DESARROLLO AUX 4

DERIVADAS Y CONTINUIDAD EN ACCIÓN

MA1002-8
2025-2

Profesora: M. Eugenia Martínez M.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya

P1

P1 a) f, g funciones derivables en $\mathbb{R}$ t.q. $\begin{cases} f'(x) = g(x) & (\forall x \in \mathbb{R}) \\ g'(x) = f(x) \\ f(0) = 2 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

P.D.Q. $f^2(x) - g^2(x) = 4 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

> una función es constante ssi su derivada es cero

En efecto,

Si se logra ver que la derivada de esa función es cero, entonces se concluye que la función es constante. Luego, para determinar el valor de la constante basta conocer el valor de la función en un punto (y será su valor en todas partes pues es constante).

solo es ponerle un nombre

Sea la función auxiliar $h(x) := f^2(x) - g^2(x)$

Se quiere ver que $h'(x) = 0$

Como f, g son derivables y usando la regla de la potencia, cadena, y linealidad:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left[f^2(x) - g^2(x)\right]' \\ &= 2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x) \quad ; \ f' = g \ \text{y} \ g' = f \\ &= 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) \\ &= 0 \ // \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = 0$$

$$\Rightarrow h(x) = \mu, \text{ algún } \mu \in \mathbb{R} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Notar que $h(0) = f^2(0) - g^2(0) = 2^2 - 0^2 = 4.$

Entonces $h(x) = 4 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) = 4 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$ Q.E.D. ■

P1 b) $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función 2 veces derivable en $\mathbb{R}$

P.D.Q. $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\varphi(x) > 0$ y $\varphi(x)\varphi''(x) \geq (\varphi'(x))^2$

$\Rightarrow \psi(x) = \ln(\varphi(x))$ es convexa

una función es convexa ssi su 2° derivada es al menos cero

↳ Se quisiera ver que $\psi''(x) \geq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

En efecto,

Usando la regla de la cadena y derivada de logaritmo, con φ 2-derivable:

$$\Rightarrow \psi'(x) = [\ln(\varphi(x))]' = \frac{1}{\varphi(x)}\varphi'(x) \;//$$

$$\Rightarrow \psi''(x) = \left[\frac{1}{\varphi(x)}\right]'\varphi'(x) + \frac{1}{\varphi(x)}[\varphi'(x)]'$$

$$= -\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\varphi'(x) + \frac{1}{\varphi(x)}\varphi''(x)$$

$$\Leftrightarrow \psi''(x) = \frac{-(\varphi'(x))^2 + \varphi(x)\varphi''(x)}{\varphi^2(x)} \;//$$

Por enunciado $\varphi(x)\varphi''(x) \geq (\varphi'(x))^2 \Leftrightarrow -(\varphi'(x))^2 + \varphi(x)\varphi''(x) \geq 0$.

Y también $\varphi^2(x) \geq 0$ pues $\alpha^2 \geq 0$ $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$.

Entonces $\psi''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \psi$ es convexa ∎

(P1) c) $\begin{cases} f:(0,+\infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = 5x^2 + \beta \frac{1}{x^5} \end{cases}$, $\beta > 0$

(P1) c) i) P.D.Q. f es convexa en $(0,+\infty)$

una función es convexa ssi su 2° derivada es al menos cero

↳ Se quisiera ver que $f''(x) \geq 0$ $(\forall x \in (0,+\infty))$

En efecto,

Por álgebra de funciones derivables:

$$\Rightarrow f'(x) = \left[5x^2 + \beta \frac{1}{x^5}\right]'$$

$$= 10x - 5\beta \frac{1}{x^6} = 10x - 5\beta x^{-6} = 5x^{-6}(2x^7 - \beta)$$

$$\Rightarrow f''(x) = \underbrace{10}_{>0} + \underbrace{30\beta}_{>0} \frac{1}{\underbrace{x^7}_{>0}} \geq 0 \iff \text{f es convexa.} \ \blacksquare$$

P1 c) ii] Determinar punto de mínimo global de f

> $\bar{x}$ extremo y $f'(\bar{x}) = \exists \Rightarrow f'(\bar{x}) = 0$
>
> ↳ por contrarrecíproca, si $f'(\bar{x}) \neq 0 \Rightarrow \bar{x}$ no es punto extremo
>
> ↳ lo mínimo que hay que exigir es $f'(\bar{x}) = 0$, y por eso se buscan así

En efecto:

$$f'(x) = 0 \iff 10x - 5\beta\frac{1}{x^6} = 0 \quad / \cdot x^6$$

$$\iff 10x^7 - 5\beta = 0$$

$$\iff x^7 = \frac{1}{2}\beta$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{1}{2}\beta\right)^{\frac{1}{7}} =: x^*$$

Ahora sabemos que es un punto crítico. Para justificar que sea mínimo, hay que ver que antes del punto decrezca, y después crezca.

Analizando antes del punto crítico y después:

$$0 < x < x^* \iff 0 < x < \left(\frac{1}{2}\beta\right)^{\frac{1}{7}}$$

$$\Rightarrow 0 < x^7 < \frac{1}{2}\beta$$

$$\Rightarrow 0 < 2x^7 < \beta$$

$$\Rightarrow -\beta < 2x^7 - \beta < 0$$

$$\Rightarrow -5\beta x^{-6} < 5x^{-6}(2x^{-7} - \beta) < 0$$

$$\iff f'(x) < 0$$

$\iff f$ decreciente a la izq. de x^*

$$x^* < x \iff \left(\frac{1}{2}\beta\right)^{\frac{1}{7}} < x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\beta < x^7$$

$$\Rightarrow \beta < 2x^7$$

$$\Rightarrow 0 < 2x^7 - \beta$$

$$\Rightarrow 0 < 5x^{-6}(2x^{-7} - \beta)$$

$$\iff f'(x) < 0$$

$\iff f$ es creciente a la der. de x^*

para usar la tablita, solo hay que tomar un valor antes del crítico y justo después, y evaluar en la f' (por ser continua, su comportar es aproximadam el mismo).

	...	$\left(\frac{1}{2}\beta\right)^{\frac{1}{7}}$	...
f'	⊖	0	⊕
f	↘		↗

Por el comportamiento anterior, es mínimo local.

Como no hay más puntos críticos y la función no es constante, es $\boxed{\text{mínimo global}}$.

P1 c) iii) Calcular valor de β para que $\min_{x\in(0,+\infty)} f(x) = 2\beta$

Se quiere que se satisfaga $f(\text{mínimo}) = 2\beta$

En efecto,

De la parte anterior, se vio que $x^* = \left(\frac{1}{2}\beta\right)^{\frac{1}{7}}$ es el mínimo global de la función.

O sea: $\min_{x\in(0,+\infty)} f(x) = f(x^*)$

Entonces $\min_{x\in(0,+\infty)} f(x) = 2\beta$

$$\iff f(x^*) = 2\beta \quad \text{def. } f$$

$$\iff 5{x^*}^{2} + \beta {x^*}^{-5} = 2\beta \quad \text{reescribir } f$$

$$\iff {x^*}^{-5}\left(5{x^*}^{7} + \beta\right) = 2\beta \quad x^* = \left(\tfrac{1}{2}\beta\right)^{\frac{1}{7}}$$

$$\iff \left(\left(\beta\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{7}}\right)^{-5}\left(5\left(\left(\tfrac{1}{2}\beta\right)^{\frac{1}{7}}\right)^{7} + \beta\right) = 2\beta$$

$$\iff \left(\tfrac{1}{2}\beta\right)^{-\frac{5}{7}}\left(5\left(\tfrac{1}{2}\beta\right) + \beta\right) = 2\beta \quad \text{desarrollar}$$

$$\iff \left(\tfrac{1}{2}\beta\right)^{-\frac{5}{7}}\left(\tfrac{7}{2}\beta\right) = 2\beta \quad \text{desarrollar}$$

$$\iff \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}}\left(\tfrac{1}{2}\right)7\,\beta^{-\frac{5}{7}}\beta = 2\beta \quad \text{reescribir}$$

$$\iff \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{2}{7}}7\,\beta^{\frac{2}{7}} = 2\beta$$

$$\iff \left(\tfrac{1}{2}\beta\right)^{\frac{2}{7}} = 4 \quad \cdot\tfrac{1}{7}$$

$$\iff \left(\tfrac{1}{2}\beta\right)^{\frac{1}{7}} = 2 \quad (\cdot)^{\frac{1}{2}}$$

$$\iff \tfrac{1}{2}\beta = 2^{7} \quad (\cdot)^{7}$$

$$\iff \beta = 2^{8} = 256,$$ calculando lo pedido. $\boxtimes$

P2

P2 Círculo de radio R

↳ Construir cono a partir de recortar sector circular $\widehat{OAB}$ de ángulo central θ, y juntando los trazos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ para que coincidan.

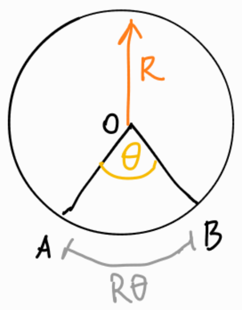
↳ Se forma cono recto (vértice cae ortogonal a base) circular cuya base es un círculo de perímetro igual a la longitud del arco que queda posterior al corte.

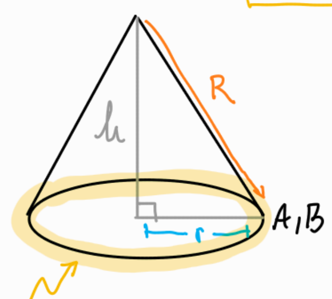
Objetivo: calcular valor de ángulo θ t.q. cono tenga volumen máximo

> para encontrar valores máximos, hay que modelar la función de lo que se quiere calcular, y luego hacer estudio de derivadas.

P2 a) Hacer esquema de círculo y cono

> Imaginación





$$P = 2\pi R - \theta R = R(2\pi - \theta)$$

P2 b) P.D.Q. radio basal r del cono es $r = R\left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)$

P.D.Q. altura h del cono es $h = R\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2}$

> Se conoce el perímetro del nuevo cono!

> con el radio conocido...  (Pitágoras)

$$2\pi r = R(2\pi - \theta)$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{R(2\pi - \theta)}{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r = R\left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)}$$

$$h^2 + r^2 = R^2$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$= \sqrt{R^2 - R^2\left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2}$$

$$= \sqrt{R^2\left(1 - \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{h = R\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2}}$$

P2 c) Verificar que sustitución $x = 1-\frac{\theta}{2\pi}$ el volumen del cono es $V(x) = \frac{1}{3}R^3x^2\sqrt{1-x^2}$

El volumen de un cono es $\frac{1}{3}$(área base)(altura)

Área de base

$$A_B = \pi r^2 = \pi\left(R\left(1-\frac{\theta}{2\pi}\right)\right)^2 \quad ; \quad x := 1-\frac{\theta}{2\pi}$$

$$= \pi(Rx)^2$$

$$\Leftrightarrow A_B = \pi R^2 x^2 = A_B(x)$$

Altura

$$h = R\sqrt{1-\left(1-\frac{\theta}{2\pi}\right)^2} \quad ; \quad x := 1-\frac{\theta}{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow h = R\sqrt{1-x^2} = h(x)$$

Volumen

$$V(x) = \frac{1}{3}A_B(x)\,h(x)$$

$$= \frac{1}{3}\pi R^2x^2\,R\sqrt{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V(x) = \frac{1}{3}\pi R^3x^2\sqrt{1-x^2}}$$

P2 d) Analizar función $V(x)$

↳ Dominio, ceros, signos, paridad, derivada, crecimientos, máximo

En efecto:

Dominio

Hay que definir la función donde no admita indefiniciones

$$\ast\ x \in Dom(V) \Longleftrightarrow V(x) = \exists$$
$$\Longleftrightarrow \frac{1}{3}R^3x^2\sqrt{1-x^2} = \exists$$
$$\Longleftrightarrow 1-x^2 \geq 0$$
$$\Longleftrightarrow 1 \geq x^2$$
$$\Longleftrightarrow |x| \leq 1$$

$\therefore Dom(V) = [-1,1]$ //

Ceros

Hay que buscar los valores que anulan a la función

$$\ast\ x \in Z(V) \Leftrightarrow V(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}R^3x^2\sqrt{1-x^2} = 0$$
$$\Rightarrow x^2 = 0 \ \vee \ \sqrt{1-x^2} = 0$$
$$\Rightarrow x = 0 \ \vee \ 1-x^2 = 0$$
$$\Rightarrow x = 0 \ \vee \ 1 = x^2$$
$$\Rightarrow \boxed{x=0} \ \vee \ \boxed{x = \pm 1}$$

$\therefore Z(V) = \{-1, 0, 1\}$ //

Signos

Se quiere saber los cambios de signo entre ceros

	$-\infty \cdots -1$	$-1 \cdots 0$	$0 \cdots 1$	$1 \cdots +\infty$
$\sqrt{1-x^2}$	$\nexists$	+	+	$\nexists$
x^2	+	+	+	+
f	$\nexists$	+	+	$\nexists$

por lo tanto $f(x) \geq 0$ $(\forall x \in Dom(f))$

Paridad

Hay que estudiar $f(-x)$. Si es $-f(x)$, es impar; si es $f(x)$, es par.
$\underbrace{}_{\text{simétrica vs eje Y}}$

$$* \; V(-x) = \frac{1}{3}R^3(-x)^2\sqrt{1-(-x)^2}$$
$$= \frac{1}{3}R^3x^2\sqrt{1-x^2} = V(x)$$

$\therefore$ V es par. //

Derivada

Matraquear!!

$$* \; V'(x) = \left[\frac{1}{3}R^2x^2\sqrt{1-x^2}\right]'$$
$$= \frac{1}{3}R^2\left[[x^2]'\sqrt{1-x^2} + x^2\left[\sqrt{1-x^2}\right]'\right]$$
$$= \frac{1}{3}R^2\left[2x\sqrt{1-x^2} + x^2\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}[1-x^2]'\right]$$
$$= \frac{1}{3}R^2\left[2x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}(-\cancel{2}x)\right]$$
$$= \frac{1}{3}R^2\left[2x\sqrt{1-x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

el signo depende del numerador

$$\Leftrightarrow V'(x) = \frac{1}{3}R^2\left[\frac{2x(1-x^2)-x^3}{\sqrt{1-x^2}}\right] \;//\; \rightarrow V'(x) \not\exists \Leftrightarrow x \in \{-1,1\}$$

$$2x(1-x^2)-x^3$$
$$= 2x-2x^3-x^3$$
$$= 2x-3x^3$$
$$= x(2-3x^2)$$
$$= x\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}-x\right)\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}+x\right)$$

Puntos críticos

Buscar con los ceros de derivada

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}R^2\left[\frac{2x(1-x^2)-x^3}{\sqrt{1-x^2}}\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x(1-x^2)-x^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x-2x^3-x^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x-3x^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x(2-3x^2) = 0$$
$$\Rightarrow x = 0 \vee x^2 = \frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow \boxed{x = 0} \vee \boxed{x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}} \;//$$

Crecimientos

Analizar valor de derivada en valores entre puntos críticos (¡y dominio!)

	$-1 \cdots -\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\cdots 0$	$\cdots \sqrt{\frac{2}{3}}$	$\cdots 1$
$V'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$V(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
	MAX	min	MAX	

argmax $V(x)$

valores en los que se alcanza el máximo

Hay que determinar los valores donde la función es máxima.
Hay dos opciones.
Pero... $x = 1 - \frac{\theta}{2\pi}$; $0 < \theta < 2\pi$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{\theta}{2\pi} < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 > -\frac{\theta}{2\pi} > -1$$

$$\Leftrightarrow 1 > 1 - \frac{\theta}{2\pi} > 0 \Leftrightarrow 1 > x > 0 \qquad \therefore \boxed{x = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \in \operatorname{argmax}(V(x))}$$

P2 e) Calcular volumen máximo del cono y ángulo que lo genera.

Usar el valor ya determinado

Notar que $V\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3}\pi R^3 \left(\sqrt{\frac{2}{3}}^{2}\right)\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = \frac{1}{3}\pi R^3 \frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{9}\pi R^3 \sqrt{\frac{1}{3}}$ //
y es el valor máximo buscado.

En términos de θ: $1 - \frac{\theta}{2\pi} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)2\pi = \theta$ //

P_3

P3 Estudiar completamente las funciones siguientes

¿Cómo estudio una función?

En general, el estudio de una función suele tener las mismas etapas, ya que se quiere conocer distintas características:

* dónde está definida → dominio
* cuáles son sus raíces → ceros
* si es positiva o negativa → signos

	raíz$_1$ ...	raíz$_2$ ...	
f	$+$	$-$	$+$ ...

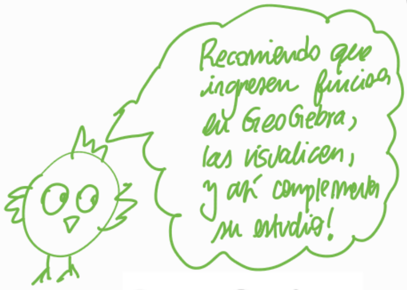
* continuidad en puntos problemáticos → continuidad
* si se refleja c/r al eje vertical (par) o la identidad (impar), o no → paridad (puede ser par o impar)
* si se repite cada cierto valor → periodicidad (usualm. asociada a trigonométricas)

También la función derivada aporta información sobre

* valores extremos → x t.q. $f'(x)=0$
* crecimiento → $f'\geq 0 \Leftrightarrow f\nearrow \ \wedge\ f'\leq 0 \Leftrightarrow f\searrow$

Y la función 2° derivada aporta información sobre

* puntos de inflexión → x t.q. $f''(x)=0$
* convexidad $\cup$ $f''(x)\geq 0$
* concavidad $\cap$ $f''(x)\leq 0$



Lo anterior se puede resumir en una tablita:

	... punto extremo$_1$	... punto extremo$_2$	... punto extremo$_j$
f'	$+$	$-$	$-$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
	MAX	min	

para discriminar si son globales o locales, hay que ver el valor de la función y compararlos.

Algunas otras veces se pide analizar asíntotas verticales y horizontales. $\lim\limits_{x\to a^{\pm}}, a\in\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$

Y eso es todo :)

Como el procedimiento es el mismo siempre (la dificultad reside en la forma de la función), solo desarrollaré un ejercicio de esta parte!

Para el resto, practiquen con lo aprendido, y usando GeoGebra :)

P3 b) $g(x)=e^{\frac{1}{\ln(x)}}$

Dominio

* $x\in Dom(g) \iff g(x)=\exists \iff \frac{1}{\ln(x)}=\exists$

$$\iff \ln(x)\neq 0$$
$$\iff x\in Dom(\ln)\setminus\{1\}$$
$$\iff x\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$$

$\therefore Dom(g)=(0,+\infty)\setminus\{1\}$ //

Ceros

* $x\in Z(g) \iff g(x)=0$

$$\iff e^{\frac{1}{\ln(x)}}=0$$
$$\iff F \quad (e^{(\alpha)}>0 \ \forall\alpha\in\mathbb{R})$$

$\therefore Z(g)=\emptyset$ //

Signos

def. exp

* $g(x)=e^{\frac{1}{\ln(x)}}>0$

$\Rightarrow g(x)>0 \ (\forall x\in Dom(g))$ //

Continuidad

* g es continua en su dominio por álg./comp. de funciones continuas.

¿se podrá reparar en $x=0$? Para pensar...

Paridad

* $g(-x)=e^{\frac{1}{\ln(-x)}}\neq -e^{\frac{1}{\ln(x)}}$ ó $e^{\frac{1}{\ln(x)}}$

pues $\ln(\cdot)$ no es par ni impar

Periodicidad

* exp y ln no son periódicas $\Rightarrow$ g no es periódica

↳ otra forma de argumentarlo: que en distintas partes toma valores que no pueden ser iguales:

f es decreciente, $f((0,1))\subseteq[0,1]$

$f((1,+\infty))\subseteq(1,+\infty)$

Asíntotas (no pedían pero ya que la función está tan rara)

* $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{\ln(x)}}=1$

$x\to+\infty \Rightarrow \ln(x)\to+\infty \Rightarrow \frac{1}{\ln(x)}\to 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{\ln(x)}}\to 0$

para asíntotas horizontales ↳ asíntota horizontal en $y=1$

* $\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{\ln(x)}}=1$

$x\to 0^+ \Rightarrow \ln(x)\to-\infty \Rightarrow \frac{1}{\ln(x)}\to 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{\ln(x)}}\to 1$

$\ln(\cdot)$ se indefine ↳ no hay asíntotas verticales en $x=0$

* $\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{\ln(x)}}=0$

$x\to 1^- \Rightarrow \ln(x)\to 0^- \Rightarrow \frac{1}{\ln(x)}\to-\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{\ln(x)}}\to 0$

cero de $\ln(\cdot)$ — sí hay asíntota vertical en $x=1$

* $\lim_{x\to 1^+} g(x)=\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{\ln(x)}}=+\infty$

$x\to 1^+ \Rightarrow \ln(x)\to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{\ln(x)}\to+\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{\ln(x)}}\to 0$

Derivada

* $g(x)=e^{\frac{1}{\ln(x)}}$, derivable pues exp, ln lo son

$$\Rightarrow g'(x)=e^{\frac{1}{\ln(x)}}\cdot[\ln(x)^{-1}]'$$
$$=e^{\frac{1}{\ln(x)}}\cdot\left(-\frac{1}{\ln(x)^2}\right)\cdot[\ln(x)]'$$
$$\iff g'(x)=-e^{\frac{1}{\ln(x)}}\frac{1}{x\ln(x)^2}$$ //

Crecimientos

* Como $x\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$ y * $e^{\frac{1}{\ln(x)}}>0$ * $\ln(x)^2>0$

$\Rightarrow g'(x)<0$

$\Rightarrow$ g decrece en $(0,1)\cup(1,+\infty)$ //

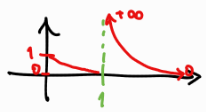
2° derivada

* $$f''(x)=-e^{\frac{1}{\ln(x)}}(-\ln(x)^{-2})\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x\ln(x)^2}$$
$$+-e^{\frac{1}{\ln(x)}}\cdot\frac{-(1\cdot\ln(x)^2+x\cdot 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x})}{(x\ln(x)^2)^2}$$
$$=\underbrace{\frac{e^{\frac{1}{\ln(x)}}}{x^2\ln(x)^4}}_{>0}\underbrace{(1+\ln(x))^2}_{>0}>0$$ //

Convexidad

* $(\nexists x\in\mathbb{R}): f''(x)=0$ i.e. no hay puntos de inflexión //
* como $f''(x)>0 \iff$ f convexa en su dominio //

Bosquejo



//

P4

P4 $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua en $[0,1]$

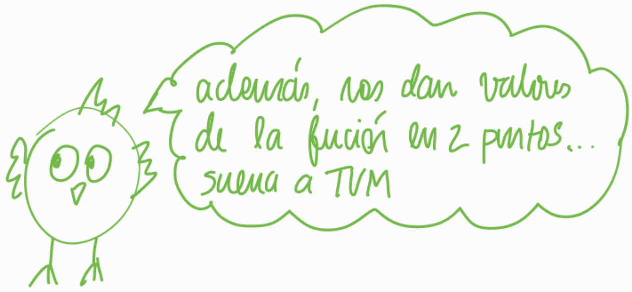
dos veces derivable en $(0,1)$

$h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$h(1)=1$

$h'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

P.D.Q. $h'(\xi)=\frac{3}{\pi}$, algún $\xi\in(0,1)$



Observar que $\frac{3}{\pi}\in(0,1)$ pues $\pi>3>0$

En efecto,

Notar que, en particular

* h es continua en $\left[\frac{1}{2},1\right]$
* h es derivable en $\left(\frac{1}{2},1\right)$

En virtud del Teorema del Valor Intermedio de Lagrange:

$$\left(\exists\, \xi_1\in\left(\tfrac{1}{2},1\right)\right):\ h'(\xi_1)=\frac{h(1)-h\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1 \,//$$

Notar que como $h\in\mathcal{C}^2(0,1)\Rightarrow h'$ es continua.

En particular:

* h' es continua en $\left[\frac{1}{2},\xi_1\right)$, algún $\xi_1\in\left(\frac{1}{2},1\right)$
* $\frac{1}{2}<\frac{3}{\pi}<1$

$\Leftrightarrow h'\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{3}{\pi}<h'(\xi_1)$, algún $\xi_1\in\left(\frac{1}{2},1\right)$

Luego, en virtud del Teorema de Valores Intermedios para h'

$$\left(\exists\, \xi\in\left(\tfrac{1}{2},\xi_1\right)\right):\ h'(\xi)=\frac{3}{\pi},\ \text{y}\ \left(\tfrac{1}{2},\xi_1\right)\subseteq(0,1)$$

$$\Rightarrow \xi\in(0,1).\ \blacksquare$$

¡Qué entrete el aux!
Espero que la hayan pasado tan bien como yo

Es importante pensar que estas herramientas para estudiar funciones fueron desarrolladas cuando aún no existían los computadores como hoy en día, y por lo tanto, no era posible simplemente buscar en GeoGebra !!

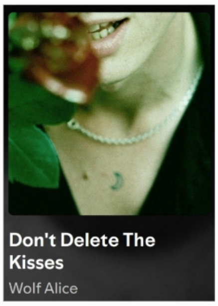
Y en tal entonces, decisiones reales se debían tomar! Sobre funciones que modelan finanzas, volúmenes de producción, energía, etc.

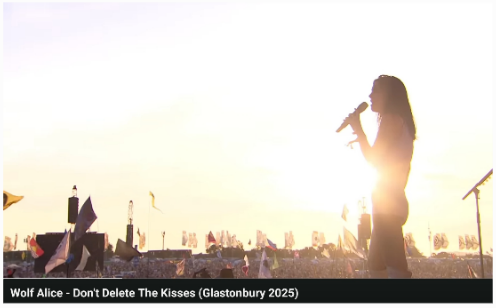
Todo tiene su porqué
Es importante que siempre lo busquen!

Ojalá les haya gustado el aux!
Atenta a sus dudas (bianca.zamora@ug.uchile.cl → ucursos)

Buena semana!

— Bianca





#spiritual experience