

Resumen de Cálculo Diferencial e Integral para C1

Continuidad, derivadas y teoremas asociados

Profesora: M. Eugenia Martínez M.

Auxiliar: Bianca Zamora Araya

Fecha: Septiembre de 2025

En el presente documento se tienen los principales resultados que deben manejar para el primer control del curso. Recuerden que no solo importa conocer las definiciones, propiedades y teoremas, sino que también es necesario comprenderlas en profundidad y saber cómo aplicarlas. Confíen en sus conocimientos y éxito en su estudio (:

Les comarto la siguiente imagen, obtenida de [aquí](#). Lo que se muestra es un mapa de la radiación proveniente del Fondo Cósmico de Microondas, en inglés, *Cosmic Microwave Background radiation* (CMB), que se considera como la “fotografía más antigua” del Universo. Esta radiación fue emitida cuando el cosmos tenía apenas 370 000 años de edad... ¡actualmente tiene cerca de 13 800 millones de años!

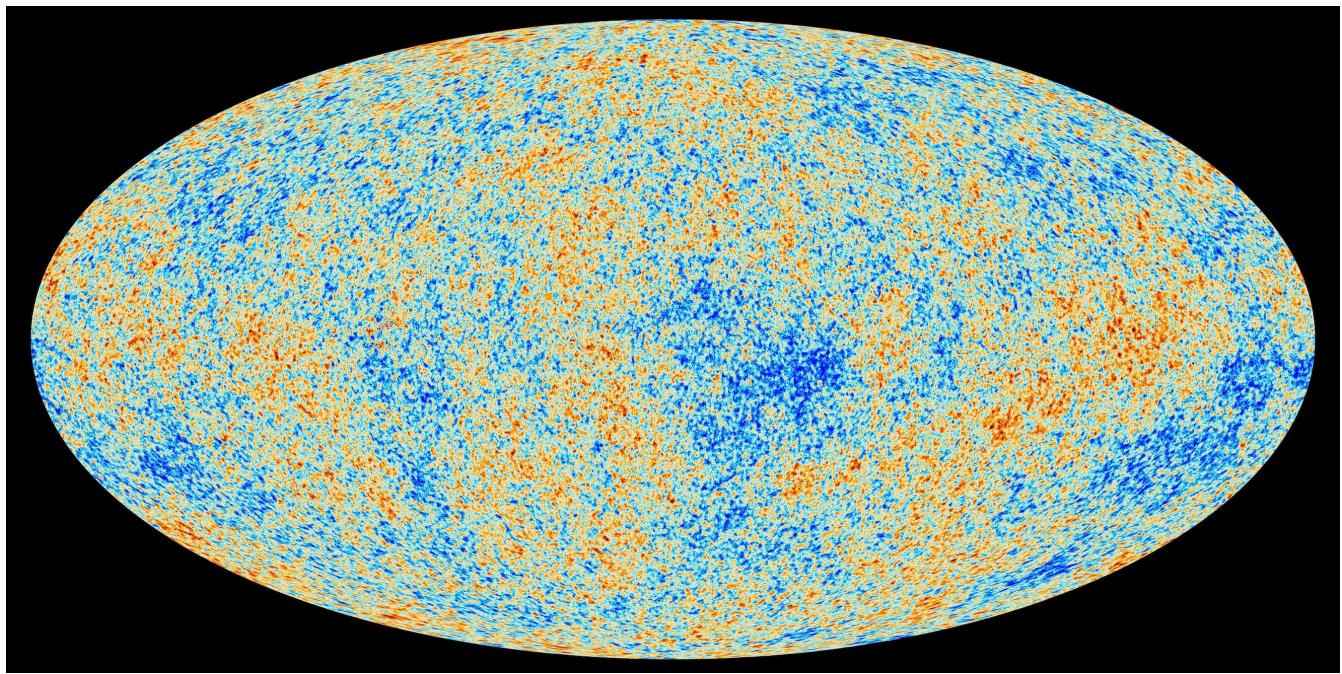


Figura 1: Cosmic Microwave Background radiation (ESA and the Planck Collaboration) 2023

Lo que se representa no son galaxias ni estrellas, sino las pequeñas fluctuaciones de temperatura que corresponden a regiones con densidades levemente diferentes en la composición del medio. Estas variaciones, con el paso de miles de millones de años, dieron origen a toda estructura hoy conocida: cúmulos de galaxias, estrellas, planetas y a nosotros(as) mismos(as). El CMB es, en cierto sentido, un eco del Big Bang, y la información más cercana que se conoce al inicio del mundo: es la luz más lejana y antigua que cualquier telescopio puede ver.

Pensar en que la luz ha viajado durante casi catorce mil millones de años para llegar a nosotros, hace inevitable reflexionar sobre lo breve de nuestra existencia comparada con la historia del Universo... y, al mismo tiempo, ¡sobre lo extraordinario que es que podamos entenderla! **Aprender tiene un propósito**, y este esfuerzo que hacen en estudiar les acerca cada vez más a una comprensión más profunda sobre el mundo que les rodea (:

Sucesiones y continuidad

Sucesión

Es una función de la forma $\begin{cases} s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto s(n) \equiv s_n \end{cases}$.

Se puede entender como una lista ordenada de elementos, denominados **términos**, indexados en los números naturales, que siguen una regla específica.

Otras formas de denotarla son: (s_n) , $(s_n)_n$, $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ o $(s_n)_{n \geq 0}$, o también usando $\{\}$.

La imagen de $n \in \mathbb{N}$ por s , es decir, s_n , se denomina **término n -ésimo** de la sucesión; por eso se utiliza la escritura $(s_n) \subseteq \mathbb{R}$. Se acepta que una cantidad finita de términos de la sucesión no estén definidos, o sea, que el dominio no sea exactamente \mathbb{N} (esto ocurre, por ejemplo, para evitar la división por cero u otro tipo de indefinición).

Convergencia

Si una sucesión (s_n) converge a un valor $l \in \mathbb{R}$ se escribe $s_n \rightarrow l$ y equivale a:

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n > n_0) : |s_n - l| \leq \epsilon$$

Sucesión acotada

Una sucesión (s_n) es acotada si y solo si $(\exists M > 0) (\forall n \in \mathbb{N}) : |s_n| \leq M$.

Subsucesión

Sean (s_n) una sucesión y $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente. Una **subsucesión** de (s_n) , generada por la función φ , corresponde a la sucesión $(s_{\varphi(n)})$.

Herencia de convergencia a subsucesiones

Sean (s_n) sucesión y $l \in \mathbb{R}$. Entonces $s_n \rightarrow l$ si y solo si todas las subsucesiones de (s_n) convergen a l .

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Toda sucesión acotada posee al menos una subsucesión convergente.

Convergencia y acotamiento

Para una sucesión se cumple:

- convergente \implies acotada es V (por la definición)

de convergencia).

- acotada \implies convergente es F (por ejemplo, la sucesión $(-1)^n$ es acotada pero no converge porque las subsucesiones son tal que $(-1)^{2n} \rightarrow 1$ y $(-1)^{2n+1} \rightarrow -1$, y $1 \neq -1$).
- acotada \implies alguna subsucesión converge es V (por el teorema de Bolzano-Weierstrass).

Notación para función

$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ denota una función real f definida en un dominio $A \subseteq \mathbb{R}$.

Continuidad en un punto

Sean $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A$ un punto en el dominio. Entonces f es **continua en el punto a** si:

$$(\forall (x_n) \subseteq A) : x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow f(a)$$

Continuidad en un conjunto

- Si una función es continua en cada uno de los puntos de un subconjunto del dominio, se dice que la función es continua en el conjunto.
- Si dicho subconjunto es todo el dominio, se dice que la función es continua (a secas).

Es importante hacer esta diferencia en el lenguaje porque la continuidad es una noción puntual.

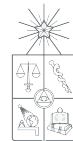
Caracterización epsilon-delta de continuidad (en un punto)

Sean $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A$ un punto en el dominio. Entonces f es **continua en el punto a** si y solo si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, o equivalentemente:

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0) (\forall x \in A) : |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \epsilon$$

Álgebra y composición de funciones continuas

Sean $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $z \in A \cap B$. Entonces, son continuas las funciones $\beta \cdot f$ con $\beta \in \mathbb{R}$, $f \pm g$, $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$ con $g(z) \neq 0$, y la composición $g \circ f$ (siempre que g sea continua en $f(a)$, y que $f(A) \subseteq B$).



Aplicaciones de continuidad

Intervalos cerrados, acotados y no vacíos

En esta parte del curso se trabajará constantemente con intervalos de la forma $[a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Siempre se asumirá (salvo que se diga lo contrario), que $a \leq b$ (si no, sería un conjunto vacío). Es importante que sea **cerrado y acotado**, para que cumpla las hipótesis de los teoremas.

Teorema de Bolzano / Teorema del Cero Intermedio / Teorema del Valor Intermedio (TVI)

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua.

$$\begin{aligned} \text{Si } f(a)f(b) \leq 0 \implies \text{existe } \bar{x} \in [a, b] \text{ tal que } f(\bar{x}) = 0 \\ \iff (\exists \bar{x} \in [a, b]) : f(\bar{x}) = 0 \end{aligned}$$

Teorema de los Valores Intermedios / Propiedad de Darboux / TVI Generalizado

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua.

Si $c, d \in f([a, b]) \implies$ para todo x_0 entre c y d , existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = c$ tal que $f(\bar{x}) = x_0$

$$\iff (\forall x_0 \in [c, d] \subseteq f([a, b])) (\exists \bar{x} \in [a, b]) : f(\bar{x}) = x_0$$

Teorema de Weierstrass: MÁXIMOS y mínimos

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces:

- f es acotada, simbólicamente:

$$(\exists M > 0) (\forall x \in [a, b]) : |f(x)| \leq M$$

- f alcanza su MÁXIMO en $[a, b]$, simbólicamente:

$$(\exists x_{\max} \in [a, b]) (\forall x \in [a, b]) : f(x) \leq f(x_{\max})$$

- f alcanza su MÍNIMO en $[a, b]$, simbólicamente:

$$(\exists x_{\min} \in [a, b]) (\forall x \in [a, b]) : f(x_{\min}) \leq f(x)$$

Monotonía e inyectividad

Una función f monótona estricta es tal que:

- creciente: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
- decreciente: $x_1 < x_2 \implies f(x_2) < f(x_1)$

Y siempre es inyectiva. Si se restringe su codominio a su recorrido, es epiyectiva, y por tanto biyectiva, así que admite inversa.

Continuidad de la función inversa

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo (finito o infinito, abierto o cerrado o semicerrado). Sea $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente). Entonces: $f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ es continua.

Continuidad uniforme

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. f es **uniformemente continua**

$$\text{ssi: } (\forall \epsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0) (\forall x, y \in A) : |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

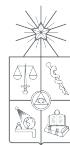
Caracterización de continuidad uniforme

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, con dominio **cerrado** y acotado.

Entonces f es uniformemente continua si y solo si f es continua en todo punto $\bar{x} \in [a, b]$.

Continuidad y continuidad uniforme

- continuidad uniforme \implies continuidad, siempre (de la definición de continuidad uniforme se llega a la continuidad en un punto, para cada punto).
- ¡La recíproca no es cierta! Ejemplo: x^3 es continua, pero su cota δ depende del punto, o sea: no es uniformemente continua. Salvo que se trabaje en un dominio cerrado y acotado, por el teorema que caracteriza la continuidad y la continuidad uniforme, sí se tendrá esta implicancia.



Derivadas y sus teoremas

Función derivable en un punto

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es **derivable** en $\bar{x} \in (a, b)$ si existe el siguiente límite, y se llama **derivada de f en \bar{x}** :

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} \equiv f'(\bar{x})$$

La derivada en un punto corresponde al valor de la pendiente de la recta tangente a la función en el punto.

Álgebra de derivadas

Sean $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivables en $\bar{x} \in (a, b)$. Entonces $f + g$, fg y $\frac{f}{g}$, si $g(\bar{x}) \neq 0$, son derivables, con:

- $(f + g)'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) + g'(\bar{x})$
- $(fg)'(\bar{x}) = f'(\bar{x})g(\bar{x}) + f(\bar{x})g'(\bar{x})$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(\bar{x}) = \frac{f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x})}{g(\bar{x})^2}$

Regla de la cadena

Sea $f: (a, b) \rightarrow (c, d)$ derivable en $\bar{x} \in (a, b)$ y $g: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $\bar{y} = f(\bar{x}) \in (c, d)$. Entonces la composición $g \circ f$ es derivable en \bar{x} con

$$(g \circ f)'(\bar{x}) = g'(f(\bar{x})) \cdot f'(\bar{x})$$

Escrito con la notación de Leibnitz, si y es una función de u , i.e. $y = y(u)$, y u es una función de x , i.e. $u = u(x)$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$.

Derivada de la función inversa

Sea $f: (a, b) \rightarrow (c, d)$ biyectiva y continua. Si f es derivable en $\bar{x} \in (a, b)$ con $f'(\bar{x}) \neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1}: (c, d) \rightarrow (a, b)$ es derivable en $\bar{y} = f(\bar{x})$ con

$$(f^{-1})'(\bar{y}) = \frac{1}{f'(\bar{x})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\bar{y}))}$$

Escrito con la notación de Leibnitz, si y es una función de u , i.e. $y = y(u)$, y u es una función de x , i.e. $u = u(x)$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{du}{dy}}$.

Derivabilidad y continuidad

- derivable en punto \Rightarrow continua en dicho punto

Puntos extremos de una función

Sean $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$.

- \bar{x} es **mínimo (máximo) GLOBAL** de f si es el valor más bajo (alto) alcanzado por la función: $f(\bar{x}) \leq (\geq) f(x) (\forall x \in A)$.
- \bar{x} es **mínimo (máximo) LOCAL** si es el valor más bajo (alto) alcanzado en una vecindad: $f(\bar{x}) \leq (\geq) f(x) (\forall x \in A \cap [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta])$.

Todo punto extremo global es punto extremo local.

Puntos críticos de una función

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función que admite derivada. $\bar{x} \in A$ es **punto crítico** si $f'(\bar{x})$ no existe o si $f'(\bar{x}) = 0$.

Condición para ser punto extremo

Sean $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. Entonces:

$$\bar{x} \text{ es extremo de } f \wedge f'(\bar{x}) \text{ existe} \Rightarrow f'(\bar{x}) = 0$$

Teorema del Valor Medio (TVM)

Sean $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) , con $g(b) \neq g(a)$ y $g'(x) \neq 0 (\forall x \in (a, b))$.

$$\Rightarrow (\exists \xi \in (a, b)) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Teorema del Valor Medio (TVM) de Rolle

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces $f(a) = f(b) \Rightarrow (\exists \xi \in (a, b)) : f'(\xi) = 0$.

Teorema del Valor Medio (TVM) de Lagrange

Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces $(\exists \xi \in (a, b)) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Teorema del Valor Medio (TVM) de Cauchy

Sean $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) . Entonces se cumple que:

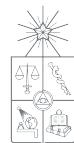
$$(\exists \xi \in (a, b)) : f'(\xi) [g(b) - g(a)] = [f(b) - f(a)] g'(\xi)$$



Tabla de derivadas

Con a constante en \mathbb{R} , $n \in \mathbb{Z} (\mathbb{R})$, se tiene que:

$F(x)$	$F'(x)$	Restricciones	$F(x)$	$F'(x)$
x^n	nx^{n-1}			
$g(x)^n$	$ng(x)^{n-1}g'(x)$			
$\frac{1}{x^n}$	$-n\frac{1}{x^{n+1}}$	$x \neq 0$		
e^x	e^x			
$e^{g(x)}$	$g'(x)e^{g(x)}$			
a^x	$\ln(a)a^x$	$a > 1, a \neq 0, x \in \mathbb{R}$		
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$		
$\ln(g(x))$	$\frac{g'(x)}{g(x)}$			
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a)}\frac{1}{x}$	$x \neq 0$		
$\sin(x)$	$\cos(x)$		$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$		$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$		$\tanh(x)$	$\operatorname{sech}(x)^2$
$\csc(x)$	$-\csc(x)\cot(x)$		$\operatorname{csch}(x)$	$-\csc(x)\coth(x)$
$\sec(x)$	$\sec(x)\tan(x)$		$\operatorname{sech}(x)$	$-\operatorname{sech}(x)\tanh(x)$
$\cot(x)$	$-\csc^2(x)$		$\coth(x)$	$-\operatorname{csch}(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$		
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$		
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$			
$\operatorname{arccsc}(x)$	$-\frac{1}{ x \sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$		
$\operatorname{arcsec}(x)$	$\frac{1}{ x \sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$		
$\operatorname{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$			



Derivadas y continuidad en acción

Funciones de clase C^k

Sea la función $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable k veces en (a, b) . Entonces su derivada k -ésima se define recursivamente por $f^{(k)}(\bar{x}) := (f^{(k-1)})'(\bar{x})$. Si es k veces derivable y su derivada k -ésima es continua, entonces $f \in C^k(a, b)$.

Puntos extremos de una función

Sean $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, k veces derivable, y $\bar{x} \in A$.

- \bar{x} es **mínimo (máximo) GLOBAL** de f si es el valor más bajo (alto) alcanzado por la función: $f(\bar{x}) \leq (\geq) f(x) (\forall x \in A)$.
- \bar{x} es **mínimo (máximo) LOCAL** si es el valor más bajo (alto) alcanzado en una vecindad: $f(\bar{x}) \leq (\geq) f(x) (\forall x \in A \cap [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta])$.
 - Si $f^{(k)}(\bar{x}) > 0, k$ par $\Rightarrow \bar{x}$ es **mín. local**.
 - Si $f^{(k)}(\bar{x}) < 0, k$ par $\Rightarrow \bar{x}$ es **máx. local**.

Todo punto extremo global es punto extremo local.

Puntos críticos de una función

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función que admite derivada. $\bar{x} \in A$ es **punto crítico** si $f'(\bar{x})$ no existe o si $f'(\bar{x}) = 0$.

Condición para ser punto extremo

Sean $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. Entonces:

$$\bar{x} \text{ es extremo de } f \wedge f'(\bar{x}) \text{ existe} \Rightarrow f'(\bar{x}) = 0$$

Teorema del Valor Medio (TVM) de Rolle

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces $f(a) = f(b) \Rightarrow (\exists \xi \in (a, b)) : f'(\xi) = 0$.

Teorema del Valor Medio (TVM) de Lagrange

Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces $(\exists \xi \in (a, b)) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Teorema del Valor Medio (TVM) de Cauchy

Sean $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) . Entonces se cumple que: $(\exists \xi \in (a, b)) : f'(\xi) [g(b) - g(a)] = [f(a) - f(b)] g'(\xi)$.

Regla de l'Hôpital

Sean $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivables en (a, b) tales que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ con $L = 0$ ó $L = \pm\infty$, $f'(x) \neq 0 (\forall x \in (a, b))$. Entonces: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ siempre que el último exista. Notar que el límite puede ser hacia a^+ , a^- , $+\infty$ o $-\infty$. Es una herramienta para calcular límites que “a primera vista” se indefinen.

Derivadas y monotonía

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Si $(\forall x \in (a, b))$ entonces:

- $f'(x) \geq 0 \iff f$ creciente en $[a, b]$
- $f'(x) \leq 0 \iff f$ decreciente en $[a, b]$

Si la desigualdad es estricta, la monotonía es estricta.

Convexidad y puntos de inflexión

Una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **convexa** si:

$$f(z) \leq f(x) + \left(\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right) (z - x) \quad (\forall x < z < y)$$

$$\iff \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \quad (\forall x < z < y)$$

La **convexidad** asegura que las rectas secantes al gráfico de la función quedan por encima del gráfico. Un **punto de inflexión** es un punto de cambio de convexidad de la función.

Derivadas y convexidad

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) .

- f es **convexa** en $[a, b]$ si f' es creciente en (a, b) , equivalentemente $f'' \geq 0$ en (a, b) .
- f es **cóncava** en $[a, b]$ si f' es decreciente en (a, b) , equivalentemente $f'' \leq 0$.

Fórmula de Taylor (función = aprox. + error)

Sea $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ $k+1$ veces derivable en $\bar{x} \in (a, b)$. Su **desarrollo de Taylor de orden n en torno a x_0**

es: $T_{x_0}^n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$.

Entonces $(\forall x > x_0) (\exists \xi \in (x_0, x))$ se satisface que

$$f(x) = T_{x_0}^n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$