Auxiliar 5: Manos a la obra

Profesora: M. Eugenia Martínez M.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 10 de septiembre de 2025

P1. [Aproximadamente]

a) **i)** Determine el polinomio de Taylor de orden 2 para la función $h(x) = \sqrt{1+x}$ en torno a $\overline{x} = 0$. **ii)** Demuestre que si $x > 0$, este polinomio aproxima a $h(x)$ con un error menor que $\dfrac{1}{16}|x|^3$.

b) Encuentre el polinomio de Maclaurin de orden 2 sin resto para $f(x) = e^{\sqrt{2}\sin(x)}$.

c) Sea f una función infinitamente derivable en $\mathbb{R}$ tal que $|f^{(k)}| \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$. Muestre que si $x_0 \in \mathbb{R}$ es fijo, entonces para todo $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$ se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x) - T_f^n(x - x_0)| = 0$, donde $T_f^n(x - x_0)$ denota al polinomio de Taylor de f de orden n en torno a x_0.

P2. [Extremo]

Sean $\beta > 0$ y $\alpha \in (-\beta, \beta)$ constantes, y $f\colon [-\beta, \beta] \to \mathbb{R}$ una función dada por $f(x) = \left(\beta^2 - x^2\right)(\alpha - x)$.

a) Muestre que $(\forall\, x \in [-\beta, \beta])\,(\forall\, h \in [-\beta - x, \beta - x]) : f(x) - f(x+h) = -h\left(3x^2 - 2x\alpha - \beta^2 + h^2 + 3xh - \alpha h\right)$.

b) Sin utilizar segundas derivadas, pruebe que f admite solo un mínimo global y solo un máximo global en $[-\beta, \beta]$. Determine candidatos a extremos y utilice alguna expresión para probar que efectivamente son extremos.

c) Muestre que la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de f en $[-\beta, \beta]$ es $\frac{4}{27}\left(\sqrt{a^2 + 3b^2}\right)^3$, y calcule el valor de a que minimiza la diferencia.

P3. [A modelar]

a) En su empresa, se desea diseñar una lata de bebida óptima en cuanto a volumen y a armonía estética. Para esto, aproxime el objeto como un cilindro de radio ρ y altura h donde el punto (h, ρ) recorre la recta $L\colon ay + bx = ab$ con $a, b > 0$ y $a + b = 1$. **i)** Determine el mayor volumen que permitiría la lata. **ii)** Analice para qué valores de α este mayor volumen se maximiza.

b) Un grupo de estudiantes de física se encuentra en la estación espacial internacional estudiando la órbita de uno de los cómetas. Ellos y ellas han determinado que esta órbita es parabólica de ecuación $y = \frac{x^2}{4}$, tomando el origen en la estación espacial internacional, y midiendo las longitudes en unidades astronómica (UA). En este mismo sistema, el sol está en la posición $S = (1, 2)$. Se sabe además, que por la composición químic adel cometa, este explotaría si su distancia al sol no se mantiene siendo a lo más 1 UA. Su labor como responsable es determinar si el cometa explotará o no, y para ello se pide que: **i)** Escriba la distancia del cometa al sol en función de x. **ii)** Encuentre la menor distancia del cometa al sol. **iii)** Concluya lo pedido.

P4. [Desigualdades]

Considere $\alpha \in (0, 1)$ fijo. **a)** Demuestre que $\left(\forall\, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ se tiene que $\sin(\alpha x) < \sin(x)$. Indicación: Use apropiadamente el TVM.**b)** Use el resultado anterior para demostrar que $(\cos(x))^\alpha \leq \cos(\alpha x)$ $\left(\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$. Indicación: Estudie el crecimiento de la función $f(x) = (\cos(x))^\alpha - \cos(\alpha x)$.

P5. [Asintóticamente]
Sea $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Dados $x_0 \in \mathbb{R}$ y $h > 0$:

a) Demuestre que los coeficientes a_h, b_h y c_h de la parábola $y = c_h + b_h\,(x - x_0) + a_h\,(x - x_0)^2$ que coincide con el grafo de φ en los puntos $(x_0, \varphi(x_0))$, $(x_0 + h, \varphi(x_0 + h))$ y $(x_0 + 2h, \varphi(x_0 + 2))$ son

$$a_h = \frac{\varphi(x_0) + \varphi(x_0 + 2h) - 2\varphi(x_0 + h)}{2h^2}, \qquad b_h = \frac{-3\varphi(x_0) + 4\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0 + 2h)}{2h}, \qquad c_h = f(x_0)$$

b) Defina $\alpha = \lim\limits_{h\to 0} a_h$, $\beta = \lim\limits_{h\to 0} b_h$ y $\gamma = \lim\limits_{h\to 0} c_h$. Demuestre, que $\alpha = \frac{1}{2}\varphi''(x_0)$, $\beta = \varphi'(x_0)$ y $\gamma = \varphi(x_0)$.

c) Calcule los coeficientes α, β, γ definidos en la parte anterior para la función definida en $\mathbb{R}$ con $f(x) = x^5 \ln\left(1 + x^2\right)$ para la función definida en $\mathbb{R}$ por $\varphi(x) = x^5 \ln\left(1 + x^2\right)$ y en el punto $x_0 = 1$.

P6. [Otra mirada]
Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que $(\forall\, x \in \mathbb{R}) : f'(x) = -xf(x) \wedge g'(x) = xg(x)$ y $f(0) = g(0) = 1$.

a) Pruebe que $f \cdot g$ es constante. Deduzca que $f(x) > 0$ y que $g(x) > 0$ $(\forall\, x \in \mathbb{R})$. Indicación: para la deducción del signo de g y g, puede usar el TVI junto a una contradicción.

b) Estudie crecimiento, máximos y mínimos de f.

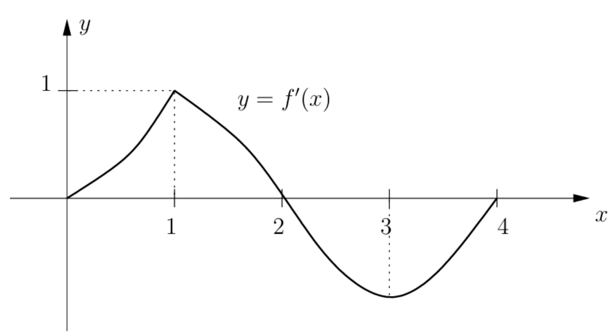
c) Calcule f'' en función de f (y no de f'). Estudie convexidad y concavidad de f.

d) Demuestre que $(\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\,(\exists\, \xi \in (0, x)) : f(x) = -f''(\xi)$.

e) Estudie el crecimiento de f' y demuestre que f' es acotada en $\mathbb{R}$.

f) Deduzca que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} = 0$. Bosqueje un gráfico de f a partir del estudio anterior.

P7. [El orden de los factores no altera el producto]
Se sabe que un bosquejo del gráfico de la derivada de una función $f\colon [0, 4] \to \mathbb{R}$ es el dado en la figura, con $f(0) = 1$. **i)** Usando la imagen como referencia, encuentre el gráfico aproximado de la función f. Para esto, debe indicar de forma precisa en cuáles intervalos f es creciente, decreciente, cóncava o convexa, además de dónde alcanza sus máximos y mínimos locales o globales, y dónde tiene sus inflexiones. **iii)** Pruebe además que f es acotada superiormente por 3.



P8. [En el borde]

Calcule, si es que existen, los siguientes límites: **a)** $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ **b)** $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

P9. [Clásico]
El objetivo de este problema es estudiar la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$. Para ello: **a)** Indique domino, ceros, paridad y signos de f. **b)** Estudie la continuidad de f en su dominio y determine, si es que existen, asíntotas verticales, horizontales u oblicuas. **c)** Calcule f', estudie monotonía de f y determine los puntos críticas, identificando máximos y mínimos locales y globales, si es que existen. **d)** Calcule $f''(x)$, estudie convexidad y concavidad de f e indique los puntos de inflexión, si es que existen. **e)** Usando la información anterior, bosqueje la función, señalando los puntos críticos, valos extremos y recorrido de f.