos:

* $\alpha = \frac{1}{2}\varphi''(1) = 5(2\ln(2)+1)$ //

* $\beta = \varphi'(1) = 5\ln(2)+1$ //

* $\gamma = \varphi(1) = \ln(2)$ //

P_6

P6. [Otra mirada]

Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que $(\forall\, x \in \mathbb{R})$: $f'(x) = -xf(x)$, $g'(x) = xg(x)$ y $f(0) = g(0) = 1$.

- **a)** Pruebe que $f \cdot g$ es constante. Deduzca que $f(x) > 0$ y que $g(x) > 0$ $(\forall\, x \in \mathbb{R})$. INDICACIÓN: para la deducción del signo de f y g, puede usar el TVI junto a una contradicción.
- **b)** Estudie crecimiento, máximos y mínimos de f.
- **c)** Calcule f'' en función de f (y no de f'). Estudie convexidad y concavidad de f.
- **d)** Demuestre que $(\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\,(\exists\, \xi \in (0, x)) : f(x) = -f''(\xi)$.
- **e)** Estudie el crecimiento de f' y demuestre que f' es acotada en $\mathbb{R}$.
- **f)** Deduzca que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} = 0$. Bosqueje un gráfico de f a partir del estudio anterior.

ⓅⒼ a) i) fg constante $\iff [fg]' \equiv 0$

Como f, g derivables $\Rightarrow$ fg es derivable

Usando la regla del producto, $x \in \mathbb{R}$, entonces:

$$[(f\cdot g)(x)]' = [f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$= \underbrace{-xf(x)g(x)}_{} + \underbrace{f(x)xg(x)}_{} = 0 \iff fg \text{ es constante.} \quad \square$$

Como es constante, nos basta saber cuánto vale en algún punto:

Entonces: $(f\cdot g)(0) = f(0)g(0) = 1\cdot 1 = 1$. O sea $(f\cdot g)(x) = 1$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

(P6) a) ii) Positividad

El producto ES positivo

$\Rightarrow$ f, g tienen el mismo signo.

↳ en particular, si f positiva, g positiva necesariamente

Queremos que no ocurra que $f<0$. (Nos piden ver que $f>0$)

Hacia contradicción,

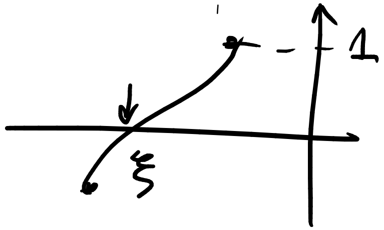
Supóngase que $(\exists x_0 \in \mathbb{R}) : f(x_0) < 0$.

Por enunciado se sabe que $f(0)=1$

Entonces, por TVI, como hubo un cambio de signo, entonces

f derivable ⇒ f continua

existe un punto ξ en el que $f(\xi)=0$



$fg \equiv 1$

Luego, necesariamente nunca ocurre $f<0$.

Entonces es siempre $f \geq 0$. Además $f \neq 0$ (si lo fuese $fg \neq 1$, algún punto)

Sigue que $f>0$ y necesariamente $g>0$. ☐

Ⓟ6 b) máximos, mínimos, crecimiento → derivada

Como f es derivable: $f'(x) = -x f(x)$ $\boxed{f(x)>0}$

Como f está en $\mathbb{R}$, se busca:

$f' \geq 0 \Leftrightarrow f$ creciente

$f' \leq 0 \Leftrightarrow f$ decrece

Se busca x: $f'(X) = 0$

$$\Leftrightarrow -X f(X) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{X=0} \vee \underbrace{\cancel{f(X)=0}}$$

es punto crítico

Vemos el comportamiento antes y después

$-x \boxed{f} \geq 0$

	...	0	...
f'	+		−
f	↗		↘

MAX global

(P6) c) 2ª derivada

$$f''(x) = [f'(x)]' = [-x f(x)]'$$
$$= -[x f(x)]'$$
$$= -[f(x) + x f'(x)]$$
$$= -[f(x) + x(-x f(x))]$$
$$= -f(x) + x^2 f(x)$$
$$\Longleftrightarrow \boxed{f''(x) = \underbrace{f(x)}_{>0}(x^2-1)}$$

Punto de inflexión: $f''(x) = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{x = +1 \vee x = -1}$$

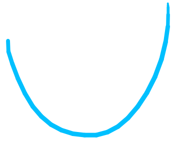
Concavidad/convexidad

$f'' \geq 0$ ∪ ← convexa

$f'' \leq 0$ ∩ ← cóncava

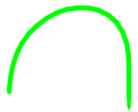
convexa

$$x^2 - 1 \geq 0$$
$$\Longleftrightarrow x^2 \geq 1$$
$$\Longleftrightarrow (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$



cóncava

$$x^2 - 1 \leq 0$$
$$\Longleftrightarrow x^2 \leq 1$$
$$\Longleftrightarrow x \in [-1, 1]$$



P6 d)

d) Demuestre que $(\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\,(\exists\, \xi \in (0,x)) : f(x) = -f''(\xi)$.

En efecto, sea $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, s.p.d.g. $x > 0$:

Como f es derivable, f' está OK,

y $f' = -xf$, entonces es derivable.

Entonces f'' es derivable y continua.

En particular es $+$ continua en $[0,x]$
$+$ derivable $(0,x)$

En virtud del TVM de Lagrange:

$$(\exists\, \xi \in (0,x)) : \frac{f'(x) - \cancel{f'(0)} \xrightarrow{} 0}{x-0} = [f'(\xi)]'$$

Pero $f'(x) = -x f(x)$
$\Rightarrow f'(0) = 0$

$$\iff \frac{-\cancel{x} f(x)}{\cancel{x}} = f''(\xi), \text{ algún } \xi \in (0,x)$$

$$\iff (\exists\, \xi \in (0,x)) : f(x) = -f''(\xi), \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}).$$ ▨

(P6) e) crecim de f'

derivada de f'

$$\boxed{\begin{array}{l} f'' \geq 0 \\ f'' \leq 0 \end{array}}$$

$f'' \geq 0 \rightarrow f'$ creciente $\Longleftrightarrow$ en $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$

$f'' \leq 0 \rightarrow f'$ decreciente $\Longleftrightarrow$ en $[-1,1]$

acotac de f'

Como $\quad f' = -x\underbrace{f}_{\text{derivable}} \rightarrow$ continua $\xrightarrow{\text{Weierstrass}}$ alcanza máx y mín en todo cerrado y acotado

$x \to +\infty \,,\quad f' < 0$

$x \to -\infty \,,\quad f' > 0$

Ⓑ f)

f) Deduzca que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} = 0$. Bosqueje un gráfico de f a partir del estudio anterior.

$$* \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-f'(x)}{x} = 0$$

$$f' = -x f$$

$$\underset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} f = \frac{-f'}{x}$$

f' acotada

$$* \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-f'(x)}{x} = 0 \quad //$$

Ej:

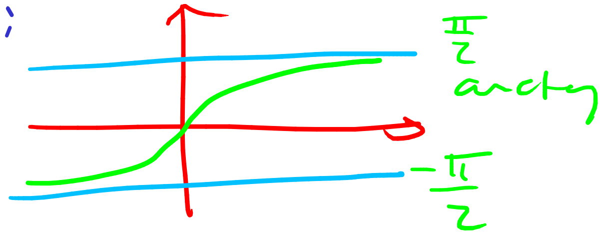
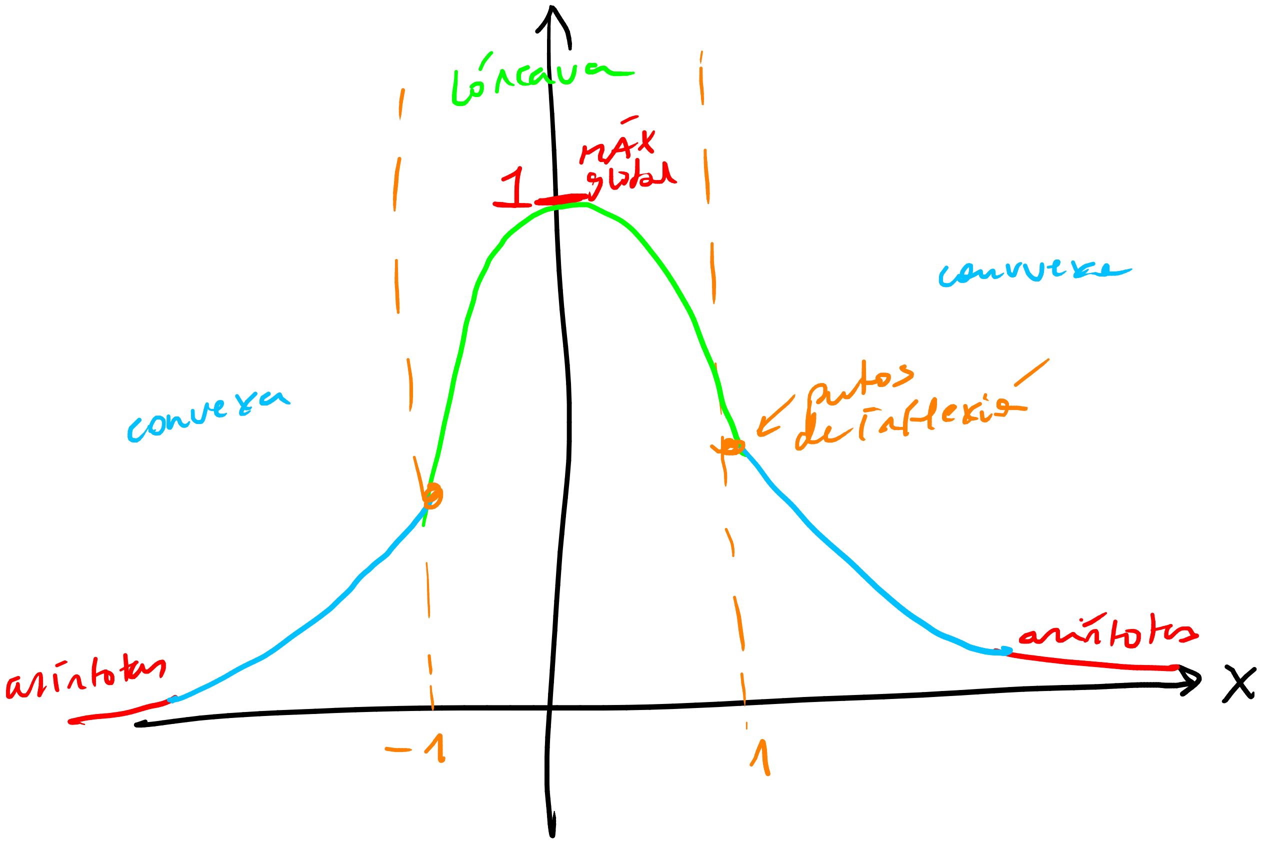


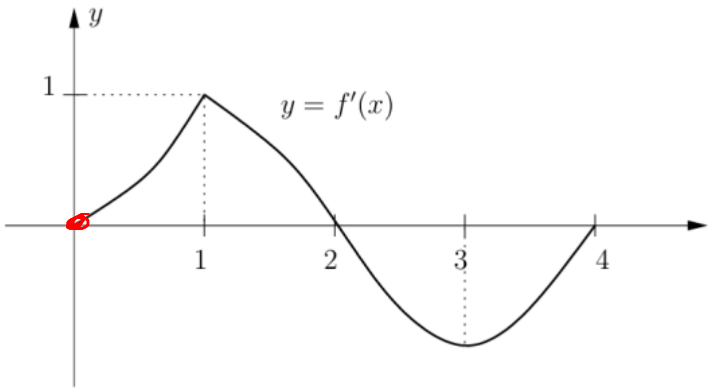
Gráfico f

- $f(0)=1$
- $f>0$
- no tiene mínimo
- se alcanza MÁX global en 0 y vale $f(0)=1$
  - ↳ crece antes de 0
  - ↳ decrece después de 0
- convexa $\cup$ $(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)$ $\cup$
- cóncava $\cap$ $[-1,1]$ $\cap$
  - ↳ puntos de inflexión $1,-1$
- $f(x)\to 0$, $x\to+\infty \wedge x\to-\infty$



P7

P7. [El orden de los factores no altera el producto] Se sabe que un bosquejo del gráfico de la derivada de una función $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ es el dado en la figura, con $f(0) = 1$. **a)** Usando la imagen como referencia, encuentre el gráfico aproximado de la función f. Para esto, debe indicar de forma precisa en cuáles intervalos f es creciente, decreciente, cóncava o convexa, además de dónde alcanza sus máximos y mínimos locales o globales, y dónde tiene sus inflexiones. **b)** Pruebe además que f es acotada superiormente por 3.



$f' \geq 0 \iff f$ creciente

$f' \leq 0 \iff f$ decreciente

* $f'' \geq 0 \iff f'$ creciente $\iff f$ ∪ convexa

* $f'' < 0 \iff f'$ decreciente $\iff f$ ∩ cóncava

P7 a)

0 1 2 3 4

signo f'	+	+	−	−
↗/↘ f'	↗	↘	↘	↗
f''	+	−	−	+
↗/↘ f	↗	↗	↘	↘
conv/cónca f	∪	∩	∩	∪

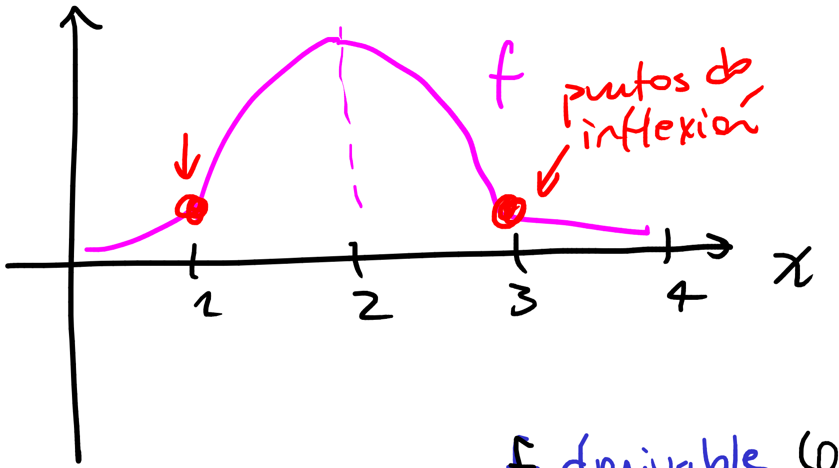
mín locales

puntos de inflexión

MÁX Global

puntos de inflexión

mín locales



P7 b)

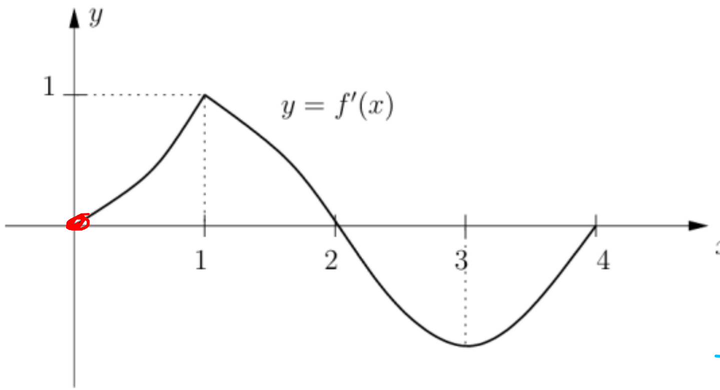
f derivable $(0,4)$

f continuable $[0,4]$

$\Rightarrow$ se cumple en particular en el intervalo $[0, x]$, $x \leq 4$

En virtud TVM!

P7. [El orden de los factores no altera el producto] Se sabe que un bosquejo del gráfico de la derivada de una función $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ es el dado en la figura, con $f(0) = 1$. **a)** Usando la imagen como referencia, encuentre el gráfico aproximado de la función f. Para esto, debe indicar de forma precisa en cuáles intervalos f es creciente, decreciente, cóncava o convexa, además de dónde alcanza sus máximos y mínimos locales o globales, y dónde tiene sus inflexiones. **b)** Pruebe además que f es acotada superiormente por 3.



$f' \geq 0 \iff f$ creciente

$f' \leq 0 \iff f$ decreciente

$* f'' \geq 0 \iff f'$ creciente
$\iff f \cup$ convexa

$* f'' \leq 0 \iff f'$ decreciente
$\iff f \cap$ cóncava

(P2) b) f derivable $(0,4)$ $\Rightarrow$ Se cumple en particular en el intervalo $[0,x]$, $x \leq 4$

f continuable $[0,4]$

En virtud TVM!

$$(\exists \xi \in (0,x)) : \frac{f(x) - \cancelto{1}{f(0)}}{x - 0} = f'(\xi)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x f'(\xi) + 1 \text{, algún } \xi \in (0,x)$$

Como 2 es MÁX Global $\rightarrow$ $f(2) = 2 \cdot f'(\xi) + 1$, algún $\xi \in (0,x)$

$$\leq 2 \cdot 1 + 1 = 3 \ \blacksquare$$

P8

P8. [En el borde]

Calcule, si es que existen, los siguientes límites: **a)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

$\exp(\ln(\cdot))=Id$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\exp\left(\ln\left(\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\right)\right)\right]$ $\quad \exp(\ln(\cdot))=Id$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\right)\right]$$

continuidad exp

$$=\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}{x}\right]\right) \quad \left(=\exp\left(\frac{\ln\left(\frac{+\infty-1}{+\infty}\right)}{+\infty}\right)=\exp\left(\frac{\ln\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{+\infty}\right)\right)$$

$$\overset{L'H}{=}\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}\cdot\frac{e^x x-(e^x-1)}{x^2}}{1}\right]\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\cancel{x}}{e^x-1}\cdot\frac{e^x x-e^x-1}{x^{\cancel{2}}}\right]\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x(x-1)-1}{x[e^x-1]}\right]\right) \quad \left(=\exp\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\right)$$

$$\overset{\text{l'H}}{=} \exp\left(\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x(x-1)+e^x}{e^x-1+xe^x}\right]\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x x}{e^x(1+x)-1}\right]\right) \qquad \left(= \exp\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\right)$$

$$\overset{\text{l'H}}{=} \exp\left(\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x x+e^x}{e^x(1+x)+e^x}\right]\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\cancel{e^x}(x+1)}{\cancel{e^x}(1+x+1)}\right]\right)\left(= \exp\left(\frac{1+\cancelto{0}{\frac{1}{+\infty}}}{1+\cancelto{0}{\frac{1}{+\infty}}}\right)\right)$$

$$= \exp(1) = e \quad \blacksquare$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\exp\left(\ln\left(\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\right)\right)\right]$ $\exp(\ln(\cdot))=\text{Id}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\right)\right]$$

continuidad exp $\downarrow$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}{x}\right]\right)\quad\left(=\exp\left(\frac{\ln\left(\frac{1-1}{0}\right)}{0}\right)\right)$$

L'H

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}\cdot\frac{e^x x-(e^x-1)}{x^2}}{1}\right]\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cancel{x}}{e^x-1}\cdot\frac{e^x x-e^x-1}{x^{\cancel{2}}}\right]\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x(x-1)-1}{x[e^x-1]}\right]\right)\quad\left(=\exp\left(\frac{1\cdot 0-1}{1\cdot(1-1}\right)=\exp\left(\frac{0}{0}\right)\right)$$

$$\overset{L'H}{=} \exp\left(\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x(x-1)+e^x}{e^x-1+xe^x}\right]\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x x}{e^x(1+x)-1}\right]\right) \quad \left(= \exp\left(\frac{1\cdot 0}{1\cdot 1-1}\right) = \exp\left(\frac{0}{0}\right)\right)$$

$$\overset{L'H}{=} \exp\left(\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x x+e^x}{e^x(1+x)+e^x}\right]\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\cancel{e^x}(x+1)}{\cancel{e^x}(1+x+1)}\right]\right)\left(=\exp\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} \quad \blacksquare$$

P9

P9. [Clásico]

El objetivo de este problema es estudiar la función $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$. Para ello: **a)** Indique domino, ceros, paridad y signos de f. **b)** Estudie la continuidad de f en su dominio y determine, si es que existen, asíntotas verticales, horizontales u oblicuas. **c)** Calcule f', estudie monotonía de f y determine los puntos críticos, identificando máximos y mínimos locales y globales, si es que existen. **d)** Calcule $f''(x)$, estudie convexidad y concavidad de f e indique los puntos de inflexión, si es que existen. **e)** Usando la información anterior, bosqueje la función, señalando los puntos críticos, valos extremos y recorrido de f.

dominio

$$x\in Dom(f) \iff f(x)=\exists \iff \frac{x^3}{x^2-1}=\exists \iff x^2-1\neq 0$$

$$\iff x\neq \pm 1$$

$$\therefore Dom(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$$

ceros

$$x\in Z(f) \iff f(x)=0 \iff \frac{x^3}{x^2-1}=0 \iff x^3=0 \iff x=0$$

$$\therefore Z(f)=\{0\}$$

Paridad

$x \in Dom(f)$. $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x)$

$\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$

$\therefore$ f es par (simétrica c/r a origen).

Signos

puntos de cambio → factorizar → $\frac{x^3 \rightarrow 0}{(x+1)(x-1)} \rightarrow +1,-1$

$* \; x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \Leftarrow x^2-1 \leq 0$

$* \; x \in (-1,1) \Leftarrow x^2-1 \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} * \; x \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq 0 \\ * \; x \leq 0 \Leftrightarrow x^3 \leq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow f(x)>0 \Leftrightarrow x \in (-1,0) \cup (1,+\infty) \\ \Rightarrow f(x)<0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (0,1) \end{array}$$

continuidad

f es una expresión racional → continua en su dominio. (donde no se indefine)

(a.h) asíntotas horizontales $x \to \pm\infty$

grado mayor

$$* \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{3}}{x^2-1} = +\infty$$

$$* \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty$$

∴ no hay a.h. → máx. y mín serán locales

(a.v.) asíntotas verticales

indefiniciones

$$x=+1 \quad \sim \quad x=-1$$

asíntotas oblicuas

$$y = mx + n \; ; \; m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1 \; ; \; n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$$

∴ $y = x$ es asíntota oblicua

derivada

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2(x^2-1)-x^3(2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

puntos críticos

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2(x^2-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm\sqrt{3}$$

crecimientos → signos de f' → factorizar expresión

	…	$-\sqrt{3}$	…	-1	…	0	…	1	…	$\sqrt{3}$	…
f'	+		−		−		−		−		+
f	↗		↘		↘		↘		↘		↗
		MAX		∄		∄				min	

$\sqrt{3}$ min local

$-\sqrt{3}$ max local

$$f(\pm\sqrt{3})=\pm\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

2° derivada

$$f''(x) = \left[\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}\right]' = \frac{[2x(x^2-3)+x^2(2x)](x^2-1)^2 - x^2(x^2-3)\cdot 2(x^2-1)(2x)}{(x^2-1)^4}$$

$$= \frac{[2x^3-6x+2x^3](x^2-1)^{\cancel{2}} - 4x^3(x^2-3)\cancel{(x^2-1)}}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{(4x^3-6x)(x^2-1) - 4x^3(x^2-3)}{(x^2-1)^3} = \frac{\cancel{4x^5} - 4x^3 - 6x^3 + 6x \cancel{-4x^5} + 12x^3}{(x^2-1)^3}$$

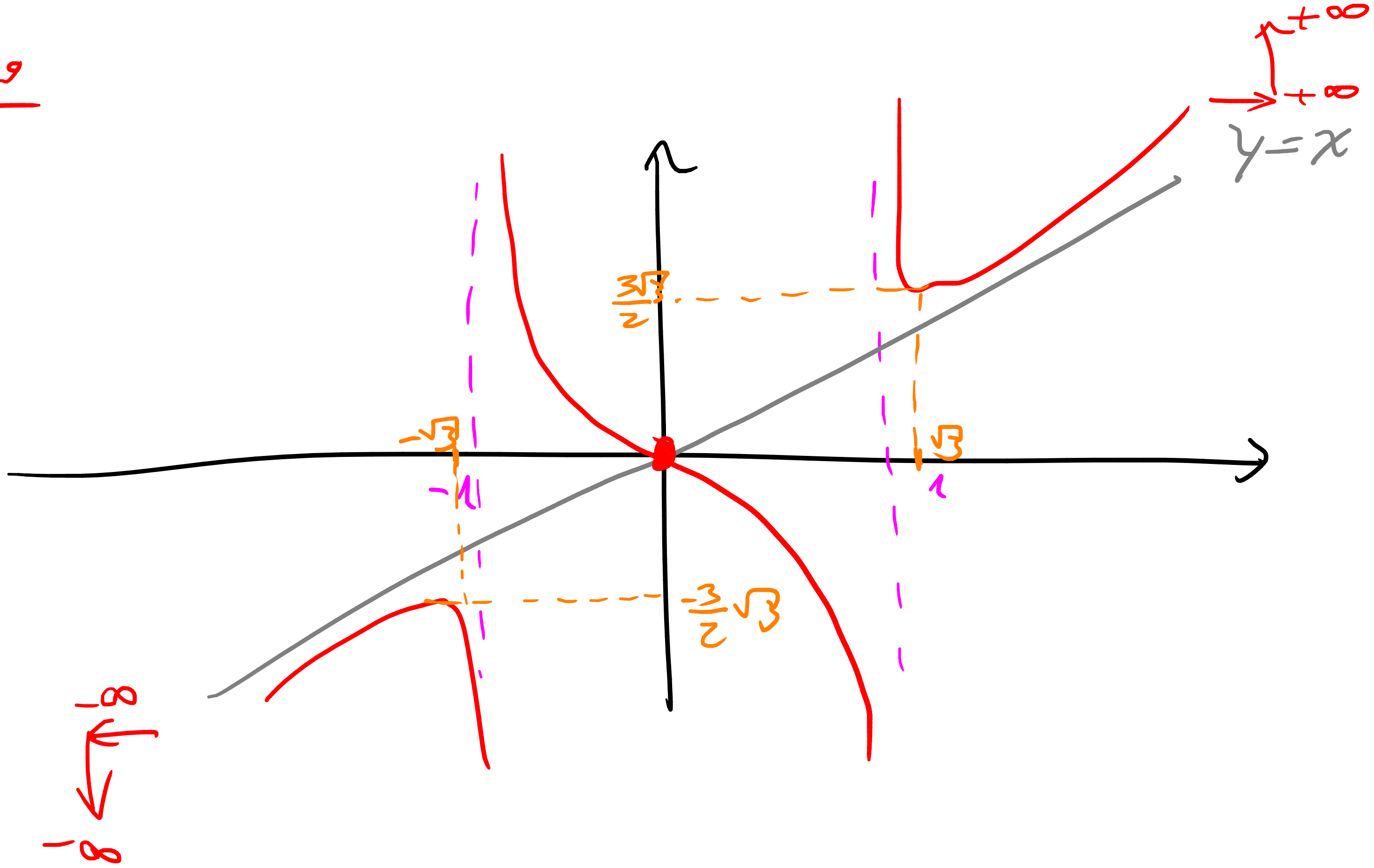
$$= \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} \;//$$

concavidad/convexidad → signos de f''

	…	-1	…	0	…	1	…
f''	−		+		−		+
f	∩		∪	inflexión	∩		∪

0 es punto de inflexión

bosquejo



Ánimo en su estudio!! ☺