DESARROLLO AUX 3

DERIVADAS Y TEOREMAS

MA1002-8
2025-2

Profesora: M. Eugenia Martínez M.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya

P_1

P1 P.D.Q. $f(x)=e^{-|x|}$ continua pero no derivable en 0

> es importante recordar que derivable $\Rightarrow$ continua y no al revés. Como es una noción puntual, conviene estudiarlo por definición.

En efecto,

* continuidad

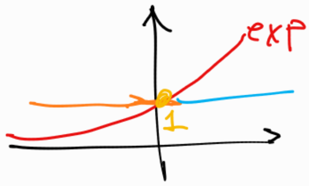
Se tiene que $f(x)=e^{|x|}$ es continua por composición de continuas (abs, exp.)
Luego, como f es continua en $\mathbb{R}$, en particular lo es en $\{0\}$.

Lo anterior también se puede verificar por la definición de límites:
f es continua en $0 \iff \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$, y para esto, los límites laterales en 0^- y 0^+ deben coincidir:

* $$\lim_{x\to 0^-} f(x) \underset{\text{def. } f}{=} \lim_{x\to 0^-} e^{-|x|} = \lim_{x\to 0^-} e^{-(-x)} = \boxed{\lim_{x\to 0^-} e^{x}} = 1$$

$x\to 0^- \Rightarrow x<0^-$
$\Rightarrow |x|=-x$

$*x<0$



* $$\lim_{x\to 0^+} f(x) \underset{\text{def. } f}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{-|x|} = \boxed{\lim_{x\to 0^+} e^{-x}} = 1$$

$x\to 0^+ \Rightarrow x^+>0$
$\Rightarrow |x|=x$

Así, como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \iff f$ continua en 0 //

* derivabilidad

> la intuición de porqué falla es porque $|\cdot|$ no es derivable en 0 porque la pendiente de la recta tangente al punto cambia.

Se verificará que f no es derivable en -1 i.e. que el límite $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ no existe, o sea, que los laterales (en 0^-, 0^+) son distintos:

* $$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h+0)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{e^{-|h|}-\cancelto{1}{e^{0}}}{h} =$$

def. derivada

def. f

$$= \lim_{h\to 0^-}\frac{e^{-(-h)}-1}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{e^{h}-1}{h} \overset{L'H}{=} \lim_{h\to 0^-}\frac{e^{h}}{1} = 1$$

$h\to 0^- \Rightarrow h<0$?

exponente

* $$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h+0)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{e^{|h|}-\cancelto{1}{e^{0}}}{h} =$$

def. derivada

def. f

$$= \lim_{h\to 0^+}\frac{e^{-h}-1}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{e^{-h}-1}{h} \overset{L'H}{=} \lim_{h\to 0^+}\frac{-e^{-h}}{1} = -1$$

$h\to 0^- \Rightarrow h<0$?

exponente

(P1) b) $\begin{cases} f:[0,+\infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \operatorname{arcsen}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) \end{cases}$

(P1) b) i) Calcular derivada en cualquier punto

Las funciones que son más "complejas", hay que usar regla de la cadena, o sea, derivar y multiplicar por derivada del argumento.

En efecto,

Sea $x \in (0,+\infty)$ y usando la regla de la cadena:

$$f'(x) = \left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)\right]' \quad ; \quad \boxed{[\operatorname{arcsen}(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)^2}} \cdot \left[\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right]' \quad ; \quad \boxed{\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)^2}} \cdot \frac{[2\sqrt{x}]'(1+x) - 2\sqrt{x}\,[1+x]'}{(1+x)^2} \quad ; \quad \boxed{[\sqrt{x}]' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)^2}} \cdot \frac{\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}\cdot(1+x) - 2\sqrt{x}\cdot 1}{(1+x)^2} \, .$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x)^2 - 4x}{(1+x)^2}}} \cdot \frac{\frac{(1+x)}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}}{(1+x)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}}} \cdot \frac{\frac{(1+x)-2x}{\sqrt{x}}}{\underbrace{(1+x)^2}_{=|1+x|^2}}$$

$= 1+2x+x^2-4x$
$= 1-2x+x^2 = (1-x)^2$

$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ y $\sqrt{a^2} = |a|$ $(\forall a \in \mathbb{R})$

$$= \frac{\cancel{|1+x|}}{|1-x|} \cdot \frac{1-x}{\sqrt{x}\,\underbrace{|1+x|}_{=1+x,\text{ pues } x\in(0,+\infty)}^{\cancel{2}}} = \frac{1-x}{\sqrt{x}\,|1-x|(1+x)} \quad \blacksquare$$

cualquier expresión algebraicamente equivalente es válida!

(P1) b) ii) P.D.Q. f continua pero no derivable en $x=1$

> es importante recordar que derivable $\Rightarrow$ continua y no al revés.
> Como es una noción puntual, conviene estudiarlo por definición.

En efecto:

* continuidad

Para mostrar que es continua, hay que ver que su valor en torno al punto esté definido desde ambos lados (i.e. que los límites laterales coincidan):

* $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) \quad \left(= \arcsin\left(\frac{2\cdot 1}{1+1}\right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \,//$$

* $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) \quad \left(= \arcsin\left(\frac{2\cdot 1}{1+1}\right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \,//$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \frac{\pi}{2} = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \Leftrightarrow f$ es continua en 1. □

* derivabilidad

Para ver que no se tiene derivabilidad, hay que mostrar que las pendientes de las rectas tangentes por ambos lados del punto sean distintas (o sea, que los límites laterales no coincidan, usando la def. calculada):

* $$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{1-x}{\sqrt{x}\,\underbrace{|1-x|}\,(1+x)}\right] = \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{\cancel{1-x}}{\sqrt{x}\,\underbrace{[-(\cancel{1-x})]}\,(1+x)}\right] = \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{-1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\right] = -\frac{1}{2} \,//$$

si $x\to 1^+ \Rightarrow x \approx 1{,}00000\ldots 1 \Rightarrow x>1 \Rightarrow 0>1-x$

* $$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-}\left[\frac{1-x}{\sqrt{x}\,\underbrace{|1-x|}\,(1+x)}\right] = \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{\cancel{1-x}}{\sqrt{x}\,\underbrace{[+(\cancel{1-x})]}\,(1+x)}\right] = \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\right] = \frac{1}{2} \,//$$

si $x\to 1^- \Rightarrow x \approx 0{,}99999\ldots \Rightarrow x<1 \Rightarrow 0<1-x$

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) \Rightarrow f$ no es derivable en $x=1$ □

Demostrando lo pedido. ▨

P2

P2) a) Calcular las siguientes derivadas

P2) a) i) $2x - \frac{4}{\sqrt{x}} =: f(x) \rightarrow x \overset{!}{\neq} 0$

polinomios → regla de Potencia

$$f'(x) = 2[x]' - 4\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]' \quad \cdots \text{ linealidad}$$

$$= 2 \cdot 1 - 4\left[x^{-\frac{1}{2}}\right]' \quad \text{reescribo}$$

$$= 2 - \underbrace{\cancel{4}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)}_{=-2} x^{-\frac{1}{2}-1} \quad \text{regla de potencia}$$

$$= 2 + 2x^{-\frac{3}{2}} \quad \boxtimes$$

P2) a) ii) $\left(7x + \sqrt{x^2+3}\right)^6 =: f(x) \rightarrow x^2 + 3 \overset{!}{\geq} 0$

regla de Potencia y cadena

$$f'(x) = \left[\left(7x + \sqrt{x^2+3}\right)^6\right]' \quad \text{regla de potencia + cadena}$$

$$= 6\left(7x + \sqrt{x^2+3}\right)^5 \left[7x + \sqrt{x^2+3}\right]' \quad \text{linealidad}$$

$$= 6\left(7x + \sqrt{x^2+3}\right)^5 \left(7[x]' + \left[\sqrt{x^2+3}\right]'\right) \quad \text{regla de potencia + cadena}$$

$$= 6\left(7x + \sqrt{x^2+3}\right)^5 \left(7 \cdot 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\left[x^2+3\right]'\right)$$

$$= 6\left(7x + \sqrt{x^2+3}\right)^5 \left(7 + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\cancel{2}x\right) \quad \text{regla de potencia}$$

$$= 6\left(7x + \sqrt{x^2+3}\right)^5 \left(7 + \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\right) \quad \boxtimes$$

P2 a) iii) $\dfrac{2x^4+3x^2-1}{x^2} =: f(x) \longrightarrow x \overset{!}{\neq} 0$

$$f'(x) = \left[\frac{2x^4+3x^2-1}{x^2}\right]'$$

regla del cociente

$$= \frac{[2x^4+3x^2-1]'\,x^2 - (2x^4+3x^2-1)[x^2]'}{(x^2)^2}$$

linealidad de derivada + regla de potencia

$$= \frac{\left(2[x^4]'+3[x^2]'+[-1]'\right)x^2 - (2x^4+3x^2-1)\cdot 2x}{x^4}$$

regla de potencia

$$= \frac{(2\cdot 4x^3+3\cdot 2x)x^2 - (2x^4+3x^2-1)2x}{x^4}$$

simplificar

$$= \frac{(8x^3+6x)x^2 - 2(2x^4+3x^2-1)x}{x^4}$$

simplificar

$$= \frac{8x^5 \cancel{+6x^3} - 4x^5 \cancel{-6x^3} + 2x}{x^4}$$

$$= \frac{4x^5+2x}{x^4} = 4x + 2\frac{1}{x^3} \quad \blacksquare$$

No siempre conviene solo matraquear!
Si se simplificaba la función al principio, el cálculo era menos elaborado!!

P_2 a) iv) $(xe^x)^\pi =: f(x)$

Regalo: Regla de la potencia $[x^n]' = n x^{n-1}$ está definida para $n \in \mathbb{R}$

$$f'(x) := \left[(xe^x)^\pi\right]'$$

regla de potencia + cadena

$$= \pi (xe^x)^{\pi-1} [xe^x]'$$

regla del producto

$$= \pi (xe^x)^{\pi-1} \left([x]' e^x + x [e^x]'\right)$$

derivadas conocidas

$$= \pi (xe^x)^{\pi-1} \left(1 \cdot e^x + x \cdot e^x\right)$$

$$= \pi (xe^x)^{\pi-1} \left(e^x + xe^x\right) \blacksquare$$

P_2 v) $x^x =: f(x)$

Regalo: usar algo que "baje" exponentes

"consistencia", le llaman

Trukito: $\boxed{x^x = \exp(\ln(x^x))}$, pues $\exp(\ln) = Id_{(0,+\infty)}$

$$= \exp(x \ln(x))$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^x = e^{x\ln(x)}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left[e^{x\ln(x)}\right]'$$

$$= e^{x\ln(x)} [x \ln(x)]'$$

$$= e^{x\ln(x)} \left([x]' \ln(x) + x [\ln(x)]'\right)$$

$$= e^{x\ln(x)} \left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

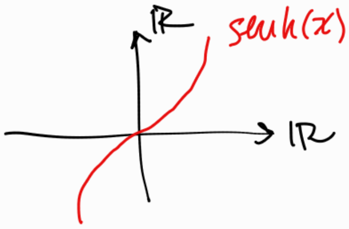
$$= \underbrace{e^{x\ln(x)}} \left(\ln(x) + 1\right)$$

$$= \underbrace{x^x} \left(\ln(x) + 1\right) \blacksquare$$

P2 a) vi) $\operatorname{senh}^{-1}(x) =: f(x)$ ⚠ $\operatorname{senh}^{-1}(x) \neq \underbrace{(\operatorname{senh}(x))^{-1}}_{\text{esto se llama } \operatorname{csch}(x)}$

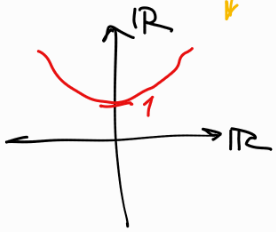
Contexto: ✨ Funciones hiperbólicas ✨ Google (no espero que las conozcan, por eso se las presento)

$$\begin{cases} \operatorname{senh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

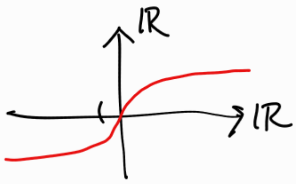


útil para modelar cables en tensión

$$\begin{cases} \cosh: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (\text{codominio es } [1, +\infty)) \\ \quad x \mapsto \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \operatorname{tgh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \operatorname{tgh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x} \end{cases}$$



Algunas cositas útiles:

$$\boxed{\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R})}$$

$$\boxed{[\operatorname{senh}(x)]' = \frac{1}{2}[e^x - e^{-x}]' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x)}$$

Estudiar inversa y luego la derivada, con el Teorema $\boxed{(f^{-1})'(\bar{y}) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(\bar{y}))}}$

En efecto,

Para tener inversa debe ser biyectiva...

Argumentos directos (verifíquenlos, como ejercicio):

* $\operatorname{senh}(x)$ es monótona creciente $\Rightarrow$ es inyectiva
* $\operatorname{Im}(\operatorname{senh}(x)) = \mathbb{R} = \operatorname{Cod}(\operatorname{senh}(x)) \Rightarrow$ es epiyectiva

$\therefore$ senh es biyectiva $\Leftrightarrow$ admite inversa

"Trukito" (consistencia): $x = \operatorname{senh}(\operatorname{senh}^{-1}(x))$ / $[\ ]'$ ← derivar en ambos lados

$$\Rightarrow 1 = \cosh(\operatorname{senh}^{-1}(x))[\operatorname{senh}^{-1}(x)]'$$

esto es por si se les "olvida" el Teorema, para que puedan deducirlo. Sí pueden usar directo (*).

$$\Rightarrow \frac{1}{\cosh(\operatorname{senh}^{-1}(x))} = \boxed{[\operatorname{senh}^{-1}(x)]'}$$

es justo lo que dice el Teorema:

$$(f^{-1})'(\bar{y}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\bar{y}))} \quad (*)$$

Entonces, esta expresión pasa la responsabilidad de calcular una derivada a solo evaluar una función en otra. Por eso, es conveniente hallar una expresión de dicha función en términos de la evaluada o su inversa.

↳ misión: encontrar expresión de cosh en términos de senh.

Por la identidad fundamental de funciones hiperbólicas:

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1 \quad / + \operatorname{senh}^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \cosh^2(x) = 1 + \operatorname{senh}^2(x) \quad / \sqrt{\cdot} \ / |\cdot|$$

$$\Rightarrow \cosh(x) = \pm\sqrt{1+\operatorname{senh}^2(x)}$$

$\cosh(\cdot) \geq 0$

$$\Rightarrow \cosh(x) = \sqrt{1+\operatorname{senh}^2(x)}$$

evaluar en $x = \operatorname{senh}^{-1}(x)$

$$\Rightarrow \cosh(\operatorname{senh}^{-1}(x)) = \sqrt{1+\operatorname{senh}^2(\operatorname{senh}^{-1}(x))}$$

$$= \sqrt{1+\underbrace{\operatorname{senh}(\operatorname{senh}^{-1}(x))}_{\text{Identidad pues son inversas}}{}^2}$$

$$= \sqrt{1+x^2}$$

"dar vuelta" (multiplicar cruzado)

$$\Rightarrow \frac{1}{\cosh(\operatorname{senh}^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Leftrightarrow [\operatorname{senh}^{-1}(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \square$$

usando expresión obtenida

(P2) b) $f(x) = \arcsin(2x-1) + 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)$ $\quad x \neq 0$

P.D.Q. $f'(x)$ es nula en $[0,1)$

Derivar y derivar y derivar (y regla de cadena)

En efecto,

$[\arcsin(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$[\operatorname{arctg}(x)]' = \frac{1}{1+x^2}$

$$f'(x) = \underbrace{\left[\arcsin(2x-1)\right]'}_{} + 2\underbrace{\left[\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\right]'}_{}$$

linealidad de derivada

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}}_{} \cdot \underbrace{[2x-1]'}_{} + 2\,\underbrace{\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)^2} \cdot \underbrace{\left[\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right]'}_{}}_{}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cancel{1}-4x^2+4x\cancel{-1}}} \cdot \underbrace{[2]}_{} + \cancel{2}\,\frac{1}{1+\frac{1-x}{x}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}}\left[\frac{1-x}{x}\right]'}_{}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cancel{4}x-\cancel{4}x^2}} \cdot [\cancel{2}] + \frac{1}{\frac{\cancel{x}+(1\cancel{-x})}{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \cdot \frac{[1-x]'x-(1-x)[x]'}{x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}} + \frac{\cancel{x}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\overbrace{[-1]x-(1-x)\cdot 1}^{=-1}}{x^{\cancel{2}}} \quad ; \quad \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}} = 0$$, con $x \in (0,1)$ Q.E.D. ■

(P2) c) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos veces derivable ; $g'(x)\neq 0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=\cos(\mu g(x)) \end{cases}, \quad \mu\in\mathbb{R}$$

(P2) c) i) P.D.Q. f, f', f'', g, g', g'' satisfacen la ecuación $f''-f'\frac{g''}{g'}+(\mu g')^2 f=0$

$\boxed{\text{se tiene la forma explícita} \to \text{se puede derivar}}$

En efecto,

Por regla de la cadena, y con cos, g derivables:

$*$ $f(x)=\cos(\mu g(x))$

$*$ $\Rightarrow f'(x)=-\operatorname{sen}(\mu g(x))\mu g'(x) = -\mu \operatorname{sen}(\mu g(x)) g'(x)$

$*$ $\Rightarrow f''(x)=-\mu\left[\operatorname{sen}(\mu g(x))g'(x)\right]'$

$$= -\mu\left(\cos(\mu g(x))\mu g'(x)\cdot g'(x) + \operatorname{sen}(\mu g(x))\cdot g''(x)\right)$$

$$= -\cos(\mu g(x))(\mu g'(x))^2 - \underbrace{\operatorname{sen}(\mu g(x))\mu g''(x)}_{= -\operatorname{sen}(\mu g(x)) g'(x)\frac{g''(x)}{g'(x)}}$$

$g'(x)\neq 0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

"hikita nipone" (1 conveniente)

$$\Leftrightarrow f''(x) = -f(x)(\mu g'(x))^2 + f'(x)\frac{g''(x)}{g'(x)} \quad (\forall x\in\mathbb{R})$$

O sea que $f'' = -f(\mu g')^2 + f'\frac{g''}{g'}$

$$\Leftrightarrow f''+f(\mu g')^2 - f'\frac{g''}{g'}=0$$ Q.E.D. ∎

(P2) c) ii) Calcular $f^{(n)}(0)$ para $g(x)=x$

este "regalo" es la gracia del problema :)

Notar que $f(x)=\cos(\mu g(x))$; $g(x)=x$

$\Rightarrow f(x)=\cos(\mu x)$; $\boxed{\cos^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)}$

$\Rightarrow f^{(n)}(x)=\mu^n\cos\left(\mu x+\frac{n\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f^{(n)}(0)=\mu^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ ∎

(P2) d) $a>0$, $h(x) = \text{arctg}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)$

(P2) d) i) Indicar dónde h es continua y dónde es derivable. Mostrar que h' no depende de a

continuidad $\Leftrightarrow$ donde esté bien definida ; derivada : lo anterior, como mínimo

En efecto,

* continuidad

Se pierde continuidad en la indefinición: $1-ax=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{a}$

O sea, h es continua en $\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{a}\}$, por álg./comp. de funciones continuas.

* derivabilidad

Tomando el dominio ya mencionado:

cadena y $[\text{arctg}(x)]' = \frac{1}{1+x^2}$

$$f'(x) = \left[\text{arctg}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)\right]' = \frac{1}{1+\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)^2} \cdot \left[\frac{x+a}{1-ax}\right]'$$

derivada del cociente

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)^2} \; \frac{1\cdot(1-ax)-(x+a)(-a)}{(1-ax)^2}$$

$= 1\cancel{-ax}+\cancel{ax}+a^2$
$= 1+a^2$

sumar y reescribir fracción

$$= \frac{\cancel{(1-ax)^2}}{(1-ax)^2+(x+a)^2} \cdot \frac{1+a^2}{\cancel{(1-ax)^2}}$$

expandir denominador

$$= \frac{1+a^2}{1\cancel{-2ax}+a^2x^2+x^2\cancel{+2ax}+a^2} \; ; \quad \begin{aligned} &1+a^2x^2+x^2+a^2 \\ &= 1+a^2(x^2+1)+x^2 \\ &= (x^2+1)(1+a^2) \end{aligned}$$

factorizar

$$= \frac{\cancel{1+a^2}}{(x^2+1)\cancel{(1+a^2)}} = \frac{1}{x^2+1} \quad //$$

h tiene la misma derivada que arctg

Como $f' = f'(x)$ (a no aparece en la expresión), se muestra lo pedido. ☑

P2 d) ii) P.D.Q. $h(x) = \text{arctg}(x) + \text{arctg}(a) \quad (\forall x \in [0, \frac{1}{a}))$

se quiere encontrar nueva expresión de $h \ (\forall x \in [0, \frac{1}{a}))$
O sea, hay una expresión fija a la que se quiere llegar, en un intervalo fijo.
ideas de TVM

A continuación, algunas intuiciones y cosas que motivan el desarrollo:

$[\text{arctg}(x)]' = \frac{1}{1+x^2} = [h(x)]'$, de la parte anterior

Notar que la igualdad a la que se quiere llegar se puede reescribir:

$$h(x) = \text{arctg}(x) + \text{arctg}(a)$$
$$\Leftrightarrow h(x) - \text{arctg}(x) = \text{arctg}(a) \ ; \ h(0) = \text{arctg}\left(\frac{0+a}{1-0}\right) = \text{arctg}(a)$$
$$\Leftrightarrow h(x) - \text{arctg}(x) = h(0)$$
cero conveniente
$$\Leftrightarrow h(x) - \text{arctg}(x) = h(0) - \underbrace{\text{arctg}(0)}_{=0}$$
$$\Leftrightarrow [h(x) - \text{arctg}(x)] - [h(0) - \text{arctg}(0)] = 0$$

Entonces...

Si se definiera una función auxiliar $\varphi(x) = h(x) - \text{arctg}(x)$, entonces:

* sería continua, derivable
* su derivada sería 0 pues $[h(x)]' = [\text{arctg}(x)]'$
* si se estudia en $\underbrace{(0, x)}$, se puede aplicar el Teorema de Valor Medio de Lagrange

porque ahí se conocen los valores $\varphi(0), \varphi(x)$

Y se puede concluir!

En efecto, sea $x \in [0, \frac{1}{a}) \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{a}$

$\underline{x=0|}$

$\Rightarrow h(0) = \cancelto{0}{\operatorname{arctg}(0)} + \operatorname{arctg}(a)$

$\Leftrightarrow \underbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{0+a}{1-0}\right)}_{\text{def. de } h} = \operatorname{arctg}(a)$

$\Leftrightarrow V$ // (o sea, en $x=0$ es verdad que $h(x) = \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}(a)$) $\square$

$\underline{x>0|}$ $(0<x<\frac{1}{a})$

Sea la función $\varphi(t) = h(t) - \operatorname{arctg}(t)$

Sea el intervalo $[0,x]$ $(\subseteq [0,a))$.

Notar que:

* φ es continua en $[0,x]$, pues $x<\frac{1}{a}$ i.e. no hay discontinuidad de h.
* φ es derivable en $(0,x)$, pues h, arctg lo son

$\Rightarrow \varphi'(t) = h'(t) - [\operatorname{arctg}(t)]' = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2} = 0$

Luego, en virtud del Teorema del Valor Medio:

$$(\exists \xi \in (0,x)): \varphi'(\xi) = \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} \; ; \; \varphi'(\xi) \stackrel{.}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) - \varphi(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(0)$$

$$\Leftrightarrow h(x) - \operatorname{arctg}(x) = \cancelto{=\operatorname{arctg}(a)}{h(0)} - \cancelto{=0}{\operatorname{arctg}(0)}$$

$$\Leftrightarrow h(x) = \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}(a)$$ Q.E.D. $\blacksquare$

P3

(P_3) a) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, derivable en (a,b)

$f(a)=0=f(b)$; $f'(a)=0$

(P_3) a) i) P.D.Q. $(\exists\, c\in(a,b))$: tangente a f en c pasa por origen

hay que entender cómo se ve simbólicamente que la recta tangente a f en c pase por el origen (usar la def. de recta tangente, y que si pasa por el origen el $(0,0)\in$ Recta)

Notar que la recta tangente a f en c es $L: y-f(c)=f'(c)(x-c)$

Si pasara por el origen: $(0,0)\in L \iff 0-f(c)=f'(c)(0-c)$

$$\iff f(c)=cf'(c)$$

El TVM usado de forma apropiada puede permitir concluir que una diferencia sea cero (el numerador!!). entonces si se quiere $f(c)=cf'(c)$ conviene plantearlo como una diferencia $f(c)-cf'(c)=0$.

Más aún, hay que elegir una función auxiliar que permita obtener esa forma.

En efecto,

Sea $\varphi(x)=\frac{1}{x}f(x)$ donde:

* φ es continua en $[a,b]$, pues $a>0 \Rightarrow [a,b]\not\ni\{0\}$
* φ es derivable en (a,b), pues $\frac{1}{x}, f$ lo son

$$\Rightarrow \varphi'(x)=-\frac{1}{x^2}f(x)+\frac{1}{x}f'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

* $\varphi(a)=\frac{1}{a}\underbrace{f(a)}_{=0}=0$
* $\varphi(b)=\frac{1}{b}\underbrace{f(b)}_{=0}=0$

Luego, en virtud del TVM de Rolle: $(\exists\, c\in(a,b))$: $\varphi'(c)=0$

$$\iff \frac{cf'(c)-f(c)}{c^2}=0, \text{ algún } c\in(a,b)$$

$$\Rightarrow cf'(c)-f(c)=0, \text{ algún } c\in(a,b)$$

$\Rightarrow cf'(c)=f(c)$, algún $c\in(a,b)$, que equivale a la condición de que la recta tangente a f en c pase por el origen. $\blacksquare$

(P3) b) h derivable en $\mathbb{R}$

P.D.Q. $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \exists$, $\lim_{x\to+\infty} h'(x) = \exists \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} h'(x) = 0$

Usar TVM en un intervalo apropiado para obtener una expresión de la derivada (local) y en función de eso ver comporta su asintótico (tirar límite).

En efecto,

Sea el intervalo $[x, x+1] \subseteq \mathbb{R}$.

Como h es derivable en $\mathbb{R} \Rightarrow h$ es continua en $\mathbb{R}$. Entonces, en particular:

* h es continua en $[x, x+1]$
* h es derivable en $(x, x+1)$

Luego, en virtud del Teorema del Valor Medio:

$$(\exists\, \xi \in (x, x+1)) : \frac{h(x+1) - h(x)}{(x+1) - x} = h'(\xi)$$

$$\iff h(x+1) - h(x) = h'(\xi), \text{ algún } \xi \in (x, x+1) \quad (*)$$

Si $x \to +\infty$ y $\xi \in (x, x+1) \Rightarrow \xi \to +\infty$ ("el intervalo se hace cada vez más grande").

Entonces, al tomar límite en $(*)$ queda: $\lim_{x\to+\infty} [h(x+1) - h(x)] = \lim_{\xi\to+\infty} h'(\xi)$. (Δ)

Pero notar que $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \exists \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} h(x) =: L_1$, $L_1 \in \mathbb{R}$

aquí la lectura es: "como $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ se llama L_1 y existe, al evaluar h en $x+1$ y tomar límite en x tendiendo a $+\infty$ también se recupera la misma expresión" $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} h(x+1) = L_1$.

$y = x+1$
$y \to \infty$, si $x \to +\infty$

Entonces, el lado izquierdo de (Δ) es cero!, pues $\lim_{x\to+\infty} h(x+1) = \lim_{x\to+\infty} h(x)$.

Luego, necesariamente $\lim_{\xi\to+\infty} h'(\xi) = 0$, concluyendo lo pedido. ∎

puede ser "x" (las variables son "mudas" en los límites).

(P_3) c) f continua en $[0,+\infty)$, diferenciable en $(0,+\infty)$
$f(0)=0$, $f'(x)$ creciente en $\mathbb{R}^+$.
P.D.Q. $f'(x) > \dfrac{f(x)}{x}$ en $\mathbb{R}^+$
Deducir que $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ es creciente en $\mathbb{R}^+$

> Si se estudia la función en un intervalo conveniente, entonces se puede obtener una expresión para la derivada (este intervalo se puede "intuir" cuando se conoce el valor de la función en un punto. Aquí, por ejemplo, se da $f(0)=0$).

En efecto,
Como f es:

* continua en $[0,+\infty)$, en particular lo es en $[0,x)$, $x>0$
* derivable en $(0,+\infty)$, en particular lo es en $(0,x)$, $x>0$

Entonces, en virtud del Teorema del Valor Medio:

$$(\exists\, \xi \in (0,x)) : \ f'(\xi) = \frac{f(x) - \overbrace{f(0)}^{0 \text{ (enunciado)}}}{x-0}$$

$$\iff f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}, \text{ algún } \xi \in (0,x)$$

Además, por enunciado f' es creciente. Como $\xi \in (0,x) \iff \xi < x$, $x \in \mathbb{R}^+$

$$\Rightarrow f'(\xi) < f'(x), x \in \mathbb{R}^+$$

$$\iff \boxed{\frac{f(x)}{x} < f'(x), x \in \mathbb{R}^+} \ \square$$

> Para ver que una función es creciente, basta ver que su derivada sea positiva

Notar que si $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$, entonces usando la regla del cociente:

$$g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} > 0 \quad \text{i.e. } g \text{ es creciente. } \square$$

lo que se acaba de ver! :)

$$\left\{ \begin{aligned} & f'(x) > \frac{f(x)}{x} \\ \iff & f'(x)x > f(x) \\ \iff & f'(x)x - f(x) > 0 \end{aligned} \right.$$

Se muestra así lo pedido!

P3 d) g dos veces derivable en $\mathbb{R}$

$g(0) = 0 = g'(0)$.

$a > 0$; P.D.Q. $(\exists\, \xi \in (0,a)) : \frac{a^2}{2} g''(\xi) = g(a)$

más adelante, aprenderán que esto se llama "primitiva"

A veces, hay que elegir una función auxiliar conveniente pensando en la forma de su DERIVADA! y según eso, pensar cómo debe ser.

si se ve que $h''(\cdot) = 0$ para algún $\cdot$, ganamos!!

En efecto,

Defínase la función $h(x) = g(x) - \left(\frac{x}{a}\right)^2 g(a)$.

$$\Longrightarrow h'(x) = g'(x) - 2\frac{g(a)}{a^2} x$$

$$\Longrightarrow \boxed{h''(x) = g''(x) - 2\frac{g(a)}{a^2}}$$

conviene porque $* \, h(a) = g(a) - \left(\frac{a}{a}\right)^2 g(a)$

$\Longleftrightarrow \boxed{h(a) = 0}$

$* \, \boxed{h(0) = \underbrace{g(0)}_{=0} - 0 = 0}$

y porque $* \, h'(0) = \underbrace{g'(0)}_{=0} - 0 = 0$

Como g es derivable en $\mathbb{R}$, entonces g es continua en $\mathbb{R}$, y por lo tanto la función h hereda esas propiedades al definirse por g (es derivable 2 veces).

En particular lo es en $[0,a]$, y $h(a) = 0 = h(0)$.

Entonces, en virtud del TVM de Rolle: $(\exists\, \xi_1 \in (0,a)) : h'(\xi_1) = 0$,

En particular, h' es continua y derivable en $[0,\xi_1]$, $(0,\xi_1)$, respectivamente.
Como $h'(0) = 0$, en virtud de Rolle: $(\exists\, \xi \in (0,\xi_1) \subseteq (0,a)) : h''(\xi) = 0$,

equivalentemente $g''(\xi) - 2\frac{g(a)}{a^2} = 0$, algún $\xi \in (0,a)$

$\Longleftrightarrow \frac{a^2}{2} g''(\xi) = g(a)$, algún $\xi \in (0,a)$, concluyendo. $\blacksquare$

P_3 e) g derivable en $\mathbb{R}$

ceros del coseno

$g(x)\,tg(x) \geq 0 \quad \left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}\right)$

"tener el mismo signo" $\rightarrow$ TVI

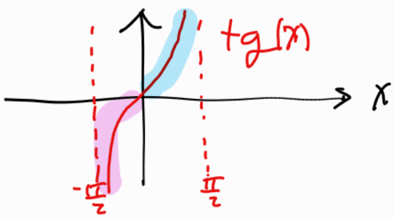
P.D.Q. g posee ceros en intervalos de forma $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$

es clave recordar la forma de la tangente:

teniendo ceros, se puede usar el TVM de Rolle

En efecto,

Sea $k \in \mathbb{Z}$



* $\left(\forall x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi\right)\right): \; tg(x) < 0$

$\Rightarrow tg(x)\,g(x) \leq 0 \quad \left(\forall x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi\right)\right)$

tiene el mismo signo

* $\left(\forall x \in \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right): \; tg(x) > 0$

$\Rightarrow tg(x)\,g(x) \geq 0 \quad \left(\forall x \in \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

tiene el mismo signo

Como existe un cambio de signo, por Teorema del Valor Intermedio:

$$\left(\exists x_k \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right): g(x_k) = 0$$

Luego, g se anula en x_k y x_{k+1}, $\forall k \in \mathbb{N}$

En virtud del TVM de Rolle: $\left(\exists c_k \in (x_k, x_{k+1})\right): g'(c_k) = 0$ $\blacksquare$

P4

¿Cómo uso "L'Hôpital"?

La Regla de L'Hôpital sirve para calcular los límites que quedan "indeterminados" o bien en "las formas de L'Hôpital":

$$\frac{+\infty}{+\infty} \; , \; \frac{-\infty}{-\infty} \; , \; \frac{0}{0}$$

Entonces, ¿cómo se usa?

Primero, hay que asegurarse que el límite tenga alguna forma de L'Hôpital al evaluar en el punto al que se está haciendo tender:

Ej: $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x}$; si evalúo $x=0$, entonces tengo $\frac{sen(0)}{0} = \frac{0}{0} \rightarrow$ Forma indeterminada de L'Hôpital

Lo que propone el Teorema de L'Hôpital es: si el límite tiene una forma indefinida, entonces el límite va a ser igual al límite de la fracción de las derivadas respectivas. O sea, derivar la función del numerador y la función del denominador **POR SEPARADO**.

L'hôpital $\lim_{x \to 0} \frac{[sen(x)]'}{[x]'} = \lim_{x \to 0} \frac{cos(x)}{1} = 1$

Con esta herramienta, ya no es necesario recordar los "límites conocidos" de Intro. al Cálculo!! (nunca me los aprendí...) Solo requieren usar L'Hôpital

Y recordar que es importante que:

- ✔ el límite debe estar en la forma FRACCIONARIA
- ✔ la derivada del denominador no se anule nunca

P4 Calcular los siguientes límites

$\boxed{\text{Usar Regla de L'Hôpital}}$

ya no hay que aprenderse los "límites conocidos" 😃

P4 i) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(e^{-x}+xe^{-x})}{x^2}\right] =: \ell$

Ojo: conviene factorizar $e^{-x}+xe^{-x}$ para separar en suma logaritmos

o si no...

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(e^{-x}+xe^{-x})}{x^2}\right] \left(= \frac{\ln(e^{-0}+0\cdot e^{-0})}{0} = \frac{\ln(1+0)}{0} = \frac{\ln(1)}{0} = \underbrace{\frac{0}{0}}_{\text{Forma de L'H}}\right)$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{[\ln(e^{-x}+xe^{-x})]'}{[x^2]'} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{1}{e^{-x}+xe^{-x}}[e^{-x}+xe^{-x}]'}{2x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{1}{e^{-x}+xe^{-x}}[\cancel{-e^{-x}}+\cancel{e^{-x}}-xe^{-x}]}{2x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-xe^{-x}}{(e^{-x}+xe^{-x})2x}\right]\left(=\frac{0}{0}\right)$$

$= \ldots$ (no están quedando cosas "tan lindas" para derivar

En efecto,

$$\ell := \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(e^{-x}(1+x))}{x^2}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(e^{-x})+\ln(1+x)}{x^2}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-x+\ln(1+x)}{x^2}\right]\left(= \frac{-0+\ln(1+0)}{0} = \underbrace{\frac{0}{0}}_{L'H}\right)$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\left[\frac{[-x+\ln(1+x)]'}{[x^2]'}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-1+\frac{1}{1+x}\cdot 1}{2x}\right]\left(=\frac{-1+\frac{1}{1+0}}{0} = \underbrace{\frac{0}{0}}_{L'H}\right)$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\left[\frac{[-1+\frac{1}{1+x}]'}{[2x]'}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-(1+x)^{-2}}{2}\right]\left(= -\frac{(1+0)^{-2}}{2} = -\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(e^{-x}+xe^{-x})}{x^2}\right] = -\frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

(P4) ii) $\lim_{x\to 0} x^{-2} \ln\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right) =: \ell$

En efecto,

Conviene escribirlo como una fracción para usar L'Hôpital:

$$\ell := \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)}{x^2}\right]$$

(numerador, por continuidad de $\ln(\cdot)$: $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right] \left(=\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = 1$
entonces $x\to 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right) \to \ln(1) = 0$ y $x^2\to 0 \Rightarrow$ queda $\frac{0}{0}$)

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left[\ln\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)\right]'}{[x^2]'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}\left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right]'}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cancel{x}}{\operatorname{sen}(x)}\left[\frac{\cos(x)x - \operatorname{sen}(x)\cdot 1}{x^2}\right]}{2\cancel{x}}$$

lo factorizaré para que no "moleste" ᵕ

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2\operatorname{sen}(x)}\right] \left(= \frac{1}{2}\,\frac{0\cdot 1 - 0}{0\cdot 0} = \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{L'H}{=} \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{[x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)]'}{2[x^2\operatorname{sen}(x)]'} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cancel{\cos(x)} + x(-\operatorname{sen}(x)) \cancel{-\cos(x)}}{[2\cancel{x}\operatorname{sen}(x) + x^{\cancel{2}}\cos(x)]}\right]$$

se reescribe

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x\cos(x) + 2\operatorname{sen}(x)}\right]$$

Reescribir "convenientemente" el denominador
(si no, hay que derivar muchas veces más ¡!)
(y la motivación es formar límites más manejables)

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x\cos(x)\left(1 + \frac{2\operatorname{sen}(x)}{x\cos(x)}\right)}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right]}_{\to 1}\underbrace{\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\cos(x)}\right]}_{\to 1}\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{1 + \frac{2\operatorname{sen}(x)}{x\cos(x)}}\right]$$

$\left(=\frac{0}{0} \xrightarrow{L'H} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = 1\right)$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\lim_{x\to 0}\left[1 + \frac{2\operatorname{sen}(x)}{x\cos(x)}\right]} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1 + 2\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x\cos(x)}\right]} \left(= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1 + \frac{2\cdot 0}{0\cdot 1}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1 + \frac{0}{0}}\right)$$

L'H

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1 + 2\underbrace{\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right]}_{1}\underbrace{\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\cos(x)}\right]}_{1}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$$

P4 iii) $\lim_{x \to 0} \left[\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\operatorname{sen}(x)}\right] =: \ell$

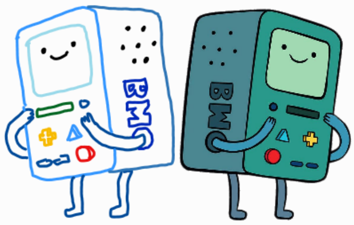
En efecto,

$$\ell := \lim_{x \to 0} \left[\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\operatorname{sen}(x)}\right] \quad \left(= \frac{1-1-2}{0} = \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{[e^x - e^{-x} - 2x]'}{[\operatorname{sen}(x)]'}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\cos(x)} \quad \left(= \frac{1-1-2}{1} = \frac{0}{1}\right)$$

$$= 0 \quad \blacksquare$$



Como pudieron ver, las derivadas son muy versátiles, y suelen tener un desarrollo "extenso"... ¡Siempre hay que usar la Regla de la Cadena!

También vimos otro poderoso Teorema de Existencia: el Teorema del Valor Medio, que da un valor para la derivada de una función (en un cierto intervalo).

La clave para los problemas de TVM es reconocer la función apropiada para calcular su derivada.

Y todas estas intuiciones solo se desarrolla con práctica.

Ánimo en su estudio!!

Feliz de contestar sus dudas :) (bianca.zamora@ug.uchile.cl → U-cursos)

-Bianca